

*Светлой памяти незабвенного Учителя –
Павла Парфеньевича Куфарева
посвящается*

УДК 519.632:531.262

В.В. Соболев

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД УСТОЙЧИВОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА О КРУЧЕНИИ СТЕРЖНЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТЬЮ СЕЧЕНИЯ

Разработан устойчивый численный метод решения задачи Сен-Венана о кручении стержня с произвольной ограниченной односвязной областью сечения с жордановой границей. Метод основан на прямом решении краевой задачи для гармонических функций в неклассической дискретной постановке с процедурой регуляризации. Опробование метода с применением компьютерных программ показало его достаточно высокую эффективность и точность.

Ключевые слова: *задача Сен-Венана, кручение стержня, гармоническая функция, краевая задача, численный метод, процедура регуляризации, компьютерная программа.*

Рассматривается классическая задача Сен-Венана о кручении прямого призматического или цилиндрического стержня с поперечным сечением произвольной формы, скручиваемого моментами силы, приложенными к концам стержня [1–5]. Пусть поперечное сечение однородного по всей длине стержня представляет собой односвязную область B . Влиянием собственного веса стержня пренебрегаем. Поперечные размеры стержня считаются малыми по сравнению с его протяжением в осевом направлении. За ось стержня принимается линия, соединяющая центры тяжести всех поперечных сечений.

Решение задачи Сен-Венана сводится к определению функции кручения $\varphi = \varphi(x, y)$ – гармонической в области B функции, принимающей на границе Γ области B значения

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = y \cos(\nu, x) - x \cos(\nu, y). \quad (1)$$

Здесь $\frac{\partial}{\partial \nu}$ означает производную в направлении внешней нормали к границе области сечения, $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$ – направляющие косинусы нормали.

Жёсткость при кручении стержня выражается произведением $C = \mu D$ модуля сдвига μ на модуль кручения (геометрическую жёсткость):

$$D = \iint_B \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy. \quad (2)$$

Функция φ определяется граничным условием (1) однозначно с точностью до произвольного аддитивного постоянного, от выбора которого, впрочем, не зависит величина интеграла в формуле (2).

Другая, равносильная форма представления модуля кручения через функцию $\psi = \psi(x, y)$, гармонически сопряжённую к функции φ , даётся равенством

$$D = \iint_B \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3)$$

Функция ψ , связанная с φ известными условиями Коши – Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

должна быть решением краевой задачи Дирихле с граничным условием

$$\psi|_{\Gamma} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2). \quad (4)$$

Из литературы известны точные и приближённые решения задачи о кручении стержня для самых разнообразных сечений в форме эллипса, правильного треугольника, прямоугольника, кругового сектора, тавра, различных многоугольников и других, сводимых к указанным случаям подходящим конформным отображением [1–5]. Численные решения краевых задач Дирихле или Неймана, в частности задачи о кручении стержня, для произвольных областей, в том числе клиновидных, могут быть получены методом конформного отображения [2, 5], сведением к интегральным уравнениям [4–7], а также с использованием хорошо известных вариационных методов [7] или получивших своё развитие в последние десятилетия новых методов решения дифференциальных уравнений в частных производных: сеточных, бессеточных, МКЭ, МГЭ, МКГЭ и др. [7–10]. Специфика некоторых из этих методов (конформных отображений, сеточных, МКЭ, МКГЭ) требует учёта конкретного вида области сечения стержня и/или немалого объёма предварительной «ручной» работы для подготовки модели к обчёту. В других методах затруднены оценки погрешности и/или учёт неустойчивости решения краевой задачи в дискретной постановке, когда граничные значения задаются в отдельных точках границы и притом, как это часто бывает в практических случаях, с некоторой погрешностью. Погрешности могут возникать по разным причинам. В одних случаях это инструментальные погрешности измерения, в других – погрешности интерполяции. Для рассматриваемой задачи кручения граничные значения в (1), (4) не содержат инструментальных погрешностей, однако при интерполяции в межузловых точках границы погрешности возникают.

Поясним сказанное. Для численного моделирования границы Γ области B на практике приходится ограничиваться выбором конечного, обычно не слишком большого (из-за ресурсных ограничений) числа m точек (узлов сети) ζ_1, \dots, ζ_m , расположенных на Γ или вблизи Γ , достаточно полно и точно описывающих Γ . При этом в точках границы Γ , не совпадающих с узловыми, в качестве граничных значений краевой задачи по необходимости берутся так или иначе интерполированные, приближённые значения.

В простейшем случае кусочно-постоянной интерполяции оценить такую погрешность можно следующим образом. Пусть δ_1 – положительное число, такое, что граница Γ покрывается системой замкнутых кругов радиусом δ_1 с центрами в узловых точках ζ_1, \dots, ζ_m , расположенных на Γ . В случае выпуклой или полиго-

