МАТЕМАТИКА

УДК 517.54

А.И. Александров

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛЁВНЕРА, ЛЁВНЕРА – КУФАРЕВА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Даны примеры применения уравнения Лёвнера с разрывной управляющей функцией к задаче нахождения конформных отображений. Аналогичные результаты получены для уравнения Лёвнера – Куфарева.

Ключевые слова: *уравнение Лёвнера*, *уравнение Лёвнера – Куфарева*, *конформные отображения.*

Уравнение Лёвнера и уравнение Лёвнера – Куфарева можно использовать [1] для получения функций, реализующих однолистные конформные отображения круга. Каждое решение любого из этих уравнений, рассматриваемое как функция начального условия, даёт конформное отображение круга или его части на некоторую область, вид которой определяется выбором управляющей функции в уравнении Лёвнера или выбором семейства функций из класса Каратеодори – в случае уравнения Лёвнера – Куфарева [2]. Появляется возможность построения композиции конформных отображений как результата непрерывного процесса преобразования круга.

В этой статье даются простейшие примеры получения конформных отображений указанным способом. Используются разрывные управляющие функции.

1. Рассмотрим уравнение Лёвнера

$$\frac{du}{d\tau} = -u\frac{\mu(\tau)+u}{\mu(\tau)-u}, \quad 0<\tau<+\infty, \tag{1}$$

с управляющей функцией

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \mu_1(\tau) = -e^{-i\varphi_1}, & 0<\tau\le\nu, \\ \mu_2(\tau) = -e^{-i\varphi_2}, & \nu<\tau<+\infty, \end{cases}$$

где φ_1, φ_2, ν – вещественные постоянные.

Обозначим через $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$ решение уравнения (1) на $0<\tau<\nu$, для которого $\zeta_1(0, z, \mu_1) = z$, где z – точка единичного круга $E=\{z:|z|<1\}$. Найдём $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$. Уравнение (1) приводится к виду

$$\left(\frac{1}{u}+\frac{2e^{i\varphi_1}}{1-e^{i\varphi_1}u}\right)du = -d\tau,$$

и поэтому

$$\frac{u}{\left(1-e^{i\varphi_1 u}\right)^2} = Ce^{-\tau}, \quad C = \text{const}.$$

Из двух решений полученного алгебраического уравнения второй степени относительно u выбираем решение, удовлетворяющее заданному начальному условию. Имеем

$$\zeta_1(\tau, z, \mu_1) = e^{-i\varphi_1} \frac{\left(1-\sqrt{1+4e^{-\tau}w(z,\mu_1)}\right)^2}{4e^{-\tau}w(z,\mu_1)},$$

где $$w(z,\mu) = -\frac{\mu z}{(\mu+z)^2},$$

или, что то же самое,

$$\zeta(\tau, z, \mu_1) = \frac{1}{4e^{-\tau}z}\left[\mu_1 + z - \sqrt{(\mu_1+z)^2 - 4e^{-\tau}\mu_1 z}\right]^2.$$

Кругу E при отображении $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$ при фиксированном τ соответствует область $U_1(\tau,\mu_1)$, получающаяся исключением из круга $\{\ \zeta_1\colon |\zeta_1| < 1\}$ радиального разреза, начинающегося в точке $\zeta_1^0 = e^{i\varphi_1}$ и оканчивающегося в точке $\zeta_1^\tau = e^{-i\varphi_1}.\left(1-\sqrt{1-e^{-\tau}}\right)^2 e^\tau$.

При $\tau = \varphi$ $U_1(\nu,\mu_1) = \zeta_1(\nu, E, \mu_1)$, и если $\nu = +\infty$, то функция

$$f(z,\mu_1) = \lim_{\tau\to\infty} e^\tau \zeta_1(\tau, z, \mu_1) = \frac{z}{(\mu_1+z)^2}$$

отображает круг E на плоскость $\mathbb{C}$, разрезанную по лучу с параметрическим уравнением $z = \frac{e^{i\varphi_1}}{4}t$, $1 < t < +\infty$.

