УДК 512.541

А.Р. Чехлов

СВОЙСТВА ПОДГРУПП АБЕЛЕВЫХ ГРУПП, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОЕКЦИЙ

Рассмотрены свойства подгрупп, инвариантных относительно проекций. Изучение строения таких подгрупп сведено к редуцированным группам. Найдены условия, при которых группа без кручения является подгруппой, инвариантной относительно проекций, в своей алгебраически компактной оболочке.

Ключевые слова: *абелева группа; вполне характеристическая подгруппа; подгруппа, инвариантная относительно проекций.*

Пусть A – абелева группа. Запись $H \leq A$ означает, что H – подгруппа в A; $H \leq fi\ A$ (или H – fi-подгруппа в A), что H – вполне характеристическая подгруппа в A; $H \leq pi\ A$ (или H – pi-подгруппа в A), что H – подгруппа в A, инвариантная относительно проекций; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A; если не оговорено противное, то A_p – p-компонента, $t(A)$ – периодическая часть группы A.

Пусть B и C – группы, X – непустое подмножество в C. Обозначим через $\mathrm{Hom}\,(C,B)X = \sum\limits_{f\in \mathrm{Hom}\,(C,B)} f(X)$ – подгруппу, порожденную всеми гомоморфными образами подмножества X в группе B (*гомоморфная оболочка* подмножества X в группе B). Термин «гомоморфная оболочка» предложен в [1] (см. также [2]). Всегда $\mathrm{Hom}(C,B)X \leq fi\ B$. Если $X=C$, то $\mathrm{Hom}(C,B)X$ совпадает со *следом* группы C в B.

Подгруппа $H \leq A$ называется *инвариантной относительно проекций*, если $\pi H \subseteq H$ для каждой проекции π группы A.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства:

a) $H \leq pi\ A$ тогда и только тогда, когда $\pi H = H \cap \pi A$ для каждой проекции π группы A;

b) если $H \leq pi\ A$, то $H \cap B \leq pi\ B$ для каждого прямого слагаемого B группы A; а если $A = \oplus A_i$, то $H = \oplus(H \cap A_i)$;

c) если $H \leq pi\ B$, а $B \leq pi\ A$, то $H \leq pi\ A$;

d) если $H \leq pi\ A$ и π – проекция группы A, то отображение $a + H \mapsto \pi a + H$ – проекция группы A/H; в частности, если $A = B \oplus C$, то

$$A/H = (B + H)/H \oplus (C + H)/H;$$

e) если $H \leq B \leq A$ и $H \leq pi\ A$, а $B/H \leq pi\ A/H$, то $B \leq pi\ A$;

f) пересечение pi-подгрупп и подгруппа, порожденная pi-подгруппами, являются pi-подгруппами; в группе без кручения сервантная подгруппа, порожденная pi-подгруппой, также является pi-подгруппой.

Отметим, что pi-подгруппы абелевых p-групп изучались в [3]. Так, в [3] доказано, что в периодических сепарабельных группах все pi-подгруппы являются вполне характеристическими. Некоторые обобщения этих результатов на модули были получены в [4].

Приведем следующий полезный результат:

Лемма 1 ([5, лемма 9.5]). Пусть $A = B \oplus C$ – прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то $\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta$, $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, для всяких эндоморфизмов π_1, θ_1 приведенного выше вида имеет место разложение $A = B \oplus \theta_1 A$.

Лемма 2. 1) Пусть π, ρ – проекции группы A, причем $\pi A \le pi\, A$. Тогда $(1-\pi)\rho(1-\pi)$ также является проекцией группы A.

2) Пусть H – pi-подгруппа группы $A = B \oplus C$. Тогда $H \cap B \le pi\, B$, $H \cap C \le pi\, C$ и $\mathrm{Hom}(C,B)(H \cap C) \subseteq H \cap B$, $\mathrm{Hom}(B,C)(H \cap B) \subseteq H \cap C$.

