

УДК 512.541

И.Э. Гриншпон

О ПОДОБИИ ПОЧТИ ГОЛОМОРФНО ИЗОМОРФНЫХ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Две группы называются почти голоморфно изоморфными, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Изучается подобие почти голоморфно изоморфных прямых произведений групп без кручения из некоторого класса. Рассматривается также вопрос об определяемости группы своим голоморфом.

Ключевые слова: абелева группа без кручения, голоморф, прямое произведение, подобие групп, транзитивная группа, однородная группа, ранг.

Пусть G – абелева группа, $\Gamma(G)$ – ее голоморф, то есть полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов $\text{Aut}(G)$. Для групповой операции в группе $\text{Aut}(G)$ пользуемся мультипликативной записью, а для групповых операций в G и $\Gamma(G)$ – аддитивной записью. Группу $\Gamma(G)$ можно рассматривать как множество всех упорядоченных пар (g, φ) , где $g \in G$, $\varphi \in \text{Aut}(G)$. Групповая операция в $\Gamma(G)$ определяется по правилу: $(g, \varphi) + (h, \psi) = (g + \varphi h, \varphi\psi)$ для любых $(g, \varphi), (h, \psi) \in \Gamma(G)$. Нейтральным элементом в $\Gamma(G)$ является элемент $(0, \varepsilon)$ (ε – тождественный автоморфизм), а элементом, противоположным элементу (g, φ) , является элемент $(-\varphi^{-1}g, \varphi^{-1})$. Элементы вида (g, ε) образуют в голоморфе $\Gamma(G)$ нормальную подгруппу, изоморфную группе G , а элементы вида $(0, \varphi)$ – подгруппу, изоморфную группе $\text{Aut}(G)$. Будем отождествлять эти подгруппы с группами G и $\text{Aut}(G)$ соответственно. Понятно, что $G \cap \text{Aut}(G) = \{(0, \varepsilon)\}$. Элементы вида (g, ε) и $(0, \varphi)$ голоморфа $\Gamma(G)$ будем часто записывать просто в виде g и φ соответственно.

Группы с изоморфными голоморфами называются **голоморфно изоморфными**. Голоморфно изоморфные группы не обязательно изоморфны. Исследованию голоморфно изоморфных абелевых групп посвящен ряд работ И. Х. Беккера (см. например, [1 – 4]).

Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является почти голоморфный изоморфизм групп. Две группы называются **почти голоморфно изоморфными**, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы, то есть группы G и H почти голоморфно изоморфны, если $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные подгруппы групп $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Почти голоморфно изоморфные конечно порожденные абелевы группы рассматривались в работе Миллса [5].

Пусть $\Pi = \{p_1, p_2, \dots\}$ – множество всех простых чисел, занумерованных в порядке возрастания. Если G – абелева группа без кручения, $g \in G$, то **характеристикой** $\chi(g)$ элемента g в группе G называется последовательность $\chi_G(g) = \{k_1, k_2, \dots, k_n, \dots\}$, в которой каждое k_n есть p_n -высота $h_{p_n}^{(G)}(g)$ элемента g в группе G . Если понятно, о какой группе G идет речь, то индексы G в обозначении характеристики и p_n -высоты элемента g будут опускаться.

Напомним, что две характеристики $\chi_1 = \{k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \dots, k_n^{(1)}, \dots\}$ и $\chi_2 = \{k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \dots, k_n^{(2)}, \dots\}$ считаются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда множество $M = \{n \in \mathbb{N} \mid k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}\}$ конечно, причем, если $k_n^{(1)} \neq k_n^{(2)}$, то $k_n^{(1)} \neq \infty$ и $k_n^{(2)} \neq \infty$. Во множестве характеристик естественным образом вводится частичный порядок, а именно $\chi_1 \leq \chi_2$ тогда и только тогда, когда для каждого n выполняется условие $k_n^{(1)} \leq k_n^{(2)}$. Класс эквивалентности во множестве характеристик называется *типом*. Если характеристика элемента g абелевой группы без кручения G принадлежит типу t , то говорят, что элемент g имеет тип t (что записывается следующим образом: $t(g) = t$ или $t_G(g) = t$). Абелева группа без кручения, в которой все ненулевые элементы имеют один и тот же тип t , называется *однородной* [6. С. 129 – 131].