Функция

$$\mathrm{M}\zeta_1(\ln \mathrm{M}, z, \mu_1) = e^{-i\varphi_1} \frac{\left(1-\sqrt{1+4\mathrm{M}w(z,\mu_1)}\right)^2}{4w(z,\mu_1)} = z + \ldots$$

принадлежит классу S_M голоморфных однолистных в круге E функций $f(z)$, нормированных условиями $f(0) = 0,\quad f'(0) = 1$ и ограниченных в E: $|f(z)| \leqslant M,\ M > 1$.

Интегрирование уравнения (1) с $\mu(\tau) = \mu_2(\tau)$ на промежутке $\nu < \tau < +\infty$ и с начальным условием $u|_{\tau=\nu} = \zeta_1 \in U_1(\nu,\mu_1)$ приводит к функции

$$\zeta_2(\tau, \zeta_1, \mu_2) = e^{i\varphi_2} \frac{\left(1-\sqrt{1=4e^{\nu-\tau}w(\zeta_1,\mu_2)}\right)^2}{4e^{\nu-\tau}w(\zeta_1,\mu_2)} =$$

$$= \frac{1}{4e^{\nu-\tau}\zeta_1}\left[\mu_2 + \zeta_1 - \sqrt{(\mu_2+\zeta_1)^2 - 4e^{\nu-\tau}\mu_2\zeta_1}\right]^2.$$

Она осуществляет отображение круга $\{\ \zeta_1\colon |\zeta_1| < 1\}$ на круг $\{\ \zeta_2\colon |\zeta_2| < 1\}$ с разрезом по отрезку радиуса от точки $\zeta_2^\nu = e^{i\varphi_2}$ до точки $\zeta_2^\tau = e^{i\varphi_2}\left(1-\sqrt{1-t^{\nu-\tau}}\right)^2 e^{-(\nu-\tau)}$, а область $U_1(\nu,\mu_1)$ – на круг с двумя разрезами.

Один из них лежит на радиусе. Отображение круга E на эту область имеет вид

$$\zeta(\tau,z,\mu)=\begin{cases}\zeta_1(\tau,z,\mu_1), & 0<\tau<\nu,\\ \zeta_1(\tau,\zeta_1(\nu,z,\mu_1),\mu_2), & \nu<\tau<+\infty.\end{cases}$$

2. Предположим, что управляющая функция в уравнении Лёвнера (1) имеет вид

$$\mu(\tau)=\begin{cases}\mu_1(\tau)=e^{-i\varphi_1\tau}, & 0<\tau\le\nu,\\ \mu_2(\tau)=e^{-i\varphi_2\tau}, & \nu<\tau<+\infty,\end{cases} \tag{2}$$

где φ_1, φ_2, ν – вещественные числа.

Будем искать решение $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$ уравнения (1) на $0<\tau<\nu$, когда $\zeta_1(0, z, \mu_1) = z \in E$. Заменой $u_1=e^{i\varphi_1\tau}u$ уравнение приводится к виду

$$\frac{1-u_1}{\left(\overline{\lambda_1}+\lambda_1 u_1\right)u_1}du_1=-d\tau,\quad u_1\big|_{\tau=0}=z,$$

где $\lambda_1=1+i\varphi_1$. Интегрирование уравнения даёт семейство функций

$$\ln u_1-\frac{2}{\delta_1}\ln(1+\delta_1 u_1)=-\overline{\lambda_1}\tau+C,\quad C=\mathrm{const},$$

где $\delta_1=\lambda_1/\overline{\lambda_1}$.

Решение $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$ находится как решение уравнения

$$\frac{\zeta_1}{\left(1+\delta_1 e^{i\varphi_2\tau}\zeta_1\right)^{2/\delta_1}}=\frac{e^{-\tau}z}{(1+\delta_1 z)^{2/\delta_1}}.$$

Отметим, что $\zeta_1(\tau, z, \mu_1) = e^{-\tau}z + \ldots$, так как полагаем $1^{2/\delta_1}=1$ в соответствии с определением функции $z^{2/\delta_1}=e^{(2/\delta_1)(\ln|z|+i\arg z+2ik\pi)}$, $k\in\mathbb{Z}$, вычисленной в точке $z=1$ при $k=1$.

