

*Незабвенному Учителю моему –
Павлу Парфеньевичу Куфареву –
посвящается*

УДК 531.38

В.А. Щепетев

К ТЕОРЕМАМ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, КОНФОРМНЫХ ВНЕ КРУГОВОГО КОЛЬЦА

Пусть $\Sigma_Q(r, 1)$ – класс Q -квазиконформных гомеоморфизмов $w = f(z)$, $Q > 1$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$, конформных вне кругового кольца $K_{r,1}$, $K_{r,R} = \{z : r < |z| < R\}$, с нормировкой $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$, $f(0) = 0$. В настоящей работе, на основе ранее доказанного неравенства площадей, приводится теорема площадей в терминах коэффициентов типа Грунско-го. Из нее, при определенном выборе параметров, получены некоторые теоремы искажения для $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$.

Ключевые слова: квазиконформный гомеоморфизм, коэффициенты Грун-ского, критерий однолистности, теорема площадей.

§ 1. Введение

Пусть Σ – класс функций $f(\zeta) = \zeta + \lambda_0 + \lambda_1 \zeta^{-1} + \dots$, мероморфных и одноли-стных в области $|\zeta| > 1$.

Хорошо известно [1], что коэффициенты Грунско-го $c_{m,n}$ функции $f(z)$ опреде-ляются по формуле

$$\ln \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = - \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} z^{-m} \zeta^{-n},$$

$z, \zeta \in U^*$, где $U^* = \{z : |z| > 1\}$, и, в силу принципа площадей, удовлетворяют не-равенству

$$\left| \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{m,n} x_m x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n}$$

для любых комплексных x_n при условии, что последний ряд сходится. Грун-ский [2] доказал, что приведенное выше неравенство оказывается также и достаточным для того, чтобы мероморфная локально одноли-стная функция $f(\zeta)$ была одноли-стной в области $|\zeta| > 1$. Критерий одноли-стности Грунско-го вместе с его обобще-ниями [1] остается одним из эффективных инструментов в теории конформных отображений.

Пусть $\Sigma_Q(r, R)$ – класс Q -квазиконформных гомеоморфизмов $w = f(z)$, $Q > 1$, плоскости $\mathbb{C}$, конформных вне кругового кольца $K_{r,R}$, $r < 1 < R$, с разложениями вида

$$f(z)|_{U_r} \equiv f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad f(z)|_{U_R^*} \equiv f_0(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^{-n}, \quad (1)$$

где $U_r = \{z : |z| < r\}$, $U_R^* = \{z : |z| > R\}$. Этот класс тесно связан с рядом классических объектов теории однолистных аналитических функций, таких, как известные классы S , Σ , классы пар функций М.А. Лаврентьева $M(a_0, a_1)$ [3, с. 14] и др., а также их подклассов, состоящих из функций, допускающих квазиконформные продолжения в $\mathbb{C}$. В настоящей работе устанавливается неравенство типа Грун-ского в классе $\sum_Q(r, 1)$ и, в качестве следствий, приводятся некоторые результаты о росте и искажении, а также неравенства на коэффициенты разложений вида (1).

§ 2. Неравенство типа Грун-ского

Пусть $f(z) \in \sum_Q(r, 1)$, где $Q = (1+k)/(1-k)$, $0 \leq k < 1$. Обозначим через λ прямолинейный разрез от 0 до ∞ , U_R' – круг с разрезом вдоль λ , $f(K_{r', \infty}')$ – внешность образа $U_{r'}$ при отображении $w = f(z)$ с разрезом вдоль линии $f(\lambda)$. Введем специальную функцию

$$\Omega_0(\tau, w) = \ln \frac{f_0(\tau) - w}{\tau}, \quad |\tau| = R,$$

от $w \in f(U_R')$, где выбирается ветвь логарифма, обращающаяся в нуль при $\tau \rightarrow \infty$, и фиксируем некоторую ветвь функции

$$\Omega_1(t, w) = \ln(w - f_1(t)), \quad |t| = r' < r < 1,$$

при $w \in f(K_{r', R}')$ и затем по непрерывности распространяем ее. Полагая здесь $w = f_i(z)$, $i = \overline{0, 1}$, получим в терминах коэффициентов типа Грун-ского разложения вида