Чтобы подчеркнуть, что все ненулевые элементы однородной группы G имеют фиксированный тип t , будем говорить, что G – *однородная группа типа t* и записывать это так: $t(G) = t$. Однородную группу G типа t будем обозначать также G_t .

Множество типов будем рассматривать как частично упорядоченное множество относительно естественного отношения порядка (то есть $t_1 \leq t_2$ тогда и только тогда, когда существуют характеристики χ_1 и χ_2 , принадлежащие типам t_1 и t_2 соответственно, такие, что $\chi_1 \leq \chi_2$).

Тип t называется p_n -делимым ($p_n \in \Pi$), если для всякой характеристики $\chi \in t$ имеем $k_n = \infty$.

Абелева группа без кручения G называется *транзитивной*, если для любых двух элементов $a, b \in G$, таких, что $\chi(a) = \chi(b)$, существует автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(G)$, такой, что $b = \varphi a$.

Пусть $G = \prod_{t \in T_1} G_t$, $H = \prod_{t \in T_2} H_t$ – прямые произведения однородных групп G_t и H_t соответственно, T_1 и T_2 – некоторые множества типов. Группы G и H назовем *подобными*, если $T_1 = T_2$ и для всякого типа $t \in T$ ранг $r(G_t)$ группы G_t равен рангу $r(H_t)$ группы H_t , где $T = T_1 = T_2$.

В дальнейшем будет использоваться следующее утверждение.

Лемма 1 [5]. Если S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы G , $(a, \sigma) \in S$, $g \in G$, то

$$2a \in S, \quad \sigma^2 \in S; \quad (1)$$

$$\sigma g - g \in S; \quad (2)$$

$$\sigma(\sigma g - g) = \sigma g - g; \quad (3)$$

$$\sigma^n g = g + n(\sigma g - g); \quad (4)$$

$$n(a, \sigma) = \left(na + \frac{n(n-1)}{2}(\sigma a - a), \sigma^n \right); \quad (5)$$

$$2(\sigma a - a) = 0. \quad (6)$$

Заметим, что если G – абелева группа без кручения, то формула (5) с учетом (6) принимает вид

$$n(a, \sigma) = (na, \sigma^n). \quad (7)$$

Для абелевой группы без кручения G обозначим через $T(G)$ – множество всех типов элементов группы G .

Лемма 2. Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G . Тогда для любого типа $t \in T(S)$ существует тип $t' \in T(G)$, такой, что $t' \geq t$.

Доказательство. Пусть тип t принадлежит множеству типов группы S . Тогда существует ненулевой элемент $(a, \sigma) \in S$, такой, что его характеристика принадлежит типу t ($\chi((a, \sigma)) \in t$). Эта характеристика имеет вид $\chi((a, \sigma)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$.

Пусть $a \neq 0$. Обозначим его тип через t' . Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(x_n, \eta_n) \in S$, такой, что $p_n^{k_n}(x_n, \eta_n) = (a, \sigma)$. Тогда с учетом (7) имеем $(p_n^{k_n}x_n, \eta_n^{p_n^{k_n}}) = (a, \sigma)$. Получили, что $p_n^{k_n}x_n = a$. Значит, уравнение $a = p_n^{k_n}x_n$ разрешимо в группе G . Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) \geq k_n$. Если $k_n = \infty$, то для любого натурального числа m существует такой элемент $(y_m, \xi_m) \in S$, что уравнение $p_n^m(y_m, \xi_m) = (a, \sigma)$ разрешимо в S , а значит, уравнение $p_n^m y_m = a$ разрешимо в G . Поэтому $h_{p_n}^{(G)}(a) = \infty$.

Таким образом, $\chi_{(G)}(a) \geq \chi_{(S)}((a, \sigma))$ и, значит, $t(a) = t' \geq t$.