нальной области сечения B за δ_1 можно взять $\delta_1 = \frac{1}{2} \max_{1 \leq j \leq m} |\zeta_{j+1} - \zeta_j|$ (считаем $\zeta_{m+1} = \zeta_1$). Тогда при замене в точке $\zeta \in \Gamma$ точного граничного значения $\psi(\zeta) = |\zeta|^2 / 2$ на приближённое $\psi^*(\zeta) = |\zeta_j|^2 / 2$, где ζ_j – ближайшая к ζ узловая точка, возникает погрешность, не превосходящая величины $\varepsilon_1 = \delta_1 (R_{\max} + \delta_1 / 2)$. Здесь R_{\max} – наибольшее из расстояний точек ζ_1, \dots, ζ_m от начала координат. Действительно, для $\zeta \in \Gamma$ имеем

$$|\psi(\zeta) - \psi(\zeta_j)| = \frac{1}{2} \left| |\zeta|^2 - |\zeta_j|^2 \right| = \frac{1}{2} \left| (|\zeta| + |\zeta_j|)(|\zeta| - |\zeta_j|) \right| \leq \frac{1}{2} \delta_1 (R_{\max} + R_{\max} + \delta_1) = \varepsilon_1. \quad (5)$$

При практической реализации указанных выше методов за счёт погрешности в задании граничных значений, возникающей из-за дискретизации границы, а также за счёт накопления ошибок вычислительных схем могут возникнуть неконтролируемые погрешности конечных результатов вычислений. Всё это требует применения процедур, повышающих устойчивость результатов относительно малых погрешностей в исходных данных, и сопровождения полученного приближённо результата оценкой погрешности.

В работе предложен новый численный метод решения задачи кручения, пригодный для случая односвязного сечения произвольной формы и удовлетворяющий двум указанным требованиям. Приведён подход к решению задачи на основе определения функции кручения φ как решения задачи Неймана с граничным условием (1). Анализ численных экспериментов показал, что для широкого класса областей сечений из двух возможных вариантов определения сопряжённых гармонических функций φ, ψ – на основе решения краевой задачи Дирихле или задачи Неймана – предпочтительнее вариант с решением задачи Неймана. Именно он обеспечивает – в равных условиях – большую точность. Метод не требует использования конформных отображений. При этом затраты времени на подготовку модели – минимальные. Например, если область сечения полигональная, то требуется задать только координаты вершин полигона. Всякая иная область B аппроксимируется полигоном. Определение в замыкании области B значений функций φ и ψ , а также величины интеграла (2) для геометрической жёсткости при кручении стержня осуществляется компьютерными программами в автоматическом режиме.

1. Постановка краевой задачи

Пусть B – ограниченная односвязная область с жордановой границей, представляющей собой кусочно-гладкую кривую Γ . Пусть $\varphi(x, y)$ – непрерывная в замыкании $\bar{B} = B \cup \Gamma$ области B , гармоническая в B функция, удовлетворяющая граничному условию (1). Известно, что всякую гармоническую в односвязной области B функцию можно рассматривать как действительную или мнимую часть некоторой регулярной в B функции $F(z)$, $z = x + iy$. Пусть $\varphi = \operatorname{Re} F$. Тогда $\psi = \operatorname{Im} F$.

Согласно теореме Уолша [11], регулярную в B функцию F , непрерывную в \bar{B} , можно аппроксимировать многочленом сколь угодно точно равномерно в \bar{B} : для

любого числа $\varepsilon > 0$ существует многочлен

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n (a_k - ib_k) z^k$$

с действительными коэффициентами a_k, b_k , такой, что $\max_{z \in \bar{B}} |F(z) - P_n(z)| < \varepsilon$.

Отсюда имеем $\max_{(x,y) \in \bar{B}} |\psi(x,y) - \text{Im}P_n(x+iy)| < \varepsilon$. Согласно принципу максимума модуля гармонической функции, последнее неравенство будет выполнено, если $\max_{(x,y) \in \Gamma} |\psi(x,y) - \text{Im}P_n(x+iy)| < \varepsilon$.

Таким образом, функции $\varphi(x,y), \psi(x,y)$ можно определить приближённо формулами $\varphi(x,y) \cong \varphi_n(x,y) = \text{Re}P_n(x+iy)$, $\psi(x,y) \cong \psi_n(x,y) = \text{Im}P_n(x+iy)$ с некоторым номером n и коэффициентами a_k, b_k , выбранными так, чтобы при заданном $\varepsilon > 0$ выполнялось неравенство

$$\left| \psi_n(x,y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right| < \varepsilon, \quad (x,y) \in \Gamma. \quad (6)$$

Запишем представления многочленов φ_n, ψ_n и условие (6) в полярных координатах. Пусть $|z| = |x+iy| = r, \theta = \text{Arg}(x+iy)$. Имеем

$$\varphi_n(x,y) = a_0 + \sum_{k=1}^n r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta); \quad (7)$$

$$\psi_n(x,y) = -b_0 + \sum_{k=1}^n r^k (-b_k \cos k\theta + a_k \sin k\theta); \quad (8)$$

и условие (6) принимает вид

$$\left| b_0 + \sum_{k=1}^n r^k (b_k \cos k\theta - a_k \sin k\theta) + \frac{1}{2}r^2 \right| < \varepsilon. \quad (9)$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta},$$

получаем

$$-\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = \sum_{k=1}^n k r^{k-1} (-b_k \cos(k-1)\theta + a_k \sin(k-1)\theta); \quad (10)$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \psi_n}{\partial y} = \sum_{k=1}^n k r^{k-1} (a_k \cos(k-1)\theta + b_k \sin(k-1)\theta). \quad (11)$$