Аналогично находится решение $\zeta_2(\tau, z, \mu_2)$ уравнения (1) на $\nu < \tau < +\infty$, для случая $\zeta_2(\nu, \zeta_1, \mu_2) = \zeta_1(\nu, z, \mu_1) = e^{-\nu}z + \ldots$. Оно неявно задаётся уравнением

$$\frac{\zeta_2}{\left(1+\delta_2 e^{i\varphi_2\tau}\zeta_2\right)^{2/\delta_2}}=\frac{\zeta_2(\nu,z,\mu_2)e^{-(\tau-\nu)}}{\left(1+\delta_2 e^{i\varphi_2\nu}\zeta_2(\nu,z,\mu_2)\right)^{2/\delta_2}},$$

где $\delta_2=(1+i\varphi_2)/(1-i\varphi_2)$.

Функция $e^{\tau}\zeta_2(\tau, \zeta_1, \mu_2)$ однолистна в области $\zeta_1(\nu, E, \mu_1)$. По теореме об однолистной предельной функции

$$\zeta_2=\frac{\zeta_1(\nu,z,\mu_2)e^{\nu}}{\left(1+\delta_2 e^{i\varphi_2\nu}\zeta_1(\nu,z,\mu_1)\right)^{2/\delta_2}}$$

однолистна в E.

Таким образом, функции $\mu(\tau)$, представленной формулой (2), соответствует решение

$$\zeta(\tau,z,\mu)=\begin{cases}\zeta_1(\tau,z,\mu_1), & 0<\tau<\nu,\\ \zeta_2(\tau,\zeta_1(\nu,z,\mu_1),\mu_2), & \nu<\tau<+\infty,\end{cases}$$

уравнения (1) с начальным условием $\zeta(0, z, \mu) = z \in E$.

3. Пусть

$$\mu(\tau)=\begin{cases}\mu_1(\tau)=e^{-(\nu-\tau)}+i\sqrt{1-e^{-2(\nu-\tau)}}, & 0<\tau\le\nu,\\ \mu_2(\tau)=1, & \nu<\tau<+\infty.\end{cases} \tag{3}$$

Функция

$$P(z,\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu(\tau)+z}{\mu(\tau)-z}+\frac{\overline{\mu(\tau)}+z}{\overline{\mu(\tau)}-z}\right)$$

голоморфна в E, $\operatorname{Re} P(z,\tau)>0$ в E, $P(0,\tau)=1$, т.е. $P(z,\tau)$ принадлежит при фиксированном τ классу Каратеодори.

Рассмотрим уравнение Лёвнера – Куфарева

$$\frac{du}{d\tau}=-uP(u,\tau),\quad 0<\tau<\infty, \tag{4}$$

и решим его с начальным условием $u|_{\tau=0}=z\in E$. Имеем

$$\frac{1-2\operatorname{Re}\mu(\tau)u+u^2}{u(1-u^2)}du=-d\tau. \tag{5}$$

На промежутке $0<\tau\le\nu$ функция $\operatorname{Re}\mu(\tau)=e^{-(\nu-\tau)}$. Полагая $\nu-\tau=v$, получаем для функции $v=v(u)$ уравнение

$$\frac{dv}{du}=\frac{1+u^2}{u(1-u^2)}v-\frac{2}{1-u^2},\quad v|_{u=z}=e^{\nu},$$

являющееся линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\frac{dv}{du}=\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}$$

имеет вид

$$v=\frac{Cu}{1-u^2},\quad C=\text{const}.$$

Методом вариации постоянной приходим к уравнению

$$\frac{u}{1-u^2}\frac{dC}{du}=-\frac{2}{1-u^2},$$

показывающему, что общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$v=(-2\ln u+D)\frac{u}{1-u^2},\quad D=\text{const},$$

а искомое частное решение $\zeta_1(\tau,z,\mu_1)=e^{-\tau}z+\ldots$ даётся как решение уравнения

$$\left(\frac{1-u^2}{u}e^{-\tau}-\frac{1-z^2}{z}\right)e^{\nu}+2\ln\frac{u}{z}=0,\quad 0<\tau<\nu,$$

при условии выбора той ветви логарифма, для которой $\ln 1=0$. Оно продолжается как голоморфное отображение на границу круга E за исключением конечного множества точек, лежащих на единичной окружности.