$$\Omega_0(\tau, f_0(z)) = \ln \frac{f_0(\tau) - f_0(z)}{\tau - z} + \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) = - \sum_{q, n=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} \tau^{-q} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \tau^n} z^n, \\ 1 < |z| < |\tau| = R; \quad (2)$$

$$\Omega_0(\tau, f_1(z)) = \ln \frac{f_0(\tau) - f_1(z)}{\tau - z} + \ln \left(1 - \frac{z}{\tau} \right) = - \sum_{q=1, n=0}^{\infty} \omega_{qn}^{01} \tau^{-q} z^n, \\ |\tau| = R, \quad z \in U_r; \quad (3)$$

$$\Omega_1(t, f_0(z)) = \ln \frac{f_0(z) - f_1(t)}{z - t} + \ln \left(1 - \frac{t}{z} \right) + \ln z = - \sum_{q=0, n=1}^{\infty} \omega_{qn}^{01} t^q z^{-n} + \ln z, \\ z \in U^*; \quad (4)$$

$$\Omega_1(t, f_1(z)) = \ln \frac{f_1(z) - f_1(t)}{z - t} + \ln \left(1 - \frac{t}{z} \right) + \ln z = \\ = - \sum_{q, n=0}^{\infty} \omega_{qn}^{11} t^q z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} t^n z^{-n} + \ln a_1 z, \quad (5)$$

где $r' = |t| < |z| < r$. Далее рассмотрим функцию

$$Q(\chi, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=R} \Omega_0(\tau, w) \sum_{p=0}^{\infty} x_p^0 \tau^p \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r'} \Omega_1(t, w) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p^1}{t^p} \frac{dt}{t},$$

где функции $\chi_0(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p^0 \tau^p$, $\chi_1(t) = \sum_{p=0}^{\infty} x_p^1 t^{-p}$ аналитичны в областях $|\tau| < R$ и $|t| > r'$ соответственно. При этом

$$Q(\chi, f_0(z)) = - \sum_{p=0, n=1}^{\infty} \sum_{i=0,1} \omega_{pn}^{0i} x_p^i z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n^0 z^n + x_0^1 \ln z, \quad z \in U^*; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} Q(\chi, f_1(z)) &= - \sum_{p=1, n=0}^{\infty} \omega_{pn}^{01} x_p^0 z^n - \sum_{p, n=0}^{\infty} \omega_{pn}^{11} x_p^1 z^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n^1 z^{-n} + x_0^1 \ln a_1 z = \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n^1 z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0,1} \omega_{pn}^{i1} x_p^i + \omega_{0n}^{11} x_0^1 \right) z^n - \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0,1} \omega_{p0}^{i1} x_p^i + x_0^1 \ln a_1 z, \\ & \quad z \in U_r. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 1. Пусть $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$, ω_{pn}^{ij} – коэффициенты Грунскога функции $f(z)$; $x_p^0, x_p^1, p = \overline{0, \infty}$ – постоянные, такие, что $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (x_p^0)^{1/p} = 1/R$ и $\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} (x_p^1)^{1/p} = r'$.

Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\left| \sum_{p=0; i=0,1}^{\infty} \omega_{pn}^{0i} x_p^i - n^{-1} d_n x_n^1 \right|^2 + r^{2n} \left| \sum_{p=1; i=0,1}^{\infty} \omega_{pn}^{i1} x_p^i + \omega_{0n}^{11} x_0^1 - n^{-1} d_n x_n^0 \right|^2 \right) + \\ & + (1 - k^2) \left| \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0,1} \omega_{p0}^{i1} x_p^i - x_0^1 \ln a_1 - k^2 (1 - k^2)^{-1} x_0^1 \ln r^{-2} \right|^2 \ln^{-1} r^{-2} \leq \\ & \leq k^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} \left(|x_n^0|^2 + r^{-2n} |x_n^1|^2 \right) + (1 - k^2)^{-1} |x_0^1|^2 \ln r^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

которое и представляет собой основное неравенство площадей в классе $\Sigma_Q(r, 1)$.