Аналогично предыдущему, представляя функцию φ приближённо гармоническим многочленом вида (7) и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial v} = \cos \gamma \frac{\partial}{\partial x} + \sin \gamma \frac{\partial}{\partial y},$$

где γ – угол, образованный внешней нормалью к границе Γ в точке $z \in \Gamma$ с по-

ложительным направлением оси абсцисс, получаем

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial v} = \sum_{k=1}^n k r^{k-1} (a_k \cos((k-1)\theta + \gamma) + b_k \sin((k-1)\theta + \gamma)), \quad (12)$$

и граничное условие (1) приводит к приближённому равенству

$$\sum_{k=1}^n k r^{k-1} [a_k \cos((k-1)\theta + \gamma) + b_k \sin((k-1)\theta + \gamma)] \cong y \cos \gamma - x \sin \gamma. \quad (13)$$

2. Определение функции кручения φ

1) Как известно [12], задача разложения функции в ряд Фурье обладает свойством неустойчивости: при малых вариациях коэффициентов ряда его сумма может измениться сколь угодно сильно. Поэтому даже при незначительных погрешностях, допущенных в определении коэффициентов $a_0, b_0, \dots, a_n, b_n$, погрешности в определении φ_n, ψ_n по формулам (7), (8) при больших n (и, особенно, при $r > 1$), могут стать значительными. В связи с этим для повышения устойчивости решения задачи применим хорошо известную процедуру регуляризации по Тихонову [12].

Задавшись номером n , определим эти коэффициенты в соответствие с условием (13) по методу регуляризующего функционала [12, с. 141], т.е. так, чтобы квадратичная невязка граничного условия (1) по контуру Γ была согласована с условием (13) и при этом высокие гармоники многочленов (7), (8) были «подавлены». Именно, потребуем, чтобы было

$$M_\lambda = M_\lambda(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \sigma + \lambda \Omega \rightarrow \min,$$

где
$$\sigma = \sigma[\varphi_n] = \sigma(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial}{\partial v} \varphi_n - (y \cos \gamma - x \sin \gamma) \right)^2 ds$$

– квадратичная невязка граничного условия (1); в качестве «стабилизатора» взят функционал

$$\Omega = \Omega[\varphi_n] = \Omega(a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} |\text{grad} \varphi_n|^2 ds.$$

$L(\Gamma)$ означает длину границы Γ , ds – элемент длины дуги; $\lambda, \lambda \geq 0$, – параметр регуляризации, который необходимо определить.

Согласно теории некорректных задач [12], задача на минимум M_λ на множестве всех функций φ_n , удовлетворяющих при заданном δ_0 , $0 < \delta_0 < \sigma[0]$, условию $\sigma[\varphi_n] \leq \delta_0$, имеет единственное решение, которое достигается в случае равенства $\sigma[\varphi_n] = \delta_0$. Это следует из того, что соответствующее множество функций φ_n выпукло, а функционал $\Omega[\varphi_n]$ квадратичский.

Записывая необходимые условия минимума

$$\frac{\partial M_\lambda}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial M_\lambda}{\partial b_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^n a_l C_{kl}(\lambda) + \sum_{l=1}^n b_l D_{kl}(\lambda) &= F_k \\ \sum_{l=1}^n a_l D_{lk}(\lambda) + \sum_{l=1}^n b_l D_{kl}^*(\lambda) &= F_k^* \end{aligned} \right\} (k = 1, \dots, n). \quad (14)$$

Здесь обозначено:

$$C_{kl}(\lambda) = \int_{\Gamma} r^{k+l-2} (kl \cos((k-1)\theta + \gamma) \cos((l-1)\theta + \gamma) + \lambda \cos(l-k)) ds,$$

$$D_{kl}(\lambda) = \int_{\Gamma} r^{k+l-2} (kl \cos((k-1)\theta + \gamma) \sin((l-1)\theta + \gamma) + \lambda \sin(l-k)\theta) ds,$$

$$D_{kl}^*(\lambda) = \int_{\Gamma} r^{k+l-2} (klsin((k-1)\theta + \gamma) \sin((l-1)\theta + \gamma) + \lambda \cos(l-k)\theta) ds,$$

$$F_k = k \int_{\Gamma} r^k (y \cos \gamma - x \sin \gamma) \cos((k-1)\theta + \gamma) ds,$$

$$F_k^* = k \int_{\Gamma} r^k (y \cos \gamma - x \sin \gamma) \sin((k-1)\theta + \gamma) ds.$$

Симметричная матрица системы уравнений (14) является матрицей Грама, поэтому она положительно определённая и СЛАУ (14) имеет единственное решение.

Параметр регуляризации $\lambda \geq 0$ определим по методу невязки [12] из уравнения

$$\sigma_n(\lambda) = \delta_0. \quad (15)$$

Здесь $\sigma_n(\lambda) = \sigma(a_1(\lambda), b_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda), b_n(\lambda))$, $a_1(\lambda), b_1(\lambda), \dots, a_n(\lambda), b_n(\lambda)$ – решение СЛАУ (14) при фиксированном $\lambda \geq 0$.

Величину допустимой невязки $\delta_0 > 0$ зададим с учётом требуемого уровня точности ε_0 аппроксимации функции $\partial\varphi/\partial v$ на Γ : $\delta_0 = \varepsilon_0^2$.

