

УДК 515.122

Т.Е. Хмылёва

ОБОБЩЕНИЕ УДВОЕНИЯ ПО АЛЕКСАНДРОВУ ПРЯМОЙ ЗОРГЕНФРЕЯ И МНОЖЕСТВА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В данной работе рассматривается обобщение известного в топологии пространства «двойная окружность Александрова». Доказано, что при различных натуральных n и m пространства $X \otimes n$ и $X \otimes m$ не являются гомеоморфными, если X – прямая Зоргенфрея, и являются гомеоморфными, если X – множество рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Ключевые слова: удвоение по Александрову, прямая Зоргенфрея.

Пусть X – хаусдорфово топологическое пространство. Символом $X \otimes n$ будем обозначать множество $X \times \{0,1,\dots,n-1\}$, наделенное следующей топологией: объявим базой топологии одноточечные множества $\{(x,k)\}$ для любого $x \in X$ и $k = 1,\dots,n-1$ и множества $U \times \{0,1,\dots,n-1\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} \{(x,k)\}$ для любого открытого множества $U \subset X$ и любого $x \in U$.

Пространство $X \otimes n$ является обобщением хорошо известного примера «двойная окружность Александрова».

В работе [1] доказано, что для несчетного метрического компакта X пространства $X \otimes n$ и $X \otimes m$ негомеоморфны, если $n \neq m$. Тем же способом, что и в [1] можно показать, что если пространство X содержит несчетный метрический компакт, то пространства $X \otimes n$ и $X \otimes m$ при $n \neq m$ негомеоморфны. В данной работе мы рассматриваем пространство $X \otimes n$ при $X = K$, где K – прямая Зоргенфрея и $X = Q$, где Q – множество рациональных точек интервала $[0,1]$.

Напомним, что прямая Зоргенфрея K – это множество вещественных чисел с базой окрестностей в точке $x \in K$: $B(x) = \{[x,r), x, r \in K, x < r, r \in Q\}$. Отличительным свойством прямой Зоргенфрея от вещественной прямой является тот факт, что все компактные множества в K не более чем счётны [2]. Но как и для вещественной прямой, оказалось, что пространства $K \otimes n$ и $K \otimes m$ не являются гомеоморфными при $n \neq m$ (теорема 3). Для множества рациональных точек $Q \in [0,1]$, в котором компакты также не более чем счётны, мы докажем гомеоморфность пространств $Q \otimes n$ и $Q \otimes m$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. Пусть $[0,1)$ – отрезок прямой Зоргенфрея, $X = [0,1) \times \{0,1,2\}$, $Y = [0,1) \times \{0,1\}$. Тогда пространства X и Y негомеоморфны.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного: предположим, что существует гомеоморфизм $\varphi: X \rightarrow Y$. Каждой неизолированной точке $(x,0) \in X$ при отображении φ соответствует неизолированная точка $(y,0) \in Y$. Изолированные точки $(x,1)$ и $(x,2) \in X$ переходят в изолированные точки пространства Y , то есть $\varphi(x,1) = (y',1)$, а $\varphi(x,2) = (y'',1)$. Так как $y' \neq y''$, то либо $y' \neq y$, либо $y'' \neq y$. Определим множества

$$A = \{x \in [0,1) : |y' - y| \neq 0\},$$

$$B = \{x \in [0,1) : |y'' - y| \neq 0\}.$$

Так как $A \cup B = [0,1)$, то хотя бы одно из множеств A или B является несчётным. Не нарушая общности, можно считать, что это множество A . Для любого натурального $l \in \mathbb{N}$ положим $A_l = \left\{x \in A : |y' - y| \in \left[\frac{1}{l+1}, \frac{1}{l}\right)\right\}$. Ясно, что $\bigcup_{l=1}^{\infty} A_l = A$ и, в силу несчетности множества A , найдется такое $l_0 \in \mathbb{N}$, что множество A_{l_0} несчётно.