3) Пусть $A = B \oplus C$, $B \le pi\, A$, $B_1 \le B$, $C_1 \le C$ и $H = B_1 \oplus C_1$. Тогда $H \le pi\, A$ в точности тогда, когда $B_1 \le pi\, B$, $C_1 \le pi\, C$ и $\mathrm{Hom}(C,B)C_1 \subseteq B_1$.

4) Пусть $A = B \oplus C$, где $B \le pi\, A$. В группе A каждая pi-подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладают группы B и C. В частности, в произвольной группе A каждая pi -подгруппа является fi-подгруппой тогда и только тогда, когда этим свойством обладает ее редуцированная часть, а делимая часть без кручения (если она ненулевая) разложима.

Доказательство. 1) Обозначим $\theta = 1 - \pi$. Имеем

$$\theta\rho\theta = \theta\rho(\pi + \theta)\rho\theta = \theta\rho\pi\rho\theta + \theta\rho\theta\rho\theta.$$

Поскольку $\theta\rho\pi = 0$, то $\theta\rho\theta = \theta\rho\theta\rho\theta = (\theta\rho\theta)^2$.

2) Согласно лемме 1 $A = B \oplus C_1$, где $C_1 = \theta_1 A$ и $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$, а $\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)$. Для $x \in H \cap C$ имеем $\theta_1(x) = x - \varphi(x) \in H$. Откуда $\varphi(x) \in H$.

3) *Необходимость* вытекает из 2). *Достаточность*. Пусть π, θ – проекции, соответствующие разложению $A = B \oplus C$, ρ – проекция группы A. Так как $\rho(B) \subseteq B$, то $(\rho|B)^2 = \rho|B$ и поэтому $\rho(B_1) \subseteq B_1$. Если теперь $x \in C_1$, то

$$\rho(x) = (\pi + \theta)\rho(\pi + \theta)(x) = (\pi\rho\pi)(x) + (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\pi)(x) + (\theta\rho\theta)(x) =$$
$$= (\pi\rho\theta)(x) + (\theta\rho\theta)(x).$$

Здесь $\pi\rho\theta \in \mathrm{Hom}(C,B)$. Поэтому $(\pi\rho\theta)(x) \in B_1$, а $(\theta\rho\theta)(x) \in C_1$ по 1).

4) *Необходимость*. Пусть $H \le pi\, A$ и $B' = \mathrm{Hom}(C,B)$. Тогда из п. 2) следует, что $H' = B' \oplus H \le pi\, A$. Если теперь $f \in E(C)$, то продолжим f до эндоморфизма $\overline{f}$ группы A (полагая, что $\overline{f} \mid B = 0$). Имеем $\overline{f}(H') \subseteq H'$. Откуда $\overline{f}(H') = f(H) \subseteq H$.

Достаточность. Пусть $H \le pi\, A$. Тогда $H = (H \cap B) \oplus (H \cap C)$. Если теперь $f \in E(A)$, то $f(B) \subseteq B$. Поэтому $f(H \cap C) = \pi f(H \cap C) + \theta f(H \cap C)$, где π, θ – проекции группы A, соответствующие разложению $A = B \oplus C$. Здесь $\theta f(H \cap C) = \theta f \theta(H \cap C) \subseteq H \cap C$ поскольку $\theta f \theta \in E(C)$, а $\pi f(H \cap C) \subseteq H \cap B$ по п.3).

Из леммы 2 непосредственно вытекает, что каждое прямое слагаемое, инвариантное относительно проекций, является вполне характеристическим [5. § 9, упр. 4]. В произвольном прямом слагаемом pi-подгруппа не обязана быть fi-подгруппой, даже если в группе множества этих подгрупп совпадают.