Обычным образом [12, с. 72, 73] доказывается, что $\sigma_n(\lambda)$ – возрастающая функция и $\sigma_n(\lambda) \rightarrow \sigma^{(\infty)}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, где

$$\sigma^{(\infty)} = \frac{1}{L(\Gamma)} \int_{\Gamma} (y \cos \gamma - x \sin \gamma)^2 ds.$$

Следовательно, уравнение (15) имеет (и притом единственное) решение $\bar{\lambda}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\sigma_n(0) < \varepsilon_0^2 < \sigma^{(\infty)}. \quad (16)$$

Если условие $\sigma_n(0) < \varepsilon_0^2$ не выполняется, следует увеличивать n и повторять все вычисления до тех пор, пока не станет $\sigma_n(0) < \varepsilon_0^2$.

Решение уравнения (15) при выполнении условий (16) можно получить, применяя какой-либо численный итеративный метод, например известный метод хорд.

3. Определение функции ψ

При известных значениях коэффициентов $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ для определения функции ψ достаточно определить величину b_0 и воспользоваться формулой (8). Найдём b_0 из условия минимума квадратичной невязки граничного условия (4):

$$\int_{\Gamma} \left(b_0 + \sum_{k=1}^n r^k (b_k \cos k\theta - a_k \sin k\theta) + \frac{1}{2} r^2 \right)^2 ds \rightarrow \min .$$

Получаем

$$b_0 = -\frac{1}{2L(\Gamma)} \int_{\Gamma} \left(\sum_{k=1}^n r^k (b_k \cos k\theta - a_k \sin k\theta) + \frac{1}{2} r^2 \right) ds . \quad (17)$$

4. Определение геометрической жёсткости при кручении стержня

Примем приближённо за величину D значение интеграла

$$D_n = \iint_B \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - y \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \right) dx dy .$$

Применяя формулу Остроградского – Грина, получаем

$$D_n = \oint_{\Gamma} \left(-x^2 y - x \varphi_n \right) dx + \left(y^2 x - y \varphi_n \right) dy . \quad (18)$$

Отметим, что величина контурного интеграла (18) не зависит от выбора коэффициента a_0 в формуле (7).

Для оценки погрешности при вычислении D воспользуемся следующей формой представления:

$$D_n = \iint_B \left(x^2 + y^2 - x \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - y \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \right) dx dy .$$

Отсюда, учитывая граничные условия (4), приходим к равенству

$$D_n = 2 \iint_B \psi_n dx dy - \iint_B (x^2 + y^2) dx dy . \quad (19)$$

Пусть абсолютная погрешность аппроксимации функции ψ на контуре Γ не превышает ε : $\max_{\zeta \in \Gamma} |\psi(\zeta) - \psi_n(\zeta)| \leq \varepsilon$. Тогда $\max_{(x,y) \in B} |\psi(x,y) - \psi_n(x,y)| \leq \varepsilon$ и с использованием (19) получаем оценку

$$\Delta D_n = |D - D_n| \leq 2 \iint_B |\psi - \psi_n| dx dy \leq 2\varepsilon S(B) , \quad (20)$$

где $S(B)$ – площадь области B .

Дадим оценку величины ε . Пусть ζ – произвольно фиксированная точка на Γ и ζ_j – ближайшая к ζ узловая точка. Имеем

$$|\psi(\zeta) - \psi_n(\zeta)| \leq |\psi(\zeta) - \psi(\zeta_j)| + |\psi(\zeta_j) - \psi_n(\zeta_j)| + |\psi_n(\zeta_j) - \psi_n(\zeta)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 ,$$

где $\varepsilon_1 = \delta_1 (R_{\max} + \delta_1 / 2)$ – ранее установленная оценка (5),

$$\varepsilon_2 = \max_{1 \leq j \leq m} |\psi_n(\zeta_j) - |\zeta_j|^2 / 2| , \quad \varepsilon_3 = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{|\zeta - \zeta_j| \leq \delta_1} |\psi_n(\zeta_j) - \psi_n(\zeta)|$$

– (апостериорные) оценки, которые при известных коэффициентах a_k, b_k могут быть получены непосредственно с использованием формулы (8). Расчёт величины ε_2 не вызывает затруднений. Дадим оценку величины ε_3 .

Пусть $\Delta\xi = \operatorname{Re}(\zeta - \zeta_j), \Delta\eta = \operatorname{Im}(\zeta - \zeta_j), t = \arg(\zeta - \zeta_j), r_j = |\zeta_j|, \theta_j = \arg \zeta_j$.

