

УДК 517.54

А.Н. Малютина, М.А. Елизарова

ТЕОРЕМЫ О ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТИ СНИЗУ ОТОБРАЖЕНИЙ
С S -УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ¹

В настоящей работе исследуются свойства отображений с s -усредненной характеристикой. Доказано, что отображения с s -усредненной характеристикой являются полунепрерывными снизу.

Ключевые слова: пространственные отображения, отображения с s -усредненной характеристикой, полунепрерывность снизу.

Одними из главных направлений в современной теории однолистных отображений являются задача об экстремумах различных непрерывных функционалов, задача об определении множества значений, принимаемых непрерывным комплексным функционалом на классе однолистных функций. Куфаревым П.П., профессором ТГУ, выполнены работы, в которых на двусвязные области обобщаются уравнение Левнера и вариационная формула Голузина Г.М. [1].

Наряду с интенсивно развивающейся теорией комплексного переменного и ее приложений в механике, с 30-х годов XX века начала развиваться теория пространственных отображений. С 1969 года начались глубокие исследования более общих отображений – отображений с ограниченным искажением [2] и квазирегулярных отображений [3].

В данной работе исследуется класс отображений, обобщающих квазирегулярные отображения.

Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$ и отображение $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное. Якобиан отображения $J(x, f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x, f) > 0$).

Определение 1. Отображение f называется отображением с $K_{0,s}$ -усредненной характеристикой, если

$$1) f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D);$$

2) Существует постоянная $K_{0,s} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{0,s}(f) = \left(\int_D K_0^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{0,s}. \quad (1)$$

Определение 2. Отображение f называется отображением с $K_{0,s}^*$ -усредненной характеристикой, если

$$1) f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D);$$

2) Существует постоянная $K_{0,s}^* \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{0,s}^*(f) = \left(\int_D K_0^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{0,s}^*. \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Госконтракт П 937 от 20 августа 2009 года. Тема «Локализации модулей и колец, проблемы классификации».

Определение 3. Отображение f называется отображением с $K_{i,s}$ -усредненной характеристикой, если

- 1) $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$;
- 2) Существует постоянная $K_{i,s} \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{i,s}(f) = \left(\int_D K_i^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{i,s}. \quad (3)$$

Определение 4. Отображение f называется отображением с $K_{i,s}^*$ -усредненной характеристикой, если

- 1) $f \in \tilde{W}_{n,loc}^1(D)$;
- 2) Существует постоянная $K_{i,s}^* \geq 0$, такая, что выполняется неравенство

$$K_{i,s}^*(f) = \left(\int_D K_i^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{i,s}^*. \quad (4)$$

Определение 5. Отображение f называется отображением с $(s, s^*)_o$ -усредненной характеристикой, если оно является отображением с $K_{o,s}$ - и $K_{o,s}^*$ -усредненными характеристиками.

Определение 6. Отображение f называется отображением с $(s, s^*)_i$ -усредненной характеристикой, если оно является отображением с $K_{i,s}$ - и $K_{i,s}^*$ -усредненными характеристиками, где $K_o(x, f)$ – внешняя дилатация отображения f , $K_i(x, f)$ – внутренняя дилатация отображения f [2], $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$.

Замечание 1. В силу неравенства $K_i(x, f) \leq K_o(x, f)$, а также других неравенств, связывающих между собой внешнюю и внутреннюю дилатации отображения f [4], отображения в определениях 5, 6 также называют отображениями с s -усредненной характеристикой.

Пусть $D, D^* \subset \mathbf{R}^n$ ограниченные области, $n \geq 3$. Пусть f – отображение с s -усредненной характеристикой. Известно, что характеристики отображения f удовлетворяют следующим неравенствам [4]:

$$K_o(x, f) \leq n^{n/2} \lambda(x, f) \leq n^{n/2} K_o(x, f), \quad (5)$$

$$\lambda(x, f) = n^{-n/2} |\nabla f(x)|^n |J(x, f)|^{-1}. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть $D_m \subset D^*$, $m = 0, 1, 2, \dots$, – ограниченные области, $|D^*| \leq R < \infty$. Пусть $f_m: D \rightarrow D_m$ – последовательность отображений с s -усредненной характеристикой, $s > (n-1)^{-1}$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f , $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Тогда

$$K_{o,s}(f) = \left(\int_D K_o^s(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} Q_s(f_m). \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим характеристику отображения f . Для каждого номера m , $m=0,1,2,\dots$, согласно (1), имеем

$$K_{0,s}(f_m) = \left(\int_D K_0^s(x, f_m) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq K_{0,s}. \quad (8).$$