Лемма 3. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – фиксированное разложение группы A, $\pi_i \colon A \to A_i$ – соответствующие проекции, $B_i \le A_i$ и $H = \bigoplus_{i \in I} B_i$. Тогда

1) если $A_i \leq pi\, A$ для всякого $i\in I$, то $H \leq pi\, A$ тогда и только тогда, когда $B_i \leq pi\, A_i$ для всех $i\in I$; в частности, подгруппа B периодической группы T является pi-подгруппой тогда и только тогда, когда каждая ее p-компонента $B_p \leq pi\, T_p$;

2) если $\mathrm{Hom}(A_j, A_i)B_j \subseteq B_i$ для всех $i, j\in I$ $(i \neq j)$, то $H \leq pi\, A$ тогда и только тогда, когда $\pi_i\rho(B_i) \subseteq B_i$ для каждой проекции ρ группы A.

Доказательство. 1) Вытекает из п. 3 леммы 2. 2) *Необходимость* очевидна. *Достаточность*. Пусть $a\in B_i$, $G_i = \bigoplus\limits_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$. Тогда $\rho(a) = b + c$, где $b\in A_i$, а $c \in \mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)B_i \subseteq \bigoplus\limits_{j\in I\setminus\{i\}} B_j \subseteq H$. Согласно условию леммы, $b = \pi_i(\rho(a))\in B_i \subseteq H$. Поэтому $\rho(a)\in H$.

Лемма 4. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ – фиксированное разложение группы A и $H \leq pi\, A$. Тогда:

1) условие $H \leq fi\, A$ равносильно тому, что $H\cap A_i \leq fi\, A$ для всех $i\in I$;

2) если $G_i = \bigoplus\limits_{j\in I\setminus\{i\}} A_j$, а $B_i = \mathrm{Hom}(G_i, A_i)(H\cap G_i)$, то $B_i \subseteq H\cap A_i$ и $\bigoplus\limits_{i\in I} B_i \leq fi\, A$. В частности, если $B_i \subseteq H\cap A_i$ для каждого $i\in I$, то $H \leq pi\, A$;

3) если $A_i \cong A_j$ для всех $i, j\in I$, то всякая pi-подгруппа группы A является fi-подгруппой.

Доказательство. 1) Вытекает из п. 2 леммы 2. 2) Пусть $x\in B_i$ и π, θ – проекции группы A, соответствующие разложению $A = A_i\oplus G_i$. Тогда если $\varphi\in E(A)$, то $\varphi = (\pi + \theta)\varphi(\pi + \theta) = \pi\varphi\pi + \theta\varphi\pi + \pi\varphi\theta + \theta\varphi\theta$. Откуда $\varphi(x) = (\pi\varphi\pi)(x) + (\theta\varphi\pi)(x)$. Здесь $\pi\varphi\pi$ – эндоморфизм группы A_i и $(\pi\varphi\pi)(x)\in B_i \subseteq H$ в силу вполне характеристичности подгруппы B_i в A_i, а $(\theta\varphi\pi)(x) \in \mathrm{Hom}\,(A_i, G_i)B_i \subseteq \bigoplus\limits_{j\in I\setminus\{i\}} B_j \subseteq H$.

3) Пусть G – произвольная pi-подгруппа группы A, $f \in E(A_i)$ и $y = f(x)$ для некоторого $x \in G\cap A_i$. Согласно п. 1, достаточно показать, что $y \in G\cap A_i$. Если $j \neq i$ и $\varphi\colon A_i \to A_j$ – изоморфизм, то $z = \varphi(y)\in G\cap A_i$ по лемме 2, п. 2. Откуда $y = \varphi^{-1}(z)\in G\cap A_i$.

Если a – элемент порядка p^k группы A, то через $e(a) = k$ обозначим его *экспоненту*. Положим $A[p^k] = \{a\in A \mid p^k = 0\}$, причем если A – p-группа, то $A[p^\infty] = A$.