Пусть $a = 0$. Тогда $\sigma \neq \varepsilon$. Если $k_n < \infty$, то существует элемент $(0, \eta_n) \in S$, такой, что $p_n^{k_n}(0, \eta_n) = (0, \sigma)$ или $\eta_n^{p_n^{k_n}} = \sigma$. Так как $\sigma \neq \varepsilon$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $\sigma g \neq g$. Согласно (4) имеем $\sigma g = \eta_n^{p_n^{k_n}} g = g + p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Отсюда следует, что $\sigma g - g = p_n^{k_n}(\eta_n g - g)$. Уравнение $\sigma g - g = p_n^{k_n}x$ разрешимо в G . Значит, $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) \geq k_n$.

Если $k_n = \infty$, то p_n -высота $h_{p_n}^{(G)}(\sigma g - g) = \infty$. Таким образом, $\chi_{(G)}(\sigma g - g) \geq \chi_{(S)}((0, \sigma))$. Следовательно, $t(\sigma g - g) = t' \geq t$. ■

Предложение 3. Пусть S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ абелевой группы без кручения G и S_1 – множество первых компонент элементов группы S . Тогда

- 1) для любого типа $t \in T(S)$ существует тип $t' \in T(S_1)$, такой, что $t' \geq t$;
- 2) для любого типа $t \in T(S)$ существует тип $t'' \in T(G \cap S)$, такой, что $t'' \geq t$.

Доказательство. 1) Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $t((a, \sigma)) = t$. Тогда для любого элемента $g \in G$ имеем $\sigma g - g \in S$ (лемма 1), а значит, и $\sigma g - g \in S_1$. Обозначим тип элемента $\sigma g - g$ через t' . Из доказательства леммы 2 вытекает, что $t(\sigma g - g) = t' \geq t$ и $t' \in T(S_1)$.

2) Пусть $(a, \sigma) \in S$ и $t((a, \sigma)) = t$. По лемме 1 имеем $2a \in S$ и, значит, $2a \in G \cap S$. Имеем $t(a) = t(2a) = t''$. Применяя лемму 2, получаем $t(a) = t(2a) = t'' \geq t$ и $t'' \in T(G \cap S)$. ■

Предложение 4. Пусть G и H – почти голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения, G – однородная группа, а группа H обладает свойством: если $t(b_1) \geq t(b_2)$, где $b_1, b_2 \in H$, то $t(b_1) = t(b_2)$. Тогда H – однородная группа и $t(G) = t(H)$.

Доказательство. Пусть тип однородной группы G равен t и пусть тип $t_1 \in T(H)$. Группы G и H – почти голоморфно изоморфны, значит, $H \cong G'$, где G' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(G)$ и $G \cong H'$, где H' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $t_1 \in T(G')$. Тогда из леммы 2 получаем, что тип t удовлетворяет условию $t \geq t_1$. Так как $G \cong H'$, то $t \in T(H')$. Согласно лемме 2, для типа t существует тип $t_2 \in T(H)$, такой, что $t_2 \geq t$. Получили, что $t_2 \geq t \geq t_1$. Из условия на типы элементов в группе H следует, что $t_1 = t_2$. Значит, $t_1 = t$. В силу произвольности выбора типа t_1 получаем, что H – однородная группа и ее тип равен t . ■

Следствие 5. Если G и H – однородные почти голоморфно изоморфные группы, то $t(G) = t(H)$.

Теорема 6. Пусть $G = \prod_{t \in T_1} G_t$, $H = \prod_{\tau \in T_2} H_\tau$, где G_t и H_τ – однородные группы

типов t и τ соответственно, T_1 и T_2 – множества, состоящие из попарно несравнимых типов. Если G и H – почти голоморфно изоморфные группы, то $T_1 = T_2$.

Доказательство. Группы G и H почти голоморфно изоморфны, то есть $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно.

Пусть $t_0 \in T_1$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H следует, что $t_0 \in T(H')$. По лемме 2 существует тип $\tau_0 \in T(H)$, такой, что $\tau_0 \geq t_0$.