Покажем теперь, что существует точка $x_0 \in A_{l_0}$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ $(x_0, x_0 + \varepsilon) \cap A_{l_0} \neq \emptyset$. Действительно, если это не так, то для любого $x \in A_{l_0}$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое, что $(x, x + \varepsilon_x) \cap A_{l_0} = \emptyset$.

Рассмотрим точки $x, x_1 \in A_{l_0}$, $x < x_1$. Тогда $x_1 \notin (x, x + \varepsilon_x)$ и, значит, $x_1 \geq x + \varepsilon_x$. Следовательно, $(x, x + \varepsilon_x) \cap [x_1, x_1 + \varepsilon_{x_1}) = \emptyset$. Так как множество A_{l_0} несчётно, то мы получаем несчётное семейство попарно непересекающихся полуинтервалов $\{(x, x + \varepsilon)\}_{x \in A_{l_0}}$ на отрезке $[0,1)$. Но это противоречит сепарабельности отрезка $[0,1)$.

Итак, существует точка $x_0 \in A_{l_0}$, такая, что $(x_0, x_0 + \varepsilon) \cap A_{l_0} \neq \emptyset$ для любого $\varepsilon > 0$. Это означает, что мы можем найти последовательность $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, $x_n \in A_{l_0}$, $x_n \neq x_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, которая сходится справа к точке $x_0 \in A_{l_0}$. Это означает, что для каждого $i = 0, 1, 2$ последовательность $\{(x_n, i)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке $(x_0, 0)$ в пространстве X .

Пусть $\varphi(x_n, 0) = (y_n, 0)$, $\varphi(x_n, 1) = (y'_n, 1)$, $\varphi(x_n, 2) = (y''_n, 1)$. В силу непрерывности отображения $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, 0) = \varphi(x_0, 0) = (y_0, 0)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} (y'_n, 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, 1) = \varphi(x_0, 0) = (y_0, 0)$. Рассмотрим окрестность точки

$(y_0, 0) \in Y$ $V = \left[y_0, y_0 + \frac{1}{4l_0}\right) \times \{0\} \cup \left[y_0, y_0 + \frac{1}{4l_0}\right) \times \{1\}$. Так как отображение φ не-

прерывно, найдется окрестность $U(x_0, 0) \subset X$, такая, что $\varphi(U) \subset V$. Поскольку последовательность (x_n, i) сходится к точке $(x_0, 0)$ для $i = 0, 1, 2$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при $n > n_0$ $(x_n, i) \in U(x_0, 0)$. Следовательно, $\varphi(x_n, i) \in V(y_0, 0)$ при $i = 0, 1, 2$, и $n > n_0$ и, значит $(y_n, 0) \in V(y_0, 0)$, $(y'_n, 1) \in V(y_0, 0)$, $(y''_n, 1) \in V(y_0, 0)$ при $n > n_0$.

Отсюда получаем, что $\frac{1}{l_0} \leq |y'_n - y_n| \leq |y'_n - y_0| + |y_0 - y_n| \leq \frac{1}{4l_0} + \frac{1}{4l_0} = \frac{1}{2l_0}$. Полу-

ченное противоречие опровергает наше предположение о существовании гомеоморфизма φ .

Теорема 2. Пусть $[0,1)$ – отрезок прямой Зоргенфрея. Тогда пространства $X = [0,1) \otimes n$ и $Y = [0,1) \otimes m$ негомеоморфны при $n \neq m$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 3. Пусть K – прямая Зоргенфрея. Тогда пространства $K \otimes n$ и $K \otimes m$ при $n \neq m$ негомеоморфны.

Для доказательства достаточно заметить, что прямая Зоргенфрея гомеоморфна своему отрезку $[0,1) \subset K$, и воспользоваться теоремой 2.

Теорема 4. Пусть Q – множество рациональных точек отрезка $[0,1]$, $X = Q \times \{0,1,2\}$, $Y = Q \times \{0,1\}$. Тогда пространства X и Y гомеоморфны.