Пусть D – периодическая делимая группа, H – некоторая периодическая подгруппа группы A. Тогда $\mathrm{Hom}\,(A, D)H = \oplus D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\,\{e(h) \mid h\in H_p\}$ [1, лемма 1.1]. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$ и, значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$. Если же D – произвольная делимая группа, $0 \neq H$ – непериодическая подгруппа группы A, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D$ [1, лемма 1.2].

Заметим, что в делимой периодической группе D всякая pi-подгруппа является вполне характеристической. Действительно, по лемме 2 можно ограничиться примарным случаем. Тогда D является прямой суммой групп, изоморфных $Z(p^\infty)$. В $Z(p^\infty)$ каждая подгруппа вполне характеристична. Поэтому данное утверждение следует из леммы 4, п. 1. Если же D – разложимая делимая группа без кручения, то ее ненулевые *pi*-подгруппы совпадают с самой группой. Это следует из отмеченного выше свойства гомоморфных оболочек и леммы 2, п. 2. Модули, инвариантные относительно проекций своей инъективной оболочки, образуют класс квазинепрерывных (или π-инъективных) модулей [6, предложение 4.13]. Класс квазиинъективных модулей состоит из модулей, вполне инвариантных в своей инъективной оболочке [6, предложение 4.17]. Квазиинъективные модули являются квазинепрерывными. Таким образом, периодические квазинепрерывные группы являются квазиинъективными, а разложимые квазинепрерывные группы без кручения являются инъективными. Из сказанного, в частности, вытекает, что в делимой группе $D = D_0 \oplus t(D)$ каждая *pi*-подгруппа является *fi*-подгруппой тогда и только тогда, когда ее часть без кручения D_0 разложима.

Теорема 5. Пусть $A = B \oplus D$, где B – редуцированная, D – делимая группа, $D = D_0 \oplus t(D)$. Тогда $H \le pi\, A$ в точности тогда, когда H совпадает с одной из следующих двух подгрупп:

1) $H = B' \oplus (\bigoplus_p D_p[p^{k_p}])$, где B' – периодическая *pi*-подгруппа группы B и $k_p \ge m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B'_p\}$;

2) $H = B' \oplus D'_0 \oplus t(D)$, где $B' \le pi\, B$, $0 \ne D'_0 \le D_0$, причем $D'_0 = D_0$, если B' – непериодическая группа или если группа D_0 разложима.

Доказательство. *Необходимость*. Имеем $H = B' \oplus (H \cap D_0) \oplus (\bigoplus_p (H \cap D_p))$, где $B' = H \cap B \le pi\, B$. Если $H \cap D_0 = 0$, то в силу замечания перед этой теоремой и леммы 2, п. 2 следует, что $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$. Так как $H \cap D_p \le fi\, D_p$, то $H \cap D_p = D_p[p^{k_p}]$, где $k_p \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$. Поэтому $k_p \ge m_p$. Если B' – непериодическая группа, то $\mathrm{Hom}(B, D)B' = D$. Аналогичные рассуждения, если $D'_0 = H \cap D_0 \ne 0$.

Достаточность. Вытекает из леммы 2, п. 3.

Отметим, что соответствующая теорема для *fi*-подгрупп доказана в [1, теорема 1.4].

Теорема 6. Пусть $A = t(A) \oplus B$ – редуцированная группа. Тогда $H \le pi\, A$ в точности тогда, когда $H = T' \oplus B'$, где $T' \le pi\, T = t(A)$, $B' \le pi\, B$, причем $(\mathrm{Hom}\,(B, T)B')_p \subseteq T'_p$, если $pB \ne B$.

Доказательство. Вытекает из леммы 2, п. 3.

Напомним, что группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых ее элементов a, $b \ne 0$ условие на их характеристики $\chi_A(a) \le \chi_A(b)$ влечет существование $f \in E(A)$ со свойством $f(a) = b$. Для группы без кручения A обозначим через $\tau(A)$ – множество типов $t(a)$ всех ее ненулевых элементов a; если t – некоторый тип, то через $A^*(t)$ обозначается подгруппа в A, порожденная всеми ее элементами, имеющими тип $> t$, множество всех элементов группы A типа $\ge t$ образует сервантную подгруппу $A(t)$. Всегда $A^*(t) \subseteq A(t)$. Если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип, равный типу любого $0 \ne a \in A$.