Применяя к интегралу в (8) неравенство Гельдера и оценку (6), получаем, что

$$\begin{aligned} \int_D K_0^s(x, f_m) d\sigma_x &\leq \int_D n^{ns/2} \lambda^s(x, f_m) d\sigma_x = \\ &= n^{ns/2} \int_D \frac{n^{-ns/2} |\nabla f_m|^{sn}}{|J(x, f_m)|^s} d\sigma_x = \int_D |\nabla f_m|^{sn} |J(x, f_m)|^{-s} d\sigma_x \leq \\ &\leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{sn/(s+1)} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)|^{-s(-1/s)} d\sigma_x \right)^{-s} \leq \\ &\leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{sn/(s+1)} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{-s}. \end{aligned}$$

В силу ограниченности $D_m \subset D^*$, $m=0,1,2,\dots$, имеем

$$\int_D K_0^s(x, f_m) d\sigma_x \leq \left(\int_D |\nabla f_m|^{sn/(s+1)} d\sigma_x \right)^{s+1} \cdot R^{-s}.$$

Следовательно, для каждого m , $m=0,1,2,\dots$, имеет место следующая оценка:

$$\left(\int_D |\nabla f_m|^{sn/(n+1)} d\sigma_x \right)^{s+1} \geq R^{-s} \int_D K_0^s(x, f_m) d\sigma_x = R^{-s} K_{0,s}^s(f_m). \quad (9)$$

Обозначим $d = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{0,s}(f_m)$. Из общей последовательности отображений выберем подпоследовательность $\{f_m\}$ такую, что $K_{0,s}(f_m) \rightarrow d$ при $m \rightarrow \infty$. Однако в силу справедливости: оценки следующей из

$$\int_D K_0^s(x, f_m) d\sigma_x \leq K_{0,s}^s, \quad (8)$$

равномерной сходимости f_m к непрерывной функции f внутри D и неравенства (9), из последовательности $\{f_m\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая сходится сильно в $L_p(D)$, слабо в $W_p^1(D)$, $p = sn(s+1)^{-1}$ (по теореме вложения Соболева [5]); последовательность характеристик $K_m = K_0^s(x, f_m)$ слабо сходится в $L_1(D)$ к некоторой функции $K(x)$ и якобиан $J(x, f_m)$ сходится слабо в $L_1(D)$ к $J(x, f)$ (по лемме 6 [6]). Таким образом, предельное отображение $f \in W_p^1(D)$.

Возьмем теперь шар $B(x, r)$ в $\mathbf{R}^n$ с центром в точке x и радиусом r , $x \in D$ — произвольная точка области D и r , такое, что $B(x, r) \subset D$.

Из теоремы Казиминова о полунепрерывности интегралов вариационного исчисления [7] следует, что

$$\int_{B(x,r)} |\nabla f|^p d\sigma_x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} |\nabla f_m|^p d\sigma_x.$$

В силу слабой сходимости K_m к $K(x)$, $J(x, f_m)$ к $J(x, f)$ и неравенств (5), (9), (10) получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} |\nabla f|^p d\sigma_x &\leq \int_{B(x,r)} |\nabla f|^{sn/(s+1)} d\sigma_x = \int_{B(x,r)} |\nabla f|^{\frac{s}{s+1}} d\sigma_x = \\ &= \int_{B(x,r)} n^{\frac{ns}{2(s+1)}} \lambda(x, f)^{\frac{s}{s+1}} |J(x, f)|^{\frac{s}{s+1}} d\sigma_x \leq \\ &\leq n^{\frac{ns}{2(s+1)}} \left(\int_{B(x,r)} \left[\lambda(x, f)^{\frac{s}{s+1}} \right]^{s+1} d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}} \leq \\ &\leq n^{\frac{p}{2} + \frac{n}{2}} \left(\int_{B(x,r)} K_o^s(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\int_{B(x,r)} |\nabla f|^p d\sigma_x \leq n^{\frac{p+n}{2}} \left(\int_{B(x,r)} K_o^s(x, f) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s+1}} \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s+1}}. \quad (11)$$