Тогда при $|\zeta - \zeta_j| \leq \delta_1$ имеем ($0 < \vartheta < 1$)

$$\begin{aligned} |\psi_n(\zeta_j) - \psi_n(\zeta)| &= \left| \frac{\partial}{\partial x} \psi_n(\zeta_j + \vartheta \delta_1 e^{it}) \Delta\xi + \frac{\partial}{\partial y} \psi_n(\zeta_j + \vartheta \delta_1 e^{it}) \Delta\eta \right| = \\ &= \vartheta \delta_1 \left| \sum_{k=1}^n k r_j^{k-1} [-b_k \cos((k-1)\theta_j + t) + a_k \sin((k-1)\theta_j + t)] \right| \leq \vartheta \delta_1 \sum_{k=1}^n k r_j^{k-1} (|a_k| + |b_k|). \end{aligned}$$

Следовательно, $\varepsilon_3 < K_n \delta_1$, где

$$K_n = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{k=1}^n k r_j^{k-1} (|a_k| + |b_k|). \tag{21}$$

Итак, $\varepsilon < \varepsilon_n^*$, где

$$\varepsilon_n^* = \delta_1 (R_{\max} + K_n + \delta_1/2) + \varepsilon_2, \tag{22}$$

и, следовательно, согласно (20), получаем $\Delta D_n < \Delta_n$, где

$$\Delta_n = 2\varepsilon_n^* S(B). \tag{23}$$

5. Практическая реализация метода

1. Зададим на границе Γ области сечения B стержня произвольно систему точек $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$, образующих на Γ сеть узлов так, чтобы замкнутый многоугольник Γ_m с вершинами в этих точках достаточно точно аппроксимировал область B . Нумеровать точки будем в положительном направлении обхода границы Γ (при котором точки области B остаются слева). Будем считать, что угловые точки границы Γ , если таковые имеются, включены в данную систему точек. Таким образом, вместо области B везде в дальнейшем берётся близкая к ней (или совпадающая с ней – в случае полигональной области B) область B_m – внутренность многоугольника (полигон) с вершинами $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. В качестве длины границы $L(\Gamma)$ приближённо берётся суммарная длина всех звеньев замкнутой ломаной $\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m \zeta_1$.

Если исходная область B представляет собой полигон с вершинами A_1, A_2, \dots, A_p , то в качестве исчерпывающей информации о границе Γ достаточно задать только координаты этих вершин. Однако, если число вершин p невелико, то для повышения точности квадратур необходимо пополнить заданное множество граничных точек дополнительными точками так, чтобы полученная система образовывала достаточно плотную сеть узлов на Γ_m . Такое пополнение выполняется в автоматическом режиме путём добавления точек, лежащих внутри звеньев ломаной $A_1 A_2 \dots A_p A_1$. Количество дополнительных точек задаётся оператором по запросу программы. При этом распределение дополнительных точек внутри звеньев ломаной может быть выбрано либо равномерное, либо неравномерное –

со сгущением вблизи вершин A_1, A_2, \dots, A_p . Будем считать, что пополненное множество образовано вершинами $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. Таким же способом будем обозначать исходное множество граничных точек полигона B_m и в том случае, если пополнение не проводилось.

Если это необходимо (по выбору опции меню), начало системы координат приводится к центру тяжести области B_m и координатные оси – к главным осям инерции. Для этого вычисляются (сведением к контурным интегралам с применением формулы Остроградского – Грина): площадь области D_m , статические, осевые инерциальные и центробежный моменты $\iint_{B_m} x dx dy$, $\iint_{B_m} y dx dy$, $\iint_{B_m} x^2 dx dy$, $\iint_{B_m} y^2 dx dy$, $\iint_{B_m} xy dx dy$. По указанным величинам известным образом определяются координаты центра тяжести и направление главных осей инерции, после чего совершается сдвиг начала координат и поворот системы координат на необходимый угол.

Все криволинейные интегралы по длине дуги на Γ вычисляются приближённо как соответствующие определённые интегралы по промежутку $0 < s < L(\Gamma_m)$. При этом используются значения подынтегральных функций в узлах сети $0 = s_1 < s_2 < \dots < s_m < s_{m+1} = L(\Gamma_m)$, соответствующих вершинам ломаной $\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_m \zeta_1$. Интегрирование выполняется по специальной, высокоточной квадратуре [13, с. 12], аналогичной известной формуле парабол Симпсона, но не требующей, в отличие от последней, использования обязательно равномерной сети узлов.

2. Задаются положительные числа $\varepsilon_0, \varepsilon_4$ – допустимые величины абсолютных невязок граничных условий (1) и (4) соответственно. При заданном номере n формируется расширенная матрица СЛАУ (14) при $\lambda = 0$ и находится решение СЛАУ. Вычисляются величины $\sigma_n(0)$, $\sigma^{(\infty)}$ и проверяются условия (15). Если эти условия выполнены, то совершается итерационный процесс приближённого решения уравнения невязки для параметра регуляризации. Способом «пристрелки» определяется интервал $(\lambda_0; \lambda_1)$ изоляции корня $\bar{\lambda}$ ($0 \leq \lambda_0 < \lambda_1$). На каждом k -м шаге итерации методом хорд уточняется значение параметра λ_k . С новым значением $\lambda = \lambda_k$ решается СЛАУ и т.д. Условием окончания процесса итераций считается приближённое выполнение равенства (15) с заданной допустимой относительной погрешностью $\Delta_0 > 0$: $|\sigma_n(\lambda_{k_0}) / \varepsilon_0^2 - 1| < \Delta_0$. Полученные коэффициенты $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ используются для вычисления b_0 (согласно (17) и, далее, значений функции ψ_n в граничных точках $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. Сравнением с известными граничными значениями ψ в этих же точках определяется максимальная невязка граничных условий (4). Если эта невязка достаточно мала (меньше заданного ε_4), то решение задачи приближённого определения гармонических функций φ, ψ считается законченным. В противном случае номер n увеличивается, в случае необходимости величина ε_0 уменьшается и все вычисления, начиная с формирования расширенной матрицы СЛАУ при $\lambda = 0$, повторяются.