Предположим, что $\tau_0 \in T(H) \setminus T_2$. Тогда $\tau_0 = \inf \{\tau_\beta \mid \tau_\beta \in T_2'\}$, где $T_2' \subset T_2$ и $|T_2'| \geq 2$. Значит, для любого $\tau_\beta \in T_2'$ справедливо $\tau_0 \leq \tau_\beta$. Если существует тип $\tau_\beta \in T_2'$, такой, что $\tau_0 = \tau_\beta$, то получим, что $\tau_0 \in T_2$, что противоречит предположению $\tau_0 \in T(H) \setminus T_2$. Следовательно, $\tau_0 < \tau_\beta$.

Имеем $\tau_\beta > \tau_0 \geq t_0$. Из почти голоморфного изоморфизма групп G и H вытекает, что $\tau_\beta \in T(G')$. По лемме 2 существует тип $t_1 \in T(G)$, такой, что $t_1 \geq \tau_\beta$.

Возможны 2 случая:

1) Пусть $t_1 \in T_1$. Тогда $t_1 \geq \tau_\beta > \tau_0 \geq t_0$ откуда $t_1 > t_0$. Получили, что типы t_0 и t_1 сравнимы. Это противоречит условию теоремы.

2) Пусть $t_1 \in T(G) \setminus T_1$. Тогда $t_1 = \inf \{t_\alpha \mid t_\alpha \in T_1'\}$, где $T_1' \subset T_1$ и $|T_1'| \geq 2$. Аналогично ранее доказанному получаем, что $t_\alpha > t_1$. Имеем $t_\alpha > t_1 \geq \tau_\beta > \tau_0 \geq t_0$. Типы t_0 и t_α принадлежат T_1 и сравнимы между собой. Противоречие.

Значит, $\tau_0 \in T_2$, $\tau_0 \geq t_0$.

Аналогично доказывается, что для типа $\tau_0 \in T_2$ существует тип $t_2 \in T_1$, такой, что $t_2 \geq \tau_0$.

Итак, $t_2 \geq \tau_0 \geq t_0$. Так как типы в T_1 попарно несравнимы, то $t_2 = t_0$. Значит, $\tau_0 = t_0$ и справедливо включение $T_1 \subset T_2$.

Обратное включение $T_2 \subset T_1$ доказывается аналогично.

Следовательно, $T_1 = T_2$. ■

Лемма 7. Пусть $G = \prod_{t \in T} G_t$, где G_t – однородная группа типа t , T – множество

попарно несравнимых типов. Тогда для любого ненулевого элемента $g \in G$ и любого типа $t \in T$ справедливо условие: тип $t(g)$ не больше типа t .

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют такой элемент $g_0 \in G$ и тип $t_0 \in T$, для которых $t(g_0) > t_0$. Обозначим через π_t – проекцию группы

G на подгруппу G_t . Имеем $t(g_0) = \inf \{ t \in T \mid \pi_t(g_0) \neq 0 \}$. Значит, для любого типа $t \in T$, для которого $\pi_t(g_0) \neq 0$, получаем $t \geq t(g_0) > t_0$, что противоречит несравнимости типов t и t_0 . ■

В дальнейшем при рассмотрении прямых произведений вида $A = \prod_{t \in T} A_t$ мы будем отождествлять группу A_t с изоморфной ей подгруппой $\rho_t \pi_t A$ группы A , а любой элемент $a \in A_t$ – с элементом $\rho_t \pi_t a$, где π_t – проекция группы A на группу A_t , а ρ_t – координатное вложение группы A в группу A_t .

Предложение 8. Пусть $G = \prod_{t \in T} G_t$, где G_t – однородная группа типа t , T – множество попарно несравнимых типов. Если для некоторой абелевой группы без кручения H существует изоморфное отображение μ группы G на нормальную подгруппу H' голоморфа $\Gamma(H)$, то μG_t – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$ для любого типа $t \in T$.