Переходя в (11) к пределу при $r \rightarrow 0$ по теореме Лебега, получаем, что для почти всех $x \in D$ справедливо

$$|\nabla f|^p \leq n^{\frac{p}{2} + \frac{n}{2}} K(x)^{\frac{1}{s+1}} \cdot |J(x, f)|^{\frac{s}{s+1}}. \quad (12)$$

Возведем обе части (12) в степень $s+1$ и разделим на $|J(x, f)|^s > 0$. Тогда

$$\left(\frac{|\nabla f|}{|J(x, f_m)|} \right)^s \leq K(x) \cdot n^{\frac{n}{2}}$$

и, в силу (1), имеем $K_o^s(x, f) \leq n^{\frac{n}{2}} K(x)$.

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $D_m \subset D^*$, $m = 0, 1, 2, \dots$, – ограниченные области, $|D^*| \leq R < \infty$. Пусть $f_m: D \rightarrow D_m$ – последовательность отображений с s -усредненной характеристикой, $s \geq 1$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f , $f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Тогда $f \in W_n^1(D)$,

$$K_{o,s}^*(f) = \left(\int_D K_o^s(x, f) J(x, f) d\sigma_x \right)^{1/s} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} K_{o,s}^*(f_m). \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $s > 1$. Воспользуемся неравенствами (6), (2) и неравенством Гельдера. В силу ограниченности $D_m \subset D^*$, $m = 0, 1, 2, \dots$, получаем сле-

дующую оценку:

$$\begin{aligned}
 \int_D |\nabla f|^n d\sigma_x &= \int_D |\nabla f|^n |J(x, f_m)|^{(1-s)/s} |J(x, f_m)|^{-(1-s)/s} d\sigma_x \leq \\
 &\leq \left(\int_D |\nabla f|^{ns} |J(x, f_m)|^{(1-s)} d\sigma_x \right)^{1/s} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{(s-1)/s} = \\
 &= \left(\int_D [|\nabla f|^n |J(x, f_m)|^{-1}]^s |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{1/s} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{(s-1)/s} = \\
 &= n^{\frac{ns}{2}} \left(\int_D \lambda(x, f_m)^s d\sigma_x \right)^{1/s} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{(s-1)/s} \leq \\
 &\leq n^{\frac{ns}{2}} \left(\int_D K_0^s(x, f_m) |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{1/s} \cdot \left(\int_D |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{(s-1)/s} \leq \\
 &\leq n^{\frac{ns}{2}} K_{0,s}^* R^{(s-1)/s} = M < \infty.
 \end{aligned}$$

Таким образом выполнено соотношение

$$\int_D |\nabla f|^n d\sigma_x \leq M. \quad (14)$$

Обозначим $d = \lim_{m \rightarrow \infty} K_{0,s}^*(f_m)$. Из общей последовательности отображений вы-

берем подпоследовательность $\{f_m\}$, такую, что

а) $\lim_{m \rightarrow \infty} K_{0,s}^*(f_m) = d$;

б) подпоследовательность $\{f_m\}$ слабо сходится в $W_n^1(D)$, сильно в $L_n(D)$, почти всюду в D к некоторой функции $\tilde{f} \in W_n^1(D)$;

в) последовательность характеристик, $K_m^*(x) = K_0^s(x, f_m) |J(x, f_m)|$, слабо сходится в $L_1(D)$ к некоторой функции $K^*(x) \in L_1(D)$;

г) последовательность $J(x, f_m)$ сходится слабо в $L_1(D)$ к $J(x, f)$.