3. По найденным коэффициентам $b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ вычисляются апостериорная оценка ε_n^* точности аппроксимации функции ψ на границе Γ и предельная абсолютная погрешность Δ_n геометрической жёсткости D согласно (21) – (23). При этом для повышения точности расчёт ε_n^* выполняется по более плотному множеству узлов, нежели множество $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m$. Для этого на каждом звене ломаной $[\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ ($j=1, \dots, m$) берётся дополнительно достаточно большое число (в нашей программе – до 400) равномерно распределённых точек, и величины $R_{\max}, \delta_1, \varepsilon_2, K_n$ рассчитываются для новой сети узлов. За окончательное решение принимается найденное путём подбора параметров $m, n, \varepsilon_0, \varepsilon_4, \lambda$ значение D_n с минимальной величиной Δ_n .

Величина D_n вычисляется, согласно (18), по приближённой формуле

$$D_n \cong \sum_{j=1}^m \left((-\xi_j^2 \eta_j - \xi_j \varphi_{n,j}^*) (\xi_{j+1} - \xi_j) + (\eta_j^2 \xi_j - \eta_j \varphi_{n,j}^*) (\eta_{j+1} - \eta_j) \right).$$

Здесь $\varphi_{n,j}^* = (\varphi_n(\zeta_j) + \varphi_n(\zeta_{j+1})) / 2$ – усреднённое по двум соседним граничным точкам ζ_j, ζ_{j+1} значение многочлена φ_n ; ξ_j, η_j – прямоугольные координаты точки ζ_j .

4. Укажем способ определения величины угла γ , под которым внешняя нормаль к границе Γ_m полигона B_m в данной точке $\zeta \in \Gamma_m$ наклонена к оси абсцисс. Для внутренней точки ζ отрезка $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ ($k=1, \dots, m$) принимается $\gamma = \gamma_k$, где γ_k – угол, образованный с осью абсцисс нормалью к отрезку $[\zeta_k, \zeta_{k+1}]$. Для угловой точки ζ_k границы Γ_m за величину γ принимается среднее значение углов γ_{k-1}, γ_k , найденных для двух смежных отрезков $[\zeta_{k-1}, \zeta_k], [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$ (считаем $\zeta_0 = \zeta_m$). Такой выбор угла равносителен определённому сглаживанию границы в точке ζ_k .

6. Опробование метода

Разработан комплекс в составе трёх компьютерных программ [14], реализующих описанный метод. Программа *BoundNeum* подготавливает для дальнейшей обработки необходимые данные: пополняет, если это требуется, множество граничных точек заданного полигона, приводит систему координат к главным осям инерции и рассчитывает граничные значения нормальной производной искомой гармонической функции как решения задачи Неймана. Программа *RegulNeum* предназначена для решения краевой задачи по методу регуляризации. Полученные в результате работы этой программы коэффициенты гармонических многочленов φ_n, ψ_n передаются для дальнейшей обработки программой *RigidShaftNeum*, которая позволяет определить величину геометрической жёсткости стержня при кручении. Кроме того, эта программа может быть использована для построения полей функций φ, ψ и касательных напряжений $\tau_{zx} = \mu\theta\partial\Psi/\partial y, \tau_{zy} = -\mu\theta\partial\Psi/\partial x$ в плоскости сечения стержня (θ – угол поворота сечений на единицу длины).

Выполнено опробование метода расчётами для различных видов и размеров областей сечений: эллиптическое, треугольное, прямоугольное, в виде кругового сектора, круга с радиальным разрезом, уголка, двутавра и др. Полученные результаты сопоставлены с результатами определения величины D по методу ГЭ (прямая формулировка [8]), получившему в последние годы широкое распространение и признание.

Приведём некоторые результаты расчётов. (Все нижеприведённые рисунки получены на основе рисунков, сгенерированных графическими модулями компьютерных программ.)

1. Модель «Эллипс». Область сечения B – внутренность эллипса с полуосями 5 и 2.

2. Модель «Треугольник». B – правильный треугольник с высотой 3.

3. Модель «Квадрат». B – квадрат со стороной 2.

4. Модель «Шестиугольник». B – правильный 6-угольник со стороной 2.

5. Модель «Круговой сектор-1». B – сектор круга радиуса 1 и раствора 90° (рис. 1).

6. Модель «Круговой сектор-2». B – сектор круга радиуса 1 и раствора 45° .

7. Модель «Круг с щелью». B – круг радиуса 2 с радиальной щелью длиной 1 и шириной 0,1 (рис. 2).

8. Модель «Улитка Паскаля». B – внутренность кривой $x = 2 \cos t + \cos 2t$, $y = 2 \sin t + \sin 2t$ («улитка Паскаля») (рис. 3).

9. Модель «Уголок». B – 6-угольный полигон с 5 прямыми углами; длина большей стороны 3, меньшей – 1 (рис. 4).

10. Модель «Двутавр». B – 12-угольный полигон (рис. 5).

