УДК 519.21 (075.8)

Г.Ш. Лев, А.В. Фролов

К ЗАДАЧЕ О ВЕРОЯТНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ

Рассмотрен обобщенный процесс умножения, для которого установлены необходимое и достаточное условия его вырождения.

Ключевые слова: *момент поглощения, вероятность поглощения.*

1. Введение Пусть на вероятностном пространстве (**E**, **F**, **P**) заданы две последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин $\{\tau_i > 0\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$; M$\gamma_i = a$. С этими последовательностями свяжем случайный процесс $\{Y(t),\, t \geq 0\}$, определяемый следующим образом:

а) $Y(0) = x > 0$; пусть $t_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$, $t_0 = 0$, тогда при $t_{n-1} < t < t_n$

$$Y(t) = [Y(t_n) - (t - t_n)]_+;$$

б) $Y_n = Y(t_n) = f_n(Y(t_n) - 0)$, где $b_+ = \max(b,0)$ – положительная часть числа b, а функция f_n допускает представление

$$f_n = [x + \gamma_n \varphi(x)]_+ ,$$

при этом $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x)$ возрастает и выпукла при $x > 0$. Кроме того,

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty ,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 0 ,\ \varphi(x) = 0,\ x \leq 0.$$

Момент времени $\tau = \min\{t\colon Y(t) = 0\}$ назовем *моментом поглощения*, а вероятность $g(x) = \mathbf{P}(\tau < \infty \mid Y(0) = x)$ – *вероятностью поглощения*. Обозначим через

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x, \gamma_1, \gamma_2,\ldots, \gamma_n)$$

суперпозицию функций $f_1, f_2,\ldots, f_n$. Процессы похожего типа рассмотрены в работах [1 – 4] и могут рассматриваться в качестве математических моделей в различных задачах прикладного характера наряду с ветвящимися и пуассоновскими процессами.

2. Вспомогательные утверждения

Утверждение 1. *Если* $\gamma_1 < 0$, *то*

$$Y_1 \leq f_1(x) - \tau_1 \frac{f_1(x)}{x}, \qquad (*)$$

$$Y_1 \geq f_1(x) - \tau_1.$$

Доказательство. Ограничимся доказательством первого из двух неравенств. Если $\tau_1 > x$, то (*), очевидно, выполняется. Если же $\tau_1 < x$, то рассмотрим два случая. В первом случае:

$$Y_1 = f_1(x - \tau_1) = (x - \tau_1) + \gamma_1\varphi(x - \tau_1) > 0.$$

Далее, нетрудно установить, что функция $\varphi(x)/x$ убывает при $x \geq 0$, поэтому выполнено

$$\frac{\varphi(x)}{x} \geq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\tau_1)}{\tau_1}.$$

Отсюда получаем последовательно

$$\tau_1\left(-\frac{\gamma_1\varphi(x)}{x}\right) \geq -\gamma_1\left(\varphi(x)-\varphi(x-\tau_1)\right);$$

$$\tau_1\left(1-\frac{f_1(x)}{x}\right) \geq (-\gamma_1)\left(\varphi(x)-\varphi(x-\tau_1)\right).$$

Прибавим x к обеим частям последнего неравенства и найдем

$$Y_1 = x-\tau_1+\gamma_1\varphi(x-\tau_1) < x+\gamma_1 x-\tau_1\frac{f_1(x)}{x},$$

что эквивалентно (*).

В случае, когда $(x - \tau_1) + \gamma_1\varphi(x - \tau_1) \leq 0$, имеем $Y_1 = 0, f_1(x) \geq 0$ и (*), с очевидностью, выполняется.

Утверждение 2. *Если* $\gamma_1 > 0$ *и* $\gamma_2 < 0$, то

$$f^{(2)}(x, \gamma_1, \gamma_2) \geq f^{(2)}(x, \gamma_2, \gamma_1),$$

$$Y_2 = Y(x, \gamma_1, \gamma_2) \geq Y(x, \gamma_2, \gamma_1). \tag{**}$$

Доказательство. Докажем (**) – второе из сформулированных неравенств. Оно, очевидно, верно, если $\tau_1 \geq x$ или $\tau_2 \geq (x - \tau_1) + \gamma_2\varphi(x - \tau_1)$. Если эти неравенства не выполнены, то, в частности, $\tau_1 + \tau_2 < x$.