Здесь

$$c_n = n(1 - k^2 r^{2n}) / (1 - r^{2n}), \quad d_n = (1 - k^2) / (1 - k^2 r^{2n}), \quad k = (Q - 1) / (Q + 1). \quad (9)$$

В случае знака равенства экстремальная функция $F(z)$ неравенства (8) имеет вид (6), (7) для всех $z \notin K_{r,1}$, при этом коэффициенты разложений связаны соотношениями

$$\begin{aligned} & \sum_{p=0; i=0,1}^{\infty} \omega_{pn}^{0i} x_p^i = k \bar{\varepsilon} c_n^{-1} \bar{x}_n^0 + n^{-1} d_n x_n^1, \\ & \sum_{p=1; i=0,1}^{\infty} \omega_{pn}^{i1} x_p^i + \omega_{0n}^{11} x_0^1 = k \bar{\varepsilon} r^{-2n} c_n^{-1} \bar{x}_n^1 + n^{-1} d_n x_n^0, \quad n = \overline{1, \infty}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\sum_{p=1; i=0,1}^{\infty} \omega_{p0}^{i1} x_p^i - x_0^1 \ln a_1 = \frac{-2k}{1-k^2} (kx_0^1 + \bar{\varepsilon} \bar{x}_0^1) \ln r, \quad \varepsilon = e^{i\theta}. \quad (11)$$

Отметим, что функция $F(z)$ в кольце $K_{r,1}$ имеет представление

$$\begin{aligned} F(z) = & \sum_{n=1}^{\infty} (1-r^{2n})^{-1} \left\{ \left[\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0,1} \omega_{pn}^{0i} x_p^i \bar{z}^n + n^{-1} x_n^0 z^n \right] \left((r/|z|)^{2n} - 1 \right) + \right. \\ & + \left[n^{-1} x_n^1 \bar{z}^n + r^{2n} \left(\sum_{p=1; i=0,1}^{\infty} \omega_{pn}^{i1} x_p^i + \omega_{0n}^{11} x_0^1 \right) z^n \right] \left(1 - |z|^{-2n} \right) \Big\} - \\ & - \left(\sum_{p=1; i=0,1}^{\infty} \omega_{p0}^{i1} x_p^i - x_0^1 \ln a_1 \right) \ln |z| \cdot \ln^{-1} r + x_0^1 \ln z. \end{aligned}$$

Для доказательства нам потребуется следующая лемма, установленная в работе [4].

Лемма. Пусть $f(z) \in \sum_Q(r, 1)$ и $Q(w)$ – произвольная аналитическая в замкнутой области $f(\overline{K_{r,1}})$. Пусть отрезок $z = t e^{i\theta}$, $r' \leq t \leq R$, где $r' \leq r < 1 < R$, переходит при отображении $w = f(z)$ в спрямляемую кривую.

При этом функция $Q(f(z))$ разлагается в кольцах $K'_{r',r}$ и $K'_{1,R}$ с радиальными разрезами в ряды вида

$$Q(f(z)) = F(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n z^n + \beta \ln z, & z \in K'_{1,R}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n + \beta \ln z, & z \in K'_{r',r}, \end{cases} \quad (12)$$

при надлежащем выборе ветви логарифма. Тогда справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (|\alpha_n - d_n \gamma_n|^2 + r^{2n} |\delta_n - d_n \beta_n|^2) + (1-k^2) \left| \beta_0 - \gamma_0 + k^2 (1-k^2)^{-1} \beta \ln r^2 \right|^2 \ln^{-1} r^{-2} \leq \\ \leq k^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^{-1} (|\beta_n|^2 + r^{-2n} |\gamma_n|^2) + |\beta|^2 (1-k^2)^{-1} \ln r^{-2} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

где c_n, d_n, k имеют вид (9). Знак равенства реализуется в том случае, когда $F(z)$ имеет разложения (12), если $z \notin K'_{r,1}$, и

$$\begin{aligned} F(z) = & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(\alpha_n \bar{z}^n + \beta_n z^n) (1 - r^{2n} / |z|^{2n}) - (\gamma_n \bar{z}^n + \delta_n r^{2n} z^n) (1 - |z|^{-2n}) \right] / (1 - r^{2n}) \right\} + \\ & + \gamma_0 + (\gamma_0 - \beta_0) \ln^{-1} r \cdot \ln |z/r| + \beta \ln z, \quad z \in K'_{r,1}. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом коэффициенты разложений в (12) и (14) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha_n = \gamma_n d_n + k \bar{\varepsilon} n c_n^{-1} \bar{\beta}_n, \quad \delta_n = d_n \beta_n + k \bar{\varepsilon} n r^{-2n} c_n^{-1} \bar{\gamma}_n, \quad n = \overline{1, \infty}, \\ \gamma_0 = \beta_0 + 2k (1-k^2)^{-1} (k\beta + \bar{\varepsilon} \bar{\beta}) \ln r. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $\varepsilon = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, а $c_n, d_n, n = \overline{1, \infty}$, имеют вид (9).