Теорема 7. Пусть для вполне транзитивной группы без кручения A существует такое разложение $A=\bigoplus_{i\in I} A_i$, что для всех $t_1, t_2 \in \tau(A_i)$, $i\in I$, с условием $t_1 \le t_2$ для некоторого $j\in I\setminus\{i\}$ найдется $t\in\tau(A_j)$ со свойством $t_1 \le t \le t_2$. Тогда каждая *pi*-подгруппа H группы A является *fi*-подгруппой.

Доказательство. Применим п. 1 леммы 4. Пусть $f\in E(A_i)$ и $a\in H\cap A_i$. Тогда $\chi(a)\le\chi(f(a))$. По условию найдется $b\in A_j$ со свойством $\chi(a)\le\chi(b)\le\chi(f(a))$. В силу вполне транзитивности $\varphi(a)=b$ и $\psi(b)=f(a)$ для некоторых $\varphi, \psi\in E(A)$. Дважды применяя п. 2 леммы 2, получаем, что $f(a)\in H$.

Следствие 8. 1) Пусть $A=\bigoplus_{i\in I} A_i$, где A_i – группы, удовлетворяющие условиям теоремы 7. Тогда каждая *pi*-подгруппа группы A является *fi*-подгруппой.

2) Всякая сервантная *pi*-подгруппа разложимой однородной вполне транзитивной группы совпадает с самой группой.

Теорема 9. Пусть A – сепарабельная группа без кручения. Каждая ее *pi*-подгруппа является *fi*-подгруппой тогда и только тогда, когда A обладает следующим свойством: если ее прямое слагаемое ранга 1 и типа t p-делимо для некоторого простого числа p, то дополнительное прямое слагаемое содержит прямое слагаемое ранга 1 того же типа t.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть B – прямое слагаемое в A ранга 1, $pB = B$ и в дополнительном прямом слагаемом C нет прямого слагаемого ранга 1 типа, равного $t = t(B)$. Имеем $A^*(t) = C^*(t) \subset A(t) = B \oplus C(t)$, причем $C(t) = C^*(t)$. Пусть, далее, $0 \ne b\in B$ и $H = \langle b\rangle \oplus C(t)$. Тогда если $A = F \oplus N$, то $A^*(t)=F^*(t) \oplus N^*(t) \subset H \subset F(t) \oplus N(t)$. Так как $A(t)/A^*(t) \cong F(t)/F^*(t) \oplus N(t)/N^*(t)$ имеет ранг 1, то $F(t) = F^*(t)$ или $N(t) = N^*(t)$. Пусть, скажем, $N(t) = N^*(t)$. Тогда $H = (F(t) \cap H) \oplus N(t) = (F \cap H) \oplus (N \cap H)$, т.е. $H \le pi\, A$. Однако деление на p является эндоморфизмом f прямого слагаемого B, для которого $f(b)\notin H$, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть $H \le pi\, A$, $x\in H$. Так как A сепарабельна, то x принадлежит прямому слагаемому $G_1\oplus\ldots\oplus G_n$, $x = g_1+\ldots+g_n$, где $g_i\in H\cap G_i$, $r(G_i) = 1$, $i = 1,\ldots,n$. Согласно лемме 4, п. 1, достаточно показать, что $f_i(G_i)\in H$ для $f_i\in E(G_i)$. Поскольку $r(G_i) = 1$, то $E(G_i)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbf{Q}$, порожденному такими дробями $1/p$, что $pG_i = G_i$. Если $pG_i \ne G_i$ для каждого простого числа p, то $E(G_i)$ изоморфно кольцу целых чисел $\mathbb{Z}$ и, следовательно, $f_i(g_i)\in H\cap G_i$. Если же $pG_i = G_i$ для некоторого простого p, то по условию для G_i найдется такая подгруппа $B_i \cong G_i$, что $G_i \oplus B_i$ – прямое слагаемое в A. Пусть $\chi(b_i) = \chi(f_i(g_i))$, где $b_i \in B_i$. По лемме 2 $b_i\in H$ и, значит, $f_i(g_i) \in H$.

