

УДК 512.541

М.М. Савинкова

U-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРИМАРНЫЕ ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ ИЗОМОРФНЫЕ СЕБЕ ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ

Исследованиям абелевых групп, не содержащих собственных изоморфных им подгрупп, посвящен ряд работ. В настоящей работе рассматриваются абелевы группы, содержащие собственные изоморфные себе вполне характеристические подгруппы.

Ключевые слова: *вполне характеристические подгруппы, инварианты Ульма – Капланского, U-последовательности.*

В работах, опубликованных ранее, представлены исследования абелевых p -групп, не содержащих собственных изоморфных им подгрупп специального вида. Авторы статьи [1] дают общую конструкцию редуцированных примарных групп без собственных изоморфных подгрупп в виде следующей теоремы.

Теорема 1 [1]. Если K – замкнутая p -группа с конечными ульмовскими инвариантами u_i , если S – собственный плотный подцоколь группы K , такой, что $|K[p]/S| < c$, то S является носителем сервантной подгруппы группы K , которая является группой без собственных изоморфных подгрупп.

В работе [2] рассматриваются I -группы, IP -группы и ID -группы (группы, содержащие изоморфную собственную подгруппу, изоморфную сервантную подгруппу и изоморфное прямое слагаемое соответственно). Показано, например, что если $G = K \oplus D$, где K – редуцированная, D – делимая группы, то G – ID -группа (IP -группа) тогда и только тогда, когда либо K – ID -группа (IP -группа), либо D – ID -группа (IP -группа). Более того, D – ID -группа (IP -группа) тогда и только тогда, когда D имеет бесконечный ранг без кручения или бесконечный p -ранг для некоторого простого числа p .

Статья [3] связана с поиском абелевых p -групп G без ненулевых элементов бесконечной высоты, которые обладают следующим свойством: если H – сервантная плотная подгруппа группы G , которая изоморфна G , то $H = G$.

Авторы статьи [4] рассматривают квази-минимальные группы, т.е. абелевы группы G , которые изоморфны всем своим подгруппам такой же мощности как G . Получен следующий результат.

Теорема 2 [4]. Группа G мощности κ – квазимиимальная тогда и только тогда, когда

- (i) $\kappa < \aleph_0$ или
- (ii) $(\kappa = \aleph_0) \ G = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}(p^\infty)$ или $\bigoplus_{\aleph_0} \mathbf{Z}(p)$, или
- (iii) $(\kappa = \aleph_0) \ G = \bigoplus_{\kappa} \mathbf{Z}$ или $\bigoplus_{\kappa} \mathbf{Z}(p)$.

В настоящей работе рассматриваются абелевы группы, содержащие собственные изоморфные себе вполне характеристические подгруппы.

Пусть G – редуцированная p -группа, σ – порядковое число. Через $p^\sigma G$ обозначается подгруппа группы G , определяемая по индукции: $p^0 G = G$, $p^{\sigma+1} G = p(p^\sigma G)$ и $p^\sigma G = \bigcap_{\rho < \sigma} p^\rho G$, если σ – предельное порядковое число. Наименьшее порядковое

число σ , для которого $p^{\sigma+1} G = p^\sigma G$, называется длиной $\lambda(G)$ группы G , σ -м инвариантом Ульма-Капланского $f_G(\sigma)$ группы G называется кардинальное число, равное рангу фактор-группы $(p^\sigma G)[p]/(p^{\sigma+1} G)[p]$ [5. С. 181 – 182]. Обозначим $\mathbf{Z}_0$ – множество целых неотрицательных чисел. Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ – возрастающая последовательность ординалов и символов ∞ (для любой пары индексов (i, j) , где $i < j$, $\alpha_i < \alpha_j$, если $\alpha_i \neq \infty$, и $\alpha_i = \alpha_j$, если $\alpha_i = \infty$). Если $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, то будем говорить, что последовательность имеет скачок в α_{i+1} . Длиной $\lambda(\alpha)$ последовательности α называется наименьшее число $i \in \mathbf{Z}_0$, такое, что $\alpha_i = \infty$, причем $\lambda(\alpha) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i < \infty$ для всех $i \in \mathbf{Z}_0$ [6. С. 56 – 57].