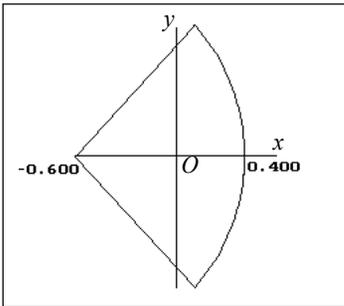


Рис. 1

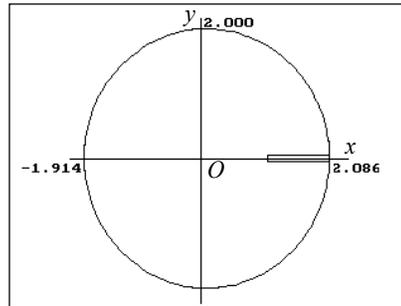


Рис. 2

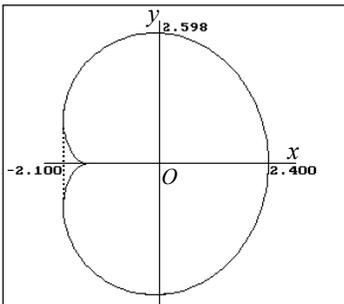


Рис. 3

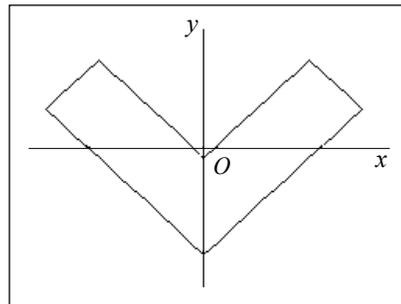


Рис. 4

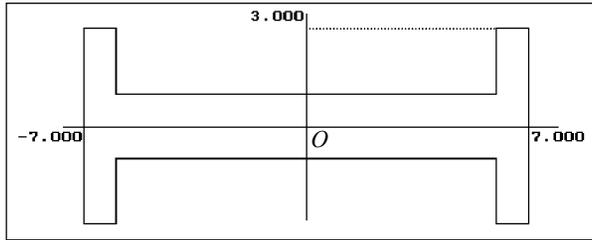


Рис. 5

В табл. 1, 2 использованы следующие обозначения: D – точное значение; D_n – приближённое решение; Δ_n – предельная абсолютная погрешность величины D ; $\delta D_n = 100|D - D_n|/D$ – фактическая относительная погрешность (%); \tilde{D}_k – приближённое решение по МГЭ с k линейными элементами.

Таблица 1

Приближённые значения геометрической жёсткости
(Модель «Эллипс», $D = 108,33$ [1])

P	m	ε_4	$\bar{\lambda}$	n	D_n	Δ_n	$\Delta_\phi D_n$	δD_n (%)
64	64	–	0	2	108,73	0,96	0,40	0,37
64	64	–	0	3	108,73	0,96	0,40	0,37
64	128	–	0	6	108,04	0,47	0,29	0,27
64	128	0,00400	0,000117	6	108,07	0,58	0,26	0,24
76	152	–	0	6	108,20	0,43	0,13	0,12
76	152	0,00010	0,000014	12	108,49	0,26	0,16	0,16
100	100	–	0	6	108,50	0,50	0,17	0,15
100	100	0,00010	0,000023	6	108,50	0,50	0,17	0,15
180	180	–	0	3	108,37	0,19	0,04	0,04
180	180	–	0	12	108,37	0,19	0,04	0,04
180	180	0,00001	0,000006	12	108,35	0,16	0,02	0,02

Таблица 2

Результаты вычисления геометрической жёсткости

Номер модели	m	n	D_n	Δ_n	δD_n (%)	D	\tilde{D}_k
	2	3	4	5	6	7	8
1	180	24	108,37	0,15	0,04	108,33 [1]	111,54 ($k = 48$)
2	90	6	3,1363	0,0226	0,60	3,1177 [1]	3,1840 ($k = 48$)
		6	3,1222	0,0075	0,14		
		24	3,1215	0,0045	0,12		
3	100	8	2,263	0,065	0,44	2,253 [3]	2,283 ($k = 48$)
		10	2,253	0,057	0,00		
		24	2,253	0,003	0,00		
4	60	10	16,647	0,510	–	–	16,695 ($k = 48$)
		12	16,576	0,389	–		
		24	16,576	0,102	–		
5	33	10	0,0828	0,0025	0,36	0,0825 [1]	0,1067 ($k = 48$)
		18	0,0823	0,0017	0,24		
		26	0,0823	0,0008	0,24		
6	195	6	0,0181	0,0000	0,00	0,0181 [1]	0,1222 ($k = 48$)

Продолжение табл. 2

1	2	3	4	5	6	7	8
7	180	10	24,313	**)	–	–*)	22,137 ($k = 34$)
	180	17	22,582	**)	–	–	21,894 ($k = 60$)
	190	30	22,654	**)	–	–	
8	150	24	53,243	0,435	0,31	53,407 [5]	52,863 ($k = 48$)
	180	30	53,269	0,218	0,26		53,631 ($k = 60$)
9	192	16	1,587	**)	–	–	2,305 ($k = 32$)
	192	28	1,589	**)	–	–	1,955 ($k = 60$)
10	192	16	119,89	**)	–	–	127,89 ($k = 60$)
		26	121,63	**)	–	–	

Примечания: *) приведём для сравнения точную величину для сплошного круга: $D = 25,133$; **) неинформативная оценка.