Предложение 10. Пусть A – такая редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, что все ее p-адические компоненты разложимы. Тогда условие $H \le pi\, A$ влечет $H \le fi\, A$.

Доказательство. Группа A представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая ее p-адическая компонента A_p является p-адической алгебраически компактной группой.

Пусть $a \in H$ и $f \in E(A)$. Имеем $a = (\ldots, a_p, \ldots)$, где, поскольку $H \le pi\, A$, $a_p \in H \cap A_p$. Далее, используя свойства p-адических алгебраически компактных групп, запишем $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$ и $G_p \neq 0$. Тогда $f(a) = (\ldots, f(a_p), \ldots)$, $f(a_p) = b_p + g_p$, где $b_p \in B_p$, $g_p \in G_p$. Если $B = \prod B_p$, $G = \prod G_p$, то $A = B \oplus G$, $f(a) = b + g$, где $b = (\ldots, b_p, \ldots)$, $g = (\ldots, g_p, \ldots) \in G$. По лемме 2 $g \in H \cap G$. Поэтому достаточно показать, что $b \in H$. Так как A_p – однородная вполне транзитивная группа, то найдутся φ_p, $\psi_p \in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in \ A \cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p)) = b_p$. Тогда если $\varphi = (\ldots, \varphi_p, \ldots)$, $\psi = (\ldots, \psi_p, \ldots)$, то $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$. Согласно лемме 2, $\varphi(b) \in H \cap G$ и $b = \psi(\varphi(b)) \in H \cap B$.

Теорема 11. Редуцированная группа без кручения A является pi-подгруппой своего алгебраически компактного замыкания $\overline{A}$ тогда и только тогда, когда A представима в виде $A = B \oplus C$, где:

1) $\overline{B}, \overline{C} \le fi\, \overline{A}$;

2) $B \le fi\, \overline{B}$;

3) p-компоненты C_p группы $\overline{C}$ неразложимы, замыкание (в $\mathbf{Z}$-адической топологии) каждой сервантной подгруппы группы C служит для C прямым слагаемым, и группа C содержит такую плотную сервантную подгруппу $\oplus\, G_p$, что $G_p \subseteq C_p$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\overline{B}$ (соответственно $\overline{C}$) – прямое произведение всех разложимых (соответственно неразложимых) p-адических компонент группы $\overline{A}$. Тогда $\overline{A} = \overline{B} \oplus \overline{C}$ и, кроме того, $\overline{B}, \overline{C} \le fi\, \overline{A}$. Теперь, если $B = A \cap \overline{B}$ и $C = A \cap \overline{C}$, то, поскольку $A \le pi\, \overline{A}$, $A = B \oplus C$, причем $\overline{B}$ (соответственно $\overline{C}$) совпадает с алгебраически компактным замыканием группы B (соответственно C). По предложению 10 $B \le fi\, \overline{B}$. Пусть, далее, $G_p = C \cap G_p$. Тогда G_p – плотная сервантная подгруппа в C_p, значит, подгруппа $\oplus\, G_p$ плотна в C. Алгебраически компактное замыкание $\overline{G}$ всякой сервантной подгруппы G группы C служит в $\overline{C}$ прямым слагаемым: $\overline{C} = \overline{G} \oplus D$ для некоторой подгруппы $D \subseteq \overline{C}$. Имеем $C = (C \cap \overline{G}) \oplus (C \cap D)$. Замыкание подгруппы G в группе C совпадает с $C \cap \overline{G}$.