Функция $\zeta_1(\tau, z, \mu_1)$ отображает E на область $U(\tau,\mu_1)$, получающуюся из круга $\{\zeta_1 : |\zeta_1| < 1\}$ проведением двух разрезов. Один из них начинается в точке $\mu_1(\tau)$, оканчивается в точке $\zeta_1(\tau, \mu_1(0), \mu_1)$ и лежит в верхнем полукруге. Другой разрез симметричен первому относительно вещественной оси. При $\tau = \nu$ оба разреза начинаются в точке $\zeta_1 = 1$.

На промежутке $\nu < \tau < +\infty$ функция $\operatorname{Re}\mu(\tau) = 1$. Интегрирование уравнения (5) с $\mu(\tau) = \mu_2(\tau) = 1$ и начальным условием $u|_{\tau=\nu} = \zeta_1 \subset U(\nu,\mu_1)$ приводит к функции

$$\zeta_2(\tau,\zeta_1,\mu_2) = \frac{m}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{2}{m}}\right)^2,$$

где
$$m = \frac{\zeta_1}{(1+\zeta_1)^2}e^{-(\nu-\tau)}.$$

Рассматриваемому уравнению Лёвнера – Куфарева соответствует конформное отображение круга E, даваемое формулой

$$\zeta(\tau,z,\mu) = \begin{cases} \zeta_1(\tau,z,\mu_1), & 0 < \tau \le \nu, \\ \zeta_2(\tau,\zeta_1(\nu,z,\mu_1),\mu_2), & \nu < \tau < +\infty. \end{cases}$$

Область $\zeta(\tau, E, \mu)$ при $\tau = \nu$ представляет собой единичный круг с разрезами по некоторому промежутку $[a,1)$, $0<a<1$, и двум симметричным дугам с общим концом в точке a.

4. Пусть $e_k = e^{\frac{2\pi ik}{p}}$, $k = 0,\dots,p-1$, – корни степени p из единицы. Рассмотрим уравнение Лёвнера – Куфарева (4) с функцией

$$P(u,\tau) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{e_k\mu(\tau)+u}{e_k\mu(\tau)-u}, \quad 0 < \tau < +\infty,$$

где $|\mu(\tau)| = 1$. Так как

$$\ln\left(1-w^p\right) = \sum_{k=0}^{p-1}\ln(e_k - w),$$

то после дифференцирования по w имеем

$$\frac{pw^{p-1}}{1-w^p} = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{e_k - w},$$

откуда следует, что

$$\frac{1+w^p}{1-w^p} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{e_k + w}{e_k - w}.$$

Поэтому

$$P(u,\tau) = \frac{\mu^p(\tau)+u^p}{\mu^p(\tau)-u^p}$$

и уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{du}{d\tau} = -u\frac{\mu^p(\tau)+u^p}{\mu^p(\tau)-u^p}, \quad 0<\tau<+\infty,$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{p}\frac{du^p}{d\tau} = -u^p\frac{\mu^p(\tau)+u^p}{\mu^p(\tau)-u^p}, \quad 0<\tau<+\infty.$$

Будем считать $\mu(\tau) = 1$. Сделав замены $u^p = v$, $p\tau = t$, приходим к уравнению

$$\frac{dv}{dt} = -v\frac{1+v}{1-v}, \quad 0<\tau<+\infty,$$

с начальным условием $\zeta|_{t=0} = z^p \in E$.

Интегрирование уравнения и переход к первоначальным переменным приводит к отображению

$$\zeta(\tau, z, 1) = \frac{1}{\sqrt[p]{4}e^{-\tau}z}\left[1+z^p-\sqrt{\left(1+z^p\right)^2-4e^{-p\tau}z^p}\,\right]^{2/p}$$

круга E на область, получаемую из круга $\{\zeta\colon |\zeta|<1\}$ проведением p прямолинейных разрезов от точки e_k до точки $e_k\left(1-\sqrt{1-e^{-p\tau}}\right)^{2/\tau}$, $0,\ldots,p-1$. Эта область имеет p-кратную симметрию вращения относительно точки $\zeta = 0$.

Уравнение (4) можно использовать с различными $\mu(\tau)$ для нахождения других отображений круга на области с p-кратной симметрией вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
2. *Александров И.А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

АЛЕКСАНДРОВ Александр Игоревич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории математического анализа научно-исследовательской части Томского государственного университета. E-mail: aai@igrem.ru

Статья принята в печать 09.01.2009 г.