Таблица 2

Значения функции ψ и касательных напряжений τ_{zx}
(модель «Треугольник», $P = 3$, $m = 90$, $n = 6$, $\mu = 1$, $\theta = 1$)

№ п/п	Координаты точки		Приближённые решения		Точные решения [9]		Относительные погрешности (%)	
	x	y	$\tilde{\psi}$	$\tilde{\tau}_{zx}$	ψ	τ_{zx}	$\Delta\psi$	$\Delta\tau_{zx}$
1	0,0	0,0	0,6668	0,0000	0,6667	0,0000	0,02	–
2	0,5	0,0	0,6459	0,0000	0,6458	0,0000	0,01	–
3	–0,5	0,0	0,6459	0,0000	0,6458	0,0000	0,01	–
4	0,0	0,5	0,6668	–0,5000	0,6667	–0,5000	0,02	0,00
5	0,0	1,0	0,6669	–0,9995	0,6667	–1,0000	0,03	0,05
6	–0,5	0,5	0,6251	–0,7504	0,6250	–0,7500	0,01	0,05
7	–1,0	0,0	0,8336	0,0000	0,8333	0,0000	0,03	–
8	0,5	0,5	0,7085	–0,2498	0,7083	–0,2500	0,02	0,10
9	0,5	1,0	0,8961	–0,5000	0,8958	–0,5000	0,03	0,00
10	–1,5	0,0	1,2290	0,0000	1,2292	0,0000	0,01	–

Как видно из приведённых таблиц, с увеличением числа m узлов на границе, а также с увеличением порядка n гармонического многочлена и уменьшением ε_4 точность решений, как правило, увеличивается. Для полигональных областей достаточно высокая точность достигается даже без регуляризации (т.е. при $\lambda = 0$ – по существу, методом наименьших квадратов). Для областей с криволинейными границами, когда дополнительно сгенерированные узлы не лежат точно на границе, применение процедуры регуляризации повышает точность.

Для невыпуклых областей с угловыми граничными точками, при которых внутренние углы больше 180° (см. модели «Круг с щелью», «Уголок», «Двухтавр»), расчёт предельных погрешностей Δ_n приводит к величинам, сопоставимым с величиной D_n («неинформативная оценка»), что несколько снижает ценность метода. Однако и в этих случаях значения D_n получаются близкими к величинам, получаемым по МГЭ.

В сопоставимых условиях, при одинаковых порядках СЛАУ, решаемых нашим методом и МГЭ, величины D_n и \tilde{D}_{2n} получаются близкими, однако наш метод точнее, особенно для выпуклых областей и областей с гладкими границами. Кроме того, он часто позволяет получать довольно точные результаты даже в тех случаях, когда порядок СЛАУ (14) невелик и при этом намного меньше того порядка

соответствующей СЛАУ в МГЭ, который необходим для получения точности, сравнимой с точностью нашего метода. Высокая точность результатов, полученных в моделях с известными решениями, даёт основание считать метод надёжным. Степень «доверия» к полученному приближённо значению D оценивается по расчётной величине Δ_n : интервал $(D_n - \Delta_n; D_n + \Delta_n)$ гарантированно покрывает истинное значение D . Метод прост, не требует больших затрат времени для подготовки модели к обчёту, достаточно эффективен и обеспечивает приемлемую точность решения задачи Сен-Венана. При этом для широкого класса областей указывается гарантированная точность. По затратам машинного времени он сопоставим с МГЭ, несколько уступая последнему, в основном за счёт применения процедуры регуляризации; без её применения быстроедействие практически одинаковое: проигрывая МГЭ во времени подсчёта каждого элемента матрицы СЛАУ из-за использования в квадратурах большего числа граничных точек, наш метод выигрывает за счёт симметричности матрицы.

Метод может найти применение в инженерной практике для исследования зависимости крутильной жёсткости стержня от геометрических параметров и конфигурации его области сечения. Внося незначительные изменения, его можно применить также и к решению общих краевых задач Дирихле, Неймана и смешанной краевой задачи для гармонических функций на плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
2. Куфарев П.П. К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения // ПММ, 1937. Т.1, вып.1. С.43–76.
3. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 688 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 872 с.
5. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
6. Пожарский Д.А. Смешанные задачи теории упругости для составного плоского клина // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2008, №5. С. 36–38.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
8. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
9. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
10. Громадка Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 303 с.
11. Walsh J.L. Ueber die Entwicklung einer analytischen Function nach Polynomen // Munchen. Math. Ann. 96, 1926/27. P. 430–436.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
13. Соболев В.В., Иценко Н.В. Численное интегрирование. Методические указания к лабораторной работе с использованием ЭВМ. Ростов н/Д, РГАСХМ. 1999. 28 с.
14. Соболев В.В. Программы численного решения задачи Сен-Венана о кручении стержня произвольного сечения (программный комплекс для ЭВМ). Ростов н/Д, РГАСХМ. Зарегистрир. ГОФАП (ВНТИЦ), № 50200802492, 2008. 22 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

СОБОЛЕВ Вадим Владимирович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Математика и механика» Ростовской-на-Дону государственной академии сельскохозяйственного машиностроения. E-mail: sobolev@aanet.ru