Доказательство. Занумеруем точки множества Q : $Q = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$ и определим отображение $f: X \rightarrow Y$ по индукции

$$f(r_1, 0) = (r_1, 0) \in Y,$$

$$f(r_1, 1) = (r_1, 1) \in Y,$$

$$f(r_1, 2) = (q_2, 1) \in Y,$$

где точка q_2 выбрана таким образом, что $0 < |q_2 - r_1| < \frac{1}{2}$.

Предположим теперь, что для точек (r_k, i) при $k \leq n$, $i = 0, 1, 2$ отображение f определено так, что выполнены следующие условия

$$f(r_k, 0) = (r_k, 0) \in Y,$$

$$f(r_k, 1) = (q_{2k-1}, 1) \in Y,$$

$$f(r_k, 2) = (q_{2k}, 1) \in Y,$$

причем точки q_{2k-1} и q_{2k} являются точками с минимальным номером, удовлетворяющие условию

$$|r_k - q_{2k-1}| < \frac{1}{2^k} \text{ и } |r_k - q_{2k}| < \frac{1}{2^k}.$$

Заметим, что если точка $r_k \notin \{r_1, q_2, q_3, \dots, q_{2k-2}\}$, то $q_{2k-1} = r_k$.

Положим $A_n = \{r_1, q_2, q_3, \dots, q_{2n-1}, q_{2n}\}$ и определим f для точек (r_{n+1}, i) , $i = 0, 1, 2$:

$$f(r_{n+1}, 0) = (r_{n+1}, 0),$$

$$f(r_{n+1}, 1) = (q_{2n+1}, 1),$$

$$f(r_{n+1}, 2) = (q_{2n}, 1),$$

где точки q_{2n-1} и q_{2n} – точки с наименьшим номером, удовлетворяющие неравенствам

$$|q_{2n+1} - r_{n+1}| < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad |q_{2n+2} - r_{n+1}| < \frac{1}{2^{n+1}} \text{ и } q_{2n+1} \in A_n, \quad q_{2n+2} \in A_n.$$

Такой выбор всегда возможен, так как в любой окрестности точки r_n содержится бесконечно много рациональных точек. Построенное отображение f – биективно по построению.

Докажем непрерывность отображения f в фиксированной точке $(r_n, 0) \in X$. В точках $(r_n, 1)$ и $(r_n, 2)$ функция f непрерывна, так как эти точки являются изолированными. По определению отображения f , $f(r_n, 0) = (r_n, 0) \in Y$. Пусть $V(r_n, 0)$ – окрестность точки $(r_n, 0) \in Y$:

$$V(r_n, 0) = ((r_n - \varepsilon, r_n + \varepsilon) \times \{0\}) \cup ((r_n - \varepsilon, r_n + \varepsilon) \times \{1\}) \setminus (r_n, 1).$$

Выберем число $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ так, чтобы

$$\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta < \frac{\varepsilon}{3}$$

и интервал $(r_n - \delta, r_n + \delta)$ не содержал точек $r_1, r_2, \dots, r_{n-1}, r_{n+1}, \dots, r_m$.

Положим

$$U(r_n, 0) = ((r_n - \delta, r_n + \delta) \times \{0, 1, 2\}) \setminus \{(r_n, 1), (r_n, 2)\}$$

и пусть точка $(r_k, l) \in U(r_n, 0)$.

Если $l = 0$, то $f(r_k, 0) = (r_k, 0) \in V$. Если $l = 1$ или $l = 2$, то из условия $(r_k, l) \in U(r_n, 0)$ следует, что $k > m$ и $|r_k - r_n| < \delta$. Отсюда получаем

$$|q_{2k-1} - r_k| < \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |q_{2k-1} - r_n| < |q_{2k-1} - r_k| + |r_k - r_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \delta < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Следовательно, точка $f(r_k, 1) = (q_{2k-1}, 1) \in V$. Аналогично получаем, что $f(r_k, 2) = (q_{2k}, 1) \in V$. Таким образом, $f(U) \subset V$ и непрерывность отображения f доказана.