Определение [6]. Возрастающая последовательность $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ ординалов и символов ∞ называется U -последовательностью для группы G , если для любого $\alpha_i \neq \infty$ имеем $\alpha_i < \lambda(G)$ и всякий раз, когда существует скачок в α_n , α_{n-1} -й инвариант Ульма-Капланского группы G отличен от нуля.

Пусть G – редуцированная p -группа, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ – U -последовательность для группы G . Тогда определим подгруппу $G(\alpha)$, соответствующую данной U -последовательности, следующим образом:

$$G(\alpha) = \{g \in G \mid (h^*(g), h^*(pg), \dots, h^*(p^n g), \dots) \geq \alpha\},$$

где $h^*(g)$ – обобщенная p -высота элемента g . $G(\alpha)$ является вполне характеристической подгруппой группы G . Будем говорить также, что $G(\alpha)$ – вполне характеристическая подгруппа группы G , определяемая U -последовательностью α .

Теорема 3 [6]. Пусть G – неограниченная вполне транзитивная p -группа. Подгруппа S группы G является вполне характеристической тогда и только тогда, когда она имеет вид $S = G(\alpha) = \{g \in G \mid (h^*(g), h^*(pg), \dots, h^*(p^n g), \dots) \geq \alpha\}$, где α – U -последовательность для группы G . Всякая вполне характеристическая подгруппа S представляется в этом виде единственным образом.

Приведем теоремы 4 и 5 из [7], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Теорема 4. Пусть неограниченная p -группа G является прямой суммой циклических групп, $S = G(\alpha)$ – её вполне характеристическая подгруппа, где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ – U -последовательность для группы G и $\lambda(\alpha) = \infty$. Тогда для всех $i \in \mathbf{Z}_0$

$$f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j), \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_i \oplus \dots$, где для любого натурального i G_i – прямая сумма циклических групп порядка p^{i_j} :

$$G_i = \bigoplus_{k \in M_i} \langle g_i^{(k)} \rangle, \quad (o(g_i^{(k)})) = p^{i_j}.$$

Для каждого натурального числа i построим элементы

$$p^{l-i} g_i^{(k)}, \quad \alpha_{i-1} + 1 \leq l \leq \alpha_i, \quad k \in M_i. \quad (2)$$

Так как α – возрастающая последовательность, то для всех $0 \leq j \leq i-1$ имеем $\alpha_{i-1} - (i-1) \geq \alpha_j - j$, откуда $(\alpha_{i-1} + 1) - i + j \geq \alpha_j$. Тогда для всех $\alpha_{i-1} + 1 \leq l \leq \alpha_i$ выполняется $l - i + j \geq \alpha_j$, т.е. для любого элемента a вида (2) $h^*(p^j a) \geq \alpha_j$. Так как

порядок любого элемента a вида (2) равен p^i , то для всех $j \geq i$ $p^j a = 0$, откуда $h^*(p^j a) \geq \infty > \alpha_j$. Этим доказано, что для любого натурального i все элементы вида (2) принадлежат $S = G(\alpha)$.

Беря прямую сумму циклических групп, образующими которых служат все элементы вида (2), получаем группу $\bar{S}$. Покажем, что $\bar{S} = S$. Допустим, что существует такой элемент $g \in S$, что $g \notin \bar{S}$; $g = \sum_{j=0}^{l_1} m_j p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}$, где $(m_j, p) = 1$, $k_j \in M_{n_j}$ для всех $0 \leq j \leq l_1$. Так как $g \notin \bar{S}$, то существует такое $0 \leq j \leq l_1$, что $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin S$. Возможны два случая.

1. Пусть $n_j \leq \alpha_0$. Тогда $h^*(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) < \alpha_0$, откуда $h^*(g) < \alpha_0$, а это противоречит тому, что $g \in S$.

2. Пусть $\alpha_0 < n_j$. Тогда существует такое натуральное i , что $\alpha_{i-1} + 1 \leq n_j \leq \alpha_i$. Так как $p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)} \notin \bar{S}$, то $r_j < n_j - i$, откуда $o(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) > p^i$, т.е. $p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)}) \neq 0$. Следовательно, $h^*(p^i g) \leq h^*(p^i(p^{r_j} g_{n_j}^{(k_j)})) = i + r_j < n_j \leq \alpha_i$, а это противоречит тому, что $g \in S$.