Достаточность. Проверим, что $C \le pi\, \overline{C}$. Пусть $\overline{C} = E \oplus F$. Имеем $C_p = (C_p \cap E) \oplus (C_p \cap F)$. В силу неразложимости $C_p \subseteq E$ либо $C_p \subseteq F$. В частности, $E, F \le fi\, \overline{C}$; кроме того, соответственно $G_p \subseteq E$ либо $G_p \subseteq F$. Поэтому $\oplus G_p = (E \cap (\oplus G_p)) \oplus (F \cap (\oplus G_p))$. По условию замыкание E_0 (соответственно F_0) подгруппы $E \cap (\oplus G_p)$ (соответственно $F \cap (\oplus G_p)$) служит для C прямым слагаемым: $C = E_0 \oplus M$ (соответственно $C = N \oplus F_0$). Имеем $\overline{C} = \overline{E}_0 \oplus \overline{M} = \overline{N} \oplus \overline{F}_0$. Здесь $\overline{E}_0 = E$ и $\overline{F}_0 = F$. Так как $E, F \le fi\, \overline{C}$, то $\overline{M} = F$, а $\overline{N} = E$. Следовательно, $C = (C \cap E) \oplus (C \cap F)$. Ссылка на лемму 2, п. 3 заканчивает доказательство.

Если $A = B \oplus C$, то в [5, теорема 9.6] доказано, что пересечение всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A есть максимальная вполне характеристическая подгруппа группы A, не пересекающаяся с B.

Теорема 12. Пусть $A = B \oplus C$.

1) Наименьшая *pi*-подгруппа группы A, содержащая C, является *fi*-подгруппой и совпадает с:

а) $\mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$;

б) суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A.

2) Наибольшая *pi*-подгруппа группы A, не пересекающаяся с B, является *fi*-подгруппой и совпадает с:

а) $P = \bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \ker \varphi$;

б) пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к подгруппе B в группе A.

Доказательство. 1) п. а) вытекает из леммы 2, п. 2. Поскольку $C \subseteq G$, то $G = (B \cap G) \oplus C$. Если C_1 – дополнительное прямое слагаемое к B, то из леммы 1 следует, что $C + C_1 = \varphi(C) \oplus C$ для некоторого гомоморфизма $\varphi: C \to B$. Откуда $G = (\sum\limits_{\varphi \in Hom(C,B)} \varphi(C)) \oplus C = \mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$, что ввиду а) доказывает б).

2) Вполне характеристичность подгруппы H следует из ее определения. Если теперь X – *pi*-подгруппа группы A со свойством $X \cap B = 0$, то из равенства $X = (X \cap B) \oplus (X \cap C)$ следует, что $X = X \cap C \subseteq C$. Ввиду леммы 2, п. 2 $X \subseteq \ker \varphi$ для каждого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, B)$. Поэтому $X \subseteq H$, что доказывает а).

Если $A = B \oplus C_1$ и $X \le pi\, A$ со свойством $X \cap B = 0$, то так же, как и выше, $X \subseteq C_1$. Поэтому б) вытекает из того, что N является *fi*-подгруппой группы A (см. замечание перед теоремой).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. Томск, 1981. С. 56 – 92.
2. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фунд. и прикл. матем. 2002. Т. 8. Вып. 2. С. 407 – 473.
3. *Megibben C.* Projective-invariant subgroups of abelian groups // Tamkand J. Math. 1977. V. 8. No. 2. P. 177 – 182.
4. *Hausen J.* Endomorphism rings generated by idempotents // Tamkand J. Math. 1981. V. 12. No. 2. P. 215 – 218.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т.1. 335 с.; 1977. Т.2. 416 с.
6. *Пунинский Г.Е., Туганбаев А.А.* Кольца и модули. М.: Союз, 1998. 420 с.

Принята в печать 01.12.07.