Покажем непрерывность отображения f^{-1} . Пусть $U(r_n, 0)$ – окрестность точки $(r_n, 0) \in X$, $U(r_n, 0) = ((r_n - \varepsilon, r_n + \varepsilon) \times \{0, 1, 2\}) \setminus \{(r_n, 1), (r_n, 2)\}$. Докажем, что существует окрестность $V(r_n, 0) \subset Y$, такая, что $f^{-1}(V) \subset U$. Выберем число $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $m > n$, $\frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{3}$, $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ и окрестность точки $(r_n, 0) \in Y$ $V(r_n, 0) = ((r_n - \delta, r_n + \delta) \times \{0, 1\}) \setminus \{(r_n, 1)\}$ не содержала точек $f(r_j, 1)$ и $f(r_j, 2)$ для $j = 1, 2, \dots, m$.

Пусть точка $(r_k, 0) \in X$, $(r_k, 0) \notin U$. Если $i = 0$, то ясно, что $f^{-1}(r_k, 0) = (r_k, 0) \notin V$, так как $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$. Если же $i \in \{1, 2\}$, то условие $(r_k, i) \notin U$ означает, что либо $(r_k, i) = (r_n, i)$, либо $r_k \notin (r_n - \varepsilon, r_n + \varepsilon)$.

Если $k \leq m$, то по определению окрестности $V(r_n, 0)$, $f(r_k, 0) \notin V$, в частности $f(r_k, i) \notin V$.

Если же $k > m$ и $r_k \geq r_n + \varepsilon$, то

$$r_k - \frac{1}{2^k} \geq r_n + \varepsilon - \frac{1}{2^k} > r_n + \varepsilon - \frac{1}{2^m} > r_n + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} < r_n + \delta,$$

то есть

$$\left(\left(r_k - \frac{1}{2^k}, r_k + \frac{1}{2^k} \right) \times \{1\} \right) \cap V = \emptyset.$$

Но по определению отображения f

$$f(r_k, i) \in \left(r_k - \frac{1}{2^k}, r_k + \frac{1}{2^k} \right) \times \{1\}$$

и, значит, $f(r_k, i) \notin V$.

Если $k > m$ и $r_k \leq r_n - \varepsilon$, то

$$r_k + \frac{1}{2^k} \leq r_n - \varepsilon + \frac{1}{2^k} < r_n - \varepsilon + \frac{1}{2^m} < r_n - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} < r_n - \delta$$

и, значит,
$$\left(\left(r_k - \frac{1}{2^k}, r_k + \frac{1}{2^k} \right) \times \{1\} \right) \cap V = \emptyset.$$

Следовательно, и в этом случае, $f(r_k, i) \notin V$.

Таким образом, мы показали, что $V \subset f(U)$, что равносильно условию $f^{-1}(V) \subset U$. Это доказывает непрерывность отображения f . Теорема доказана.

Следствие 5. Если Q – множество рациональных точек на отрезке $[0, 1]$ и $n, m \in \mathbb{N}$, то пространства $Q \otimes n$ и $Q \otimes m$ гомеоморфны.

Заметим, что счетность множества рациональных чисел не является необходимым условием гомеоморфности пространств $X \otimes n$ и $X \otimes m$. Нетрудно доказать, например, что для произвольного отрезка ординалов $[1, \alpha]$ пространства $[1, \alpha] \otimes n$ и $[1, \alpha] \otimes m$ гомеоморфны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гензе Л.В., Хмылева Т.Е. Удвоение по Александру и его обобщения // Вестник ТГУ. 2003. № 280.
2. Энгелькинг Р. Общая топология: Пер. с англ. М.: Мир, 1986.

Статья принята в печать 25.06.2008 г.