Ясно, что $\tilde{f}(x) = f(x)$. Выполнение условий (а) – (г) следует из условия теоремы и оценки (14).

Теперь пусть $r > 0$, такое, что шар $B(x, r)$ с центром в точке x и радиусом r целиком лежит в D .

Из работы [7] следует, что

$$\int_{B(x,r)} |\nabla f|^n d\sigma_x \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} |\nabla f_m|^n d\sigma_x.$$

Отсюда для выбранной подпоследовательности $\{f_m\}$, применяя неравенство Гельдера, неравенство (6), п. в), г), получаем, что

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} |\nabla f|^n d\sigma_x &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} |\nabla f_m|^n d\sigma_x = \\
&= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{B(x,r)} |\nabla f_m|^n |J(x,f)|^{\frac{1-s}{s}} |J(x,f_m)|^{\frac{s-1}{s}} d\sigma_x \leq \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{B(x,r)} |\nabla f_m|^{ns} |J(x,f_m)|^{1-s} d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x,f_m)| d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}} \leq \\
&\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{B(x,r)} n^{\frac{ns}{2}} \lambda(x, f_m)^s |J(x,f)| d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x,f_m)| d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}} \leq \\
&\leq n^{\frac{ns}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\int_{B(x,r)} K_0^s(x, f_m) |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f_m)| d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}} = \\
&= n^{\frac{n}{2}} \left(\int_{B(x,r)} K^*(x) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}}.
\end{aligned}$$

То есть выполняется следующее неравенство:

$$\int_{B(x,r)} |\nabla f|^n d\sigma_x \leq n^{\frac{n}{2}} \left(\int_{B(x,r)} K^*(x) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \cdot \left(\int_{B(x,r)} |J(x, f)| d\sigma_x \right)^{\frac{s-1}{s}}. \quad (15)$$

Переходя в (15) к пределу по теореме Лебега при $r \rightarrow 0$, получаем, что для почти всех $x \in D$ справедливо неравенство:

$$|\nabla f|^n \leq n^{\frac{n}{2}} K^*(x)^{\frac{1}{s}} \cdot |J(x, f)|^{\frac{s-1}{s}}. \quad (16)$$

Производя несложные преобразования, имеем:

$$|\nabla f|^{ns} |J(x, f)|^{1-s} \leq n^{\frac{ns}{2}} K^*(x).$$

С учетом (5), (6) получаем

$$\begin{aligned}
n^{\frac{ns}{2}} \lambda(x, f_m)^s |J(x, f)| &\leq n^{\frac{ns}{2}} K^*(x), \\
K_0^s(x, f_m) |J(x, f_m)| &\leq n^{\frac{ns}{2}} K^*(x).
\end{aligned}$$

Отсюда

$$K_{0,s}^*(f) \leq n^{\frac{ns}{2}} \left(\int_{B(x,r)} K^*(x) d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}}.$$

При $s = 1$ утверждение теоремы очевидно.
Теорема доказана.

Отсюда можно сделать вывод, что отображения с s -усредненной характеристикой являются полунепрерывными снизу.

Для отображений квазиконформных в среднем см. работу Стругова Ю.Ф. [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды П.П. Куфарева. Томск: Изд-во НТЛ, 2009.
2. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Martio O., Ricman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // *Ans. Acad. Sci. Fenn*; 448 (1969).
4. Малютина А.Н., Кривошеева И.И., Баталова Н.Н. Искажение сферического модуля семейства кривых // *Исследования по математическому анализу и алгебре*. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 189 – 193.
5. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. Решетняк Ю.Г. Некоторые геометрические свойства функций и отображений // *Сиб. матем. журнал*. 1966. Т. VII. № 4.
7. Казимиров В.И. О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления // *УМН*. 1956. Т. XI. Вып. 3(69).
8. Стругов Ю.Ф. Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск, 1979. 39 с. / Препринт АН СССР, Сиб. отд. Ин-т математики.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

МАЛЮТИНА Александра Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: NDM@main.tusur.ru

ЕЛИЗАРОВА Мария Александровна – аспирантка кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: elizarova_m@sibmail.com

Статья принята в печать 22.09.2009 г.