Замечание. Отметим, что при $r \rightarrow 0$ из неравенства (13) следует теорема площадей в классе Σ_Q , установленная в [5].

Доказательство теоремы 1. Применение леммы к функции $Q(\chi, f(z))$ вместе с ее разложениями (6) и (7) в соответствующих областях приводит к неравенству (8) и соотношениям (10) и (11).

Следствие 1. Если $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$ и имеет в окрестностях 0 и ∞ разложения вида (1), то

$$c_1(|\lambda_1|^2 + r^2|a_1 - d_1|^2) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(|\lambda_n|^2 + r^{2n}|a_n|^2) + (1 - k^2)|\lambda_0|^2 / \ln r^{-2} \leq k^2 c_1^{-1}, \quad (16)$$

где коэффициенты c_n, d_1, k имеют вид (9).

Доказательство. Действительно, полагая в (8) $x_1^0 = 1$ и остальные параметры x_n^i равными нулю, получим неравенство

$$c_1(|\omega_{11}^{00}|^2 + r^2|\omega_{11}^{01} - d_1|^2) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(|\omega_{1n}^{00}|^2 + r^{2n}|\omega_{1n}^{01}|^2) + (1 - k^2)|\omega_{10}^{01}|^2 \ln^{-1} r^{-2} \leq k^2 c_1^{-1}, \quad (17)$$

из которого, с учетом того, что $\omega_{1n}^{00} = \lambda_n$, $\omega_{1n}^{01} = a_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\omega_{10}^{01} = -\lambda_0$, следует (16).

Замечание 1. При $k \rightarrow 1$ из (17) имеем неравенство

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n r^{2n} |a_n|^2 < \pi - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |\lambda_n|^2,$$

которое выражает тот очевидный факт, что площадь «внутренняя» $\sigma(f(U_r))$ меньше площади «внешней» $\sigma(C \setminus f(U^*))$.

Замечание 2. При $r \rightarrow 0$ из (16) следует [6, 7] классический результат $\sum_{n=1}^{\infty} n |\lambda_n|^2 \leq k^2$ в классе Σ_Q .

Замечание 3. Из неравенства (16) вытекает $|\lambda_1| \leq k c_1^{-1}$, при этом, согласно соотношениям (10), (11), знак равенства достигается для функции

$$f(z) = \begin{cases} z + k \varepsilon c_1^{-1} z^{-1}, & z \in U^*, \\ [(z + k \varepsilon c_1^{-1} \bar{z})(1 - |r/z|^2) - d_1 r^2 z(1 - |z|^{-2})] / (1 - r^2), & z \in \bar{K}_{r,1}, \\ d_1 z, & z \in U_r. \end{cases}$$

Следствие 2. Если $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$, то справедливо неравенство

$$|a_3 / a_1| \leq k c_1^{-1} r^{-2}.$$

Заключение следует из (8), если положить $x_1^1 = 1$, а остальные параметры x_n^i приравнять нулю:

$$c_1(|\omega_{11}^{10} - d_1|^2 + r^2|\omega_{11}^{11}|^2) + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(|\omega_{1n}^{10}|^2 + r^{2n}|\omega_{1n}^{11}|^2) + (1 - k^2)|\omega_{10}^{11}|^2 \ln^{-1} r^{-2} \leq k^2 c_1^{-1} r^{-2}.$$

Знак равенства, согласно соотношениям (10), (11), возможен в случае, если $\omega_{11}^{10} = d_1$ и $\omega_{1n}^{10} = 0$, $2 \leq n$, $\omega_{11}^{11} = k\bar{\epsilon}r^{-2}c_1^{-1}$, $\omega_{1n}^{11} = 0$, $2 \leq n$; $\omega_{10}^{11} = 0$, т.е. когда $a_2 = 0$.