В обоих случаях получено противоречие. Следовательно, $\bar{S} = S$. Если p -группа является прямой суммой циклических групп, то i -й инвариант Ульма – Капланского этой p -группы ($i \in \mathbf{Z}_0$) равен мощности множества всех циклических прямых слагаемых порядка p^{i+1} . Тогда, исходя из построения группы $\bar{S}$, получаем, что инварианты Ульма – Капланского группы S удовлетворяют равенствам (1). ■

Теорема 5. Пусть $S = G(\alpha)$ – неограниченная вполне характеристическая подгруппа редуцированной сепарабельной p -группы G , где $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$ – U -последовательность для группы G . Тогда для всех $i \in \mathbf{Z}_0$

$$f_S(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j), \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \quad (3)$$

Доказательство. Так как группа $G(\alpha)$ неограниченная, то $\lambda(\alpha) = \infty$. Обозначим через B некоторую базисную подгруппу группы G . Тогда для любого $i \in \mathbf{Z}_0$ [5. С. 186]

$$f_G(i) = f_B(i). \quad (4)$$

Таким образом, α является U -последовательностью для группы B . Подгруппа $B(\alpha)$ группы B является базисной подгруппой группы $G(\alpha)$. Следовательно, для любого $i \in \mathbf{Z}_0$

$$f_{G(\alpha)}(i) = f_{B(\alpha)}(i). \quad (5)$$

Группа B – прямая сумма циклических групп, следовательно, по теореме 5

$$f_{B(\alpha)}(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_B(\alpha_i + j), \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \quad (6)$$

Учитывая (4), (5) и (6) получаем, что для всех $i \in \mathbf{Z}_0$ имеет место равенство (3). ■

Теперь исследуем p -группы некоторых классов, которые имеют вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Теорема 6. Пусть G – неограниченная вполне транзитивная p -группа, S – вполне характеристическая подгруппа группы G , определяемая U -последовательностью α , где $\lambda(\alpha) = \infty$ и пусть $G \cong S$. Тогда

1) если последовательность α для некоторого i имеет скачок в α_{i+1} , то $f_G(i) \neq 0$ и $f_G(i) \geq f_G(\alpha_i)$;

2) если в α_{i+1} скачка нет, то $f_G(i) = f_G(\alpha_i)$.

Доказательство. Вполне характеристическая подгруппа группы G , определяемая U -последовательностью α , имеет вид $S = G(\alpha)$. Так как $f_G(i) = f_{G(\alpha)}(i)$, то для всякого $i \in \mathbb{Z}_0$ по теореме 5

$$f_S(i) = f_{G(\alpha)}(i) = \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j), \quad k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i. \quad (7)$$

Или так как $f_G(i) = f_{G(\alpha)}(i)$, то

$$\begin{aligned} f_G(i) &= \sum_{j=0}^{k_i} f_G(\alpha_i + j) = f_G(\alpha_i) + f_G(\alpha_i + 1) + \dots + f_G(\alpha_i + \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i) = \\ &= f_G(\alpha_i) + f_G(\alpha_i + 1) + \dots + f_G(\alpha_{i+1} - 1). \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

1) Если $\alpha_i + 1 < \alpha_{i+1}$, то последовательность α имеет скачок в α_{i+1} и, следовательно, по определению U -последовательности $f_G(\alpha_i) \neq 0$. Тогда из равенства (8) получаем

$$f_G(i) \neq 0 \text{ и } f_G(i) \geq f_G(\alpha_i).$$

2) Если в α_{i+1} скачка нет, то $\alpha_i + 1 = \alpha_{i+1}$ и $k_i = \alpha_{i+1} - 1 - \alpha_i = 0$. Тогда получаем из формулы (7)

$$f_G(i) = f_G(\alpha_i). \blacksquare$$

Пусть W_0 – множество возрастающих последовательностей целых неотрицательных чисел и символов ∞ , начинающихся с нуля.