Доказательство. Пусть t_0 – произвольный тип из T и $S = \mu G_{t_0}$. Очевидно, что S – подгруппа группы H' , состоящая в точности из всех элементов группы H' , имеющих тип t_0 . Докажем, что S – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$.

Пусть $(s, \omega) \in S$, $(b, \sigma) \in \Gamma(H)$, $\chi((s, \omega)) \in t_0$ и $\chi((s, \omega)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$. Для всякого натурального числа n , для которого $k_n < \infty$, существует элемент $(s_n, \omega_n) \in H'$, такой, что $p_n^{k_n}(s_n, \omega_n) = (s, \omega)$.

Тогда

$$\begin{aligned} & p_n^{k_n}(-(b, \sigma) + (s_n, \omega_n) + (b, \sigma)) = \\ & = \underbrace{-(b, \sigma) + (s_n, \omega_n) + (b, \sigma) - (b, \sigma) + (s_n, \omega_n) + \dots}_{p_n^{k_n}} + \underbrace{(b, \sigma) - (b, \sigma) + (s_n, \omega_n) + (b, \sigma)}_{\text{раз}} = \\ & = -(b, \sigma) + p_n^{k_n}(s_n, \omega_n) + (b, \sigma) = -(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma) \in H'. \end{aligned}$$

Следовательно, p_n -высота элемента $-(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma)$ в группе H' не меньше k_n . Понятно, что если $k_m = \infty$ для некоторого натурального числа m , то p_m -высота элемента $-(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma)$ в группе H' также равна ∞ . Значит, $t(-(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma)) \geq t_0$. Применяя лемму 7, получаем $t(-(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma)) = t_0$. Следовательно, $-(b, \sigma) + (s, \omega) + (b, \sigma) \in S$ и поэтому S – нормальная подгруппа $\Gamma(H)$. ■

Теорема 9. Пусть $G = \prod_{t \in T_1} G_t$, $H = \prod_{t \in T_2} H_t$, где G_t ($t \in T_1$) и H_t ($t \in T_2$) – транзитивные группы и множества T_1 и T_2 состоят из попарно несравнимых типов. Если группы G и H почти голоморфно изоморфны, то они подобны.

Доказательство. Так как группы G и H почти голоморфно изоморфны, то $G \cong H'$, $H \cong G'$, где G' и H' – нормальные абелевы подгруппы голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ соответственно. Обозначим через μ изоморфное отображение группы G на группу H' .

Так как множества T_1 и T_2 состоят из попарно несравнимых типов, то по теореме 6 получаем, что множества T_1 и T_2 совпадают. Таким образом, можно записать $G = \prod_{t \in T} G_t$, $H = \prod_{t \in T} H_t$.

Пусть $t_0 \in T$ и пусть $\mu G_{t_0} = S$. Обозначим через H_1 и Ψ – множества первых и вторых компонент группы H' соответственно, а через S_1 и Φ – множества первых и вторых компонент группы S соответственно. Очевидно, что S – подгруппа группы H' . Применяя предложение 8, получаем, что S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$. Значит, $S_1 \neq 0$ ([7]).

Докажем, что тип любого элемента $s \in S_1$ в группе H равен t_0 . Так как $s \in S_1$, то существует элемент $(s, \omega) \in S$. При изоморфизме тип элемента сохраняется, поэтому $t_{H'}((s, \omega)) = t_0$. Пусть $\chi((s, \omega)) = (k_1, k_2, \dots, k_n, \dots)$.

Пусть $k_n < \infty$. Тогда существует элемент $(x, \delta) \in H'$, такой, что $p_n^{k_n}(x, \delta) = (s, \omega)$. По формуле (7) имеем $(s, \omega) = (p_n^{k_n}x, \delta^{p_n^{k_n}})$. Тогда $s = p_n^{k_n}x$. Из этого вытекает, что p_n -высота элемента s в группе H не меньше k_n .

Если $k_n = \infty$, то получаем, что p_n -высота элемента s в группе H равна ∞ .

Таким образом, $\chi(s) \geq \chi(s, \omega)$ и, значит, $t(s) \geq t_0$. Так как согласно лемме 7, $t(s)$ не может быть больше t_0 , то получаем, что $t(s) = t_0$.