Теорема 2. Если $f(z) \in \sum_{\mathcal{O}}(r, 1)$, то при заданных комплексных l_v и любых $\zeta_v, \tau_v \in U^*$, $v = \overline{1, m}$, справедливо неравенство

$$\left| \sum_{v, v'=1}^m l_v l_{v'} \ln \frac{f(\zeta_v) - f(\tau_{v'})}{\zeta_v - \tau_{v'}} \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} \left| \sum_{v=1}^m l_v \zeta_v^{-n} \right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} \left| \sum_{v=1}^m l_v \tau_v^{-n} \right|^2, \quad (18)$$

где c_n, k имеют вид (9).

Доказательство. Рассмотрим на $C \setminus f(\bar{U}_R^*)$ функцию

$$\Omega_0(\zeta_v; w) = \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{f(\zeta_v) - w}{\zeta_v},$$

где выбирается ветвь логарифма так, чтобы $\lim_{\zeta_v \rightarrow \infty} \ln \frac{f(\zeta_v) - w}{\zeta_v} = 0$. Тогда при

$\zeta \in K_{1,R}$, $1 < R \leq \min |\zeta_v|$, $v = \overline{1, m}$, имеем

$$\begin{aligned} \Omega_0(\zeta_v; f_0(\zeta)) &= \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{f_0(\zeta_v) - f_0(\zeta)}{\zeta_v - \zeta} + \sum_{v=1}^m l_v \ln \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_v} \right) = \\ &= - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \zeta^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n \zeta^n, \end{aligned} \quad (19)$$

а при $z \in U_r$

$$\Omega_0(\zeta_v; f_1(z)) = \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{f_0(\zeta_v) - f_1(z)}{\zeta_v} \equiv - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{01} x_q z^n - \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{q0}^{01} x_q, \quad (20)$$

где $x_n = \sum_{v=1}^m l_v \zeta_v^{-n}$.

По теореме 1 из соотношений (19), (20) имеем неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \right|^2 + r^{2n} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{01} x_q - n^{-1} d_n x_n \right|^2 \right) + \frac{(1-k^2)}{\ln r^{-2}} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{q0}^{01} x_q \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} |x_n|^2,$$

из которого следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} |x_n|^2.$$

Отсюда и из неравенства Коши

$$\left| \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q x_n \right|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} |x_n|^2$$

получим

$$\left| \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q x_n \right| \leq k \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} |x_n|^2. \quad (21)$$

Согласно Шуру [3], неравенство (21) эквивалентно неравенству

$$\left| \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \tilde{x}_n \right|^2 \leq k^2 \sum_{q=1}^{\infty} c_q^{-1} |x_q|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} |\tilde{x}_n|^2, \quad (22)$$

где $\tilde{x}_n = \sum_{v=1}^m l_v \tau_v^{-n}$, $R \leq |\tau_v|$. Поскольку

$$\sum_{v'=1}^m l_{v'} \Omega_0(\zeta_v; f_0(\tau_{v'})) = - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \tilde{x}_n - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n \tilde{x}_n,$$

то из (2) следует соотношение

$$\sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{00} x_q \tilde{x}_n = \sum_{v,v'}^m l_v l_{v'} \ln \frac{f(\zeta_v) - f(\tau_{v'})}{\zeta_v - \tau_{v'}},$$

которое вместе с (22) и доказывает неравенство искажения (18).

Замечание. Неравенство (22) при $m=1$ вместе с разложением (19) дает достаточное условие однолиственности разложениями вида (1). Из него при $r \rightarrow 0$ следуют условия однолиственности в U^* функции $f(z) \in \Sigma_Q$, полученные в [5].

Теорема 3. Если $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$, то для любых l_v и $z_v, t_v \in U_r$, $v = \overline{1, m}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{v,v'=1}^m l_v l_{v'} \ln \frac{[f(t_v) - f(z_{v'})] f'(0) t_v z_{v'}}{(t_v - z_{v'}) f(t_v) f(z_{v'})} \right|^2 \leq \\ & \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} \left| \sum_{v=1}^m l_v t_v^n \right|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} \left| \sum_{v=1}^m l_v z_v^n \right|^2, \end{aligned} \quad (23)$$

где c_n, k имеют вид (9).