Теорема 7. Пусть $\alpha \in W_0$, $\lambda(\alpha) = \infty$. Пусть G – редуцированная сепарабельная p -группа, $S = G(\alpha)$ – ее вполне характеристическая подгруппа и $G \cong S$. Тогда если α имеет хотя бы один скачок, то G – ограниченная группа.

Доказательство. Предположим, что G – неограниченная группа и α имеет хотя бы один скачок. Пусть α имеет первый скачок в α_{t+1} . Тогда

$$\alpha = (0, \dots, t, t+2+n_1, t+3+n_2, \dots, t+m+1+n_m, \dots),$$

где $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots$

Так как $G \cong G(\alpha)$, то $f_G(i) = f_{G(\alpha)}(i)$ для всех $i \in \mathbb{Z}_0$. По теореме 3

$$f_G(0) = f_{G(\alpha)}(0) = \sum_{j=0}^{k_0} f_G(\alpha_0 + j), \quad k_0 = \alpha_1 - 1 - \alpha_0 = 1 - 1 - 0 = 0,$$

следовательно,

$$f_G(0) = f_{G(\alpha)}(0).$$

Аналогично

$$f_G(1) = f_{G(\alpha)}(1),$$

...

$$f_G(t-1) = f_{G(\alpha)}(t-1).$$

Найдем $f_G(t)$:

$$f_G(t) = f_{G(\alpha)}(t) = \sum_{j=0}^{k_t} f_G(\alpha_t + j), \quad k_t = \alpha_{t+1} - 1 - \alpha_t = t + 2 + n_1 - 1 - t = 1 + n_1,$$

т.е.

$$f_G(t) = f_G(t) + f_G(t+1) + \dots + f_G(t+1+n_1); \quad (9)$$

$$f_G(t+1) = f_G(t+2+n_1) + f_G(t+3+n_1) + \dots + f_G(t+2+n_2), \quad (10)$$

...

Из (9) следует, что $f_G(t+1) + \dots + f_G(t+1+n_1) = 0$ и, значит,

$$f_G(t+1) = f_G(t+2) = \dots = f_G(t+1+n_1).$$

Подставляя в следующее равенство $f_G(t+1) = 0$, получим, что

$$f_G(t+2+n_1) = f_G(t+3+n_1) = \dots = f_G(t+2+n_2) = 0.$$

Покажем, что $f_G(t+m) = 0$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Допустим, что $f_G(t+i) = 0$ для всех $1 \leq i \leq m$. Покажем, что $f_G(t+m+1) = 0$. Получим

$$f_G(0) = f_{G(\alpha)}(0),$$

$$f_G(1) = f_{G(\alpha)}(1),$$

...

$$f_G(t) = f_{G(\alpha)}(t),$$

$$0 = f_G(t+2+n_1) + f_G(t+3+n_1) + \dots + f_G(t+2+n_2),$$

...

$$0 = f_G(t+m+1+n_m) + f_G(t+m+2+n_m) + \dots + f_G(t+m+1+n_{m+1}),$$

...

$f_G(t+m+1)$ входит в правую часть некоторого вышеуказанного равенства, имеющего нулевую левую часть, следовательно, $f_G(t+m+1) = 0$. Таким образом, $f_G(t+m) = 0$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, а это противоречит тому, что G – неограниченная. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill P., Megibben Ch. On primary groups with countable basic subgroups. // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 124. No. 1. P. 49 – 59.
2. Beaumont R.A., Pierce R.S. Isomorphic direct summands of abelian groups. // Math. Annalen. 1964. V. 153. P. 21 – 37.
3. Monk G.S. Abelian p -groups without proper isomorphic pure dense subgroups. // Ill. J. Math. 1970. V. 14. No. 1. P. 164 – 177.
4. Goldsmith B., Ohogain S., Wallutis S. Quasi-minimal groups // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132. No. 8. P. 2185 – 2195.
5. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974. 335 с.
6. Kaplansky I. Infinite Abelian groups. Michigan: Ann. Arbor., Univ. Michigan Press, 1968. 91 p.
7. Шерстнева А.И. Почти изоморфные абелевы группы и аналог теоремы Кантора – Шредера – Бернштейна: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Томск: Том. гос. ун-т, 2002. – 94 с.

Статья принята в печать 16.06.2008 г.