Докажем, что S_1 подгруппа группы H_{t_0} . Предположим противное. Пусть существует элемент $s \in S_1$, такой, что $s \notin H_{t_0}$, то есть $\pi_{t_j}s \neq 0$ для некоторого типа $t_j \neq t_0$ ($t_j \in T$), где π_{t_j} – проекция группы H на группу H_{t_j} . Из доказательства леммы 7 вытекает, что $t(s) \leq t_j$. Так как $t(s) = t_0$, то получаем, что $t_0 \leq t_j$. Противоречие с несравнимостью типов в T . Следовательно, S_1 – подгруппа группы H_{t_0} .

Так как S – нормальная абелева подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$, то по лемме 1 имеем $2S_1 \subset S$. Следовательно,

$$r(S_1) = r(2S_1) \leq r(S). \quad (*)$$

Докажем, что при любом автоморфизме $\lambda \in \text{Aut}(H_{t_0})$ подгруппа $2S_1$ отображается в подгруппу S_1 . Для автоморфизма $\lambda \in \text{Aut}(H_{t_0})$ построим автоморфизм $\lambda' \in \text{Aut}(H)$ следующим образом: для любого элемента $b \in H$ положим $\pi_{t_0}\lambda'b = \lambda\pi_{t_0}b$; $\pi_{t_j}\lambda'b = \pi_{t_j}b$, если $t_j \neq t_0$ (π_{t_j} – проекция группы H на подгруппу H_{t_j}).

Рассмотрим элемент $(s, \omega) \in S$. Пусть $\lambda'(2s) = u$. Тогда $t(u) = t(2s) = t(s) = t_0$. Учитывая, что S_1 – подгруппа группы H_{t_0} , получаем $\lambda'(2s) = \lambda(2s)$ и поэтому $u = \lambda(2s)$.

Так как H_1 – характеристическая подгруппа группы H [8] и $2s \in H_1$, то $u \in H_1$.

H' – нормальная подгруппа голоморфа $\Gamma(H)$ и, значит, $2s \in H'$ (лемма 1).

Имеем $(0, \lambda')(2s, \varepsilon)(0, \lambda')^{-1} = (\lambda'(2s), \varepsilon) = (u, \varepsilon)$. Следовательно, $u \in H'$.

Так как $H' = \mu G$, то существует элемент $g \in G$, такой, что $\mu g = u$. Так как изоморфизм сохраняет типы, то $t(g) = t_0$.

Имеем $g \in G_{t_0}$ (это следует из доказательства леммы 7). Значит $u \in S$, поэтому $u \in S_1$. Этим доказано, что для любого элемента $s \in S_1$ и любого автоморфизма $\lambda \in \text{Aut}(H_{t_0})$ элемент $\lambda(2s) \in S_1$.

Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ – максимальная линейно независимая система элементов в H_{t_0} . Так как $2S_1 \neq 0$, то существует элемент $x \in 2S_1$, $x \neq 0$. Группа H_{t_0} – однородная, поэтому для любого $i \in I$ имеем $t(a_i) = t_0$. Так как $t(x) = t_0$, то существуют числа $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$, такие, что $\chi(m_i a_i) = \chi(n_i x)$.

Группа H_{t_0} – транзитивна, поэтому существует автоморфизм $\varphi \in \text{Aut}(H_{t_0})$, такой, что $\varphi(n_i x) = m_i a_i$. Так как в силу доказанного ранее $\varphi(2S_1) \subset S_1$, то получаем, что для любого $i \in I$ $m_i a_i \in S_1$.

Система $\{m_i a_i\}_{i \in I}$ – линейно независимая система элементов в группе S_1 . Следовательно, $r(S_1) \geq r(H_{t_0})$. Но S_1 – подгруппа группы H_{t_0} , значит, $r(S_1) \leq r(H_{t_0})$. Из этих неравенств вытекает, что $r(S_1) = r(H_{t_0})$.