Доказательство. Пусть $t_v \in U_r$, $v = \overline{1, m}$, и рассмотрим в области $f(K'_{r', \infty})$ функцию

$$\Omega_1(t_v; w) = \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{(w - f_1(t_v)) t_v f'_1(0)}{w \cdot f_1(t_v)}.$$

Представляя $\Omega_1(t_v; f_i(z))$, $i=0,1$, в виде

$$\Omega_1(t_v; f_i(z)) = \sum_{v=1}^m l_v \left[\ln \frac{f_i(z) - f_1(t_v)}{z - t_v} + \ln(1 - t_v z^{-1}) - \ln \frac{f_i(z)}{z} - \ln \frac{f_1(t_v)}{t_v} + \ln a_1 \right]$$

и используя разложения (3), (5), получим при $z \in K'_{1, \infty}$

$$\Omega_1(t_v; f_0(z)) = - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{01} x_q z^{-n} + \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{q0}^{11} x_q, \quad (24)$$

а при $z \in K'_{r', r}$ –

$$\Omega_1(t_v; f_1(z)) = - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n z^{-n} - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q z^n, \quad (25)$$

где $x_n = \sum_{v=1}^m l_v t_v^n$, $L = \sum_{v=1}^m l_v$.

По теореме 1 из (24), (25) имеем неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{01} x_q - n^{-1} d_n x_n \right|^2 + r^{2n} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q \right|^2 \right) + \frac{1-k^2}{\ln r^{-2}} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{q0}^{11} x_q \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |x_n|^2,$$

из которого следует $\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n} \left| \sum_{q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |x_n|^2$. Отсюда и из неравенства Коши получим оценку $\left| \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q x_n \right| \leq k \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |x_n|^2$, которая эквивалентна неравенству

$$\left| \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q \tilde{x}_n \right|^2 \leq k^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |x_n|^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |\tilde{x}_n|^2, \quad (26)$$

где $\tilde{x}_n = \sum_{v=1}^m l_v z_v^n$. Поскольку

$$\sum_{v'=1}^m l_{v'} \Omega_1(t_v; f_1(z_{v'})) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} x_n \tilde{x}_n - \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q \tilde{x}_n,$$

$$\text{то} \quad \sum_{n,q=1}^{\infty} \omega_{qn}^{11} x_q \tilde{x}_n = -\sum_{v,v'=1}^m l_v l_{v'} \ln \frac{[f_1(z_{v'}) - f_1(t_v)] t_v z_{v'} f_1'(0)}{(z_{v'} - t_v) f_1(z_{v'}) f_1(t_v)}, \quad (27)$$

что вместе с (26) и дает неравенство (23).

Замечание. Из неравенства (26) с учетом (27) при $m = 1$ следует достаточное условие однолиственности в U_r мероморфной Q -квазиконформной функции $f(z)$, конформной вне кругового кольца $K_{r,R}$, с разложениями вида (1).

Теорема 4. При заданных комплексных α, β и $l_v, v = \overline{1, m}$, и любых $z_v \in U_r$ для $f(z) \in \Sigma_Q(r, 1)$ имеем

$$\left| \alpha^2 \sum_{v,v'=1}^m l_v l_{v'} \ln \frac{f(z_{v'}) - f(z_v)}{z_{v'} - z_v} + 2\alpha\beta \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{f(z_v)}{z_v} + \beta^2 \ln f'(0) + \frac{k^2(\alpha L + \beta)^2}{1-k^2} \ln r^{-2} \right| \leq$$

$$\leq k \left(|\alpha|^2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} \left| \sum_{v=1}^m l_v z_v^n \right|^2 + \frac{|\alpha L + \beta|^2}{1-k^2} \ln r^{-2} \right), \quad (28)$$

где $L = \sum_{v=1}^m l_v$, а c_n, k имеют вид (9). Здесь под логарифмами понимаются непрерывные ветви, равные нулю при $z_v \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $z_v \in U_r$ и рассмотрим в области $f(\overline{K_{r,1}})$, $f \in \Sigma_Q(r, 1)$, функцию

$$Q(z_v; w) = \alpha \sum_{v=1}^m l_v \ln [w - f(z_v)] + \beta \ln w,$$

а в $\mathbb{C}$ – однозначную функцию

$$h(z) = \alpha \sum_{v=1}^m l_v \ln \left[\frac{f(z) - f(z_v)}{z - z_v} \right] + \beta \ln \frac{f(z)}{z},$$

которая аналитична в областях U^* и в U_r и представима в них рядами

$$h(z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^{-n}, & z \in U^*, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n + \gamma_0, & z \in U_r, \end{cases}$$

где $\gamma_0 = \alpha \sum_{v=1}^m l_v \ln(f(z_v)/z_v) + \beta \ln f'(0)$. Поэтому

$$\Omega(f(z)) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \alpha n^{-1} \tau_n) z^{-n} + (\alpha L + \beta) \ln z, & z \in K_{1,r}, \\ -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha n^{-1} \tau_n z^{-n} + \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n + (\alpha L + \beta) \ln z, & z \in K_{p,r}. \end{cases}$$

Здесь $\tau_n = \sum_{v=1}^m l_v z_v^n$. Применяя теорему 1, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(|\alpha_n - \alpha n^{-1} \tau_n (1 - d_n)|^2 + r^{2n} |\delta_n|^2 \right) + \frac{1 - k^2}{\ln r^{-2}} \left| \gamma_0 + \frac{k^2}{1 - k^2} (\alpha L + \beta) \ln r^{-2} \right|^2 \leq \\ \leq k^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |\alpha \tau_n|^2 + |\alpha L + \beta|^2 (1 - k^2)^{-1} \ln r^{-2} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) видно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n} |\delta_n|^2 \leq k^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |\alpha \tau_n|^2, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} c_0 |\delta_0|^2 &= (1 - k^2) \left| \gamma_0 + k^2 (1 - k^2)^{-1} (\alpha L + \beta) \ln r^{-2} \right|^2 / \ln r^{-2}, \\ c_0^{-1} |\alpha \tau_0|^2 &= (1 - k^2)^{-1} |\alpha L + \beta|^2 \ln r^{-2}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$|\alpha \delta_0 \tau_0| = \left| \gamma_0 (\beta + \alpha L) + (\beta + \alpha L)^2 k^2 (1 - k^2)^{-1} \ln r^{-2} \right|. \quad (31)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{v'=1}^m l_{v'} h(z_{v'}) + \beta h(0) = \\ &= \alpha^2 \sum_{v, v'=1}^m l_v l_{v'} \ln \frac{f(z_{v'}) - f(z_v)}{z_{v'} - z_v} + 2\alpha\beta \sum_{v=1}^m l_v \ln \frac{f(z_v)}{z_v} + \beta^2 \ln f'(0) = \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \tau_n + \gamma_0 (\alpha L + \beta). \end{aligned} \quad (32)$$

Из неравенства Коши

$$\left| \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \tau_n \right|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{2n} |\delta_n|^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |\alpha \tau_n|^2$$

и (31) получим

$$\left| \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \tau_n \right| \leq k \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{-1} r^{-2n} |\alpha \tau_n|^2.$$

Поскольку

$$\alpha \sum_{v'=1}^m l_{v'} h(z_{v'}) + \beta h(0) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \tau_n + \gamma_0 (\alpha L + \beta),$$

то с учетом (31) – (32) при $\tau_0 = 1$ получаем неравенство (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pommerenke Chr.* Univalent Functions. Gottingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1975.
2. *Grunsky H.* Koeffizientenbedingungen für schlicht abbildende meromorphe Functionen // *Math. Z.* 45, 1. P. 29 – 61.
3. *Лебедев Н.А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975. 336 с.
4. *Щепетев В.А.* Теорема площадей для одного класса квазиконформных отображений // *ДАН Украинской ССР. Серия А.* 1979. № 8. С. 618 – 621.
5. *Гутлянский В.Я.* О принципе площадей для одного класса квазиконформных отображений // *ДАН СССР.* 1973. Т. 212. № 3. С. 540 – 543.
6. *Kühnau R.* Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen // *Math. Nachr.* 1971. Bd 48. H. 1 – 6. P. 77 – 105.
7. *Lehto O.* Schlicht functions with a quasiconformal extension // *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI.* 1971. № 500. P. 3 – 10.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЩЕПЕТЕВ Вадим Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика и механика» Ростовской-на-Дону государственной академии сельскохозяйственного машиностроения. E-mail: vshch41@mail.ru

Статья принята в печать 15.11.2009 г.