По построению группы S имеем $r(G_{t_0}) = r(S)$. Применив неравенство (*), получим $r(G_{t_0}) = r(S) \geq r(S_1) = r(H_{t_0})$. Таким образом, доказано, что $r(G_{t_0}) \geq r(H_{t_0})$.

Аналогично доказывается, что $r(H_{t_0}) \geq r(G_{t_0})$.

Сравнивая полученные неравенства, получаем, что $r(G_{t_0}) = r(H_{t_0})$.

Следовательно, группы G и H подобны.

Теорема 10. Пусть $G = \prod_{t \in T_1} G_t$, $H = \prod_{t \in T_2} H_t$, где G_t ($t \in T_1$) и H_t ($t \in T_2$) – од-

нородные вполне разложимые группы и множества T_1 и T_2 состоят из попарно несравнимых типов. Если группы G и H почти голоморфно изоморфны, то они изоморфны.

Доказательство. Пусть A – произвольная однородная вполне разложимая группа; a_1, a_2 – ненулевые элементы группы A и $\chi(a_1) = \chi(a_2)$. Обозначим через $\langle a_1 \rangle^*$ и $\langle a_2 \rangle^*$ сервантные подгруппы, порожденные элементами a_1 и a_2 соответственно. Подгруппы $\langle a_1 \rangle^*$ и $\langle a_2 \rangle^*$ имеют ранг 1 и один и тот же тип. Значит, $\langle a_1 \rangle^* \cong \langle a_2 \rangle^*$. Так как A – однородная сепарабельная группа, то каждая из групп $\langle a_1 \rangle^*$ и $\langle a_2 \rangle^*$ выделяется в ней прямым слагаемым ([6], предложение 87.2), то есть $A = \langle a_1 \rangle^* \oplus A_1$, $A = \langle a_2 \rangle^* \oplus A_2$. Группы A_1 и A_2 – вполне разложимые группы ([6], теорема 86.7), являющиеся однородными группами одного и того же типа и одинакового ранга. Следовательно, $A_1 \cong A_2$.

Понятно, что существует автоморфизм φ группы A , такой, что $\varphi a_1 = a_2$.

Так как любая группа G_t ($t \in T_1$) и любая группа H_t ($t \in T_2$) являются однородными вполне разложимыми группами, то эти группы транзитивны. Следовательно, по теореме 9 группы G и H подобны, то есть $T_1 = T_2$ и для всякого типа $t \in T_1$ $r(G_t) = r(H_t)$. Так как G_t и H_t – однородные вполне разложимые группы одинакового ранга, то $G_t \cong H_t$ для всякого типа $t \in T_1$. Значит, $G \cong H$.

Будем говорить, что группа G определяется в классе $\mathfrak{R}$ своим голоморфом, если для любой группы H из этого класса из голоморфного изоморфизма групп G и H следует изоморфизм самих групп G и H .

Обозначим через $\mathfrak{R}$ – класс групп, состоящий из всех прямых произведений однородных вполне разложимых групп с попарно несравнимыми типами.

Следствие 11. Всякая группа из класса $\mathfrak{R}$ определяется своим голоморфом в этом классе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер И.Х. О голоморфах абелевых групп без кручения // Изв. вузов. Математика. 1974. № 3. С. 3 – 13.
2. Беккер И.Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Математика. 1975. № 3. С. 97 – 99.
3. Беккер И.Х. Определяемость редуцированных абелевых групп без кручения своими относительно голоморфами // Абелевы группы и модули. 1980. С. 3 – 19.
4. Беккер И.Х. Абелевы голоморфные группы // Междунар. конф. «Всесибирские чтения по матем. и мех». Избранные доклады. Т. 1. Математика. 1997. С. 43 – 47.
5. Mills W.H. Multiple holomorphs of finitely generated abelian groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 71. No. 3. P. 379 – 392.
6. Фуке Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.
7. Гриншпон И.Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 9 – 16.
8. Mills W.H. On the non-isomorphism of certain holomorphs // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. P. 428 – 443.

Статья принята в печать 29.05. 2008 г.