Неравенство (**) будет доказано, если установим

$$\gamma_1(\varphi(x - \tau_1) - \varphi(x - \tau_1 - \tau_2 + \gamma_2\varphi(x - \tau_1))) \geq$$
$$\geq - \gamma_2(\varphi(x - \tau_1 - \tau_2 + \gamma_1\varphi(x - \tau_1)) - \varphi(x - \tau_1)).$$

Последнее неравенство следует из следующего неравенства:

$$\gamma_1(\varphi(x-\tau_1-\tau_2)-\varphi(x-\tau_1-\tau_2+\gamma_2\varphi(x-\tau_1)))\geq$$
$$\geq-\gamma_2(\varphi(x-\tau_1-\tau_2+\gamma_1\varphi(x-\tau_1))-\varphi(x-\tau_1-\tau_2)).$$

Оно справедливо, ибо по теореме о среднем

$$-\gamma_1\gamma_2\varphi(x - \tau_1)\varphi'(\theta_1) \geq -\gamma_1\gamma_2\varphi(x - \tau_1)\varphi'(\theta_2),$$
$$\theta_1 < x - \tau_1 - \tau_2 < \theta_2.$$

3. Основные результаты

В этом разделе мы сформулируем основные результаты, доказательство которых основано на приведенных выше утверждениях. При этом потребуем выполнение условия

(**A**): существует число $0 < p < 1$, такое, что функция $h(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^p}$ убывает при достаточно больших x.

При выполнении условия (**A**) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $M\gamma_1 = a > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i$, *тогда*

$$\lim_{x\to\infty} P\left(\lim_{n\to\infty} S_n^{-1}\cdot \int\limits_x^{f^{(n)}(x,\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)} \frac{dt}{\varphi(t)}=1\right)=1 .$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{M}\gamma_1 = a > 0$; *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(\tau_n > f^{(n)}(x,1,1,\dots,1)\right)$ *сходится тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.

Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения:

$$S_n^+ = \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i)_+ ,\ S_n^- = \sum_{i=1}^{n}(\gamma_i)_- ,\ b=\mathrm{M}(\gamma_i)_+ ,\ -c=\mathrm{M}(\gamma_i)_- ,\ a=b-c ,$$

$$f_+^{(n)}(x)=f_n\left(x,(\gamma_1)_+,\dots,(\gamma_n)_+\right),\ f_-^{(n)}(x)=f_n\left(x,(\gamma_1)_-,\dots,(\gamma_n)_-\right).$$

С учетом введенных обозначений и утверждения 2, имеем

$$f^{(n)}(x)\ge f_+^{(n)}\left(f_-^{(n)}(x)\right). \tag{1}$$

Определим последовательности $\{x_k\}_1^\infty$ и $\{n_k\}_1^\infty$ следующим образом:

$$x_0 = x > 0,\ n_0 = \delta x_0 / \varphi(x_0),\ \ x_{k+1} = f_{n_k}(x_k),$$

$$n_k = \delta x_k / \varphi(x_k),\ N_0 = 0,\ N_{k+1} = N_k + n_k.$$

Здесь и в дальнейшем большие числа, в случае необходимости, будем считать целыми и условие (**А**) выполненным при всех x. Через $B(\varepsilon, x)$ обозначим множество, на котором выполняется

$$\begin{aligned}&\left|S_n^+ - bn\right| < \varepsilon\cdot n,\ n>n_0,\\ &\left|S_n^- + cn\right| < \varepsilon\cdot n,\ n>n_0.\end{aligned} \tag{2}$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty} B(\varepsilon,x)=1 \tag{3}$$

при фиксированном $\varepsilon > 0$. Покажем, что при подходящем подборе чисел ε, $\delta > 0$, на множестве $B(\varepsilon, x)$ выполняется

$$x_{k+1} \ge x_k(1+\delta_1),\ \delta_1 = a\delta/2. \tag{4}$$

Доказательство проведем по индукции. Согласно (2),

$$f_-^{(n_k)}(x_k)\ge x_k-\varphi(x_k)\left(-S_{N_{k+1}}^- + S_{N_k}^-\right)\ge x_k-\varphi(x_k)\left(n_k c+2\varepsilon N_{k+1}\right)\ge$$

$$\ge x_k - n_k\varphi(x_k)(c+2\varepsilon z_k) = x_k-\delta x_k(c+2\varepsilon z_k).$$

Далее,

$$\frac{n_k}{n_{k-1}}=\frac{x_k}{\varphi(x_k)}\cdot\frac{\varphi(x_{k-1})}{x_{k-1}}=\frac{x_k^{1-p}}{x_{k-1}^{1-p}}\cdot\frac{h(x_{k-1})}{h(x_k)}\ge(1+\delta_1)^{1-p}=1+\alpha,\ \alpha>0.$$

Поэтому

$$z_k \le \frac{N_{k+1}}{n_k}\le\sum_{n=0}^{\infty}(1+\alpha)^{-n}=\frac{1+\alpha}{\alpha}=z$$

и, окончательно,

$$f_{n_k}^-(x_k)\ge x_k(1-\delta c-2\delta\varepsilon z)=x_k(1-\delta_2).$$

Затем, согласно (1),

$$x_{k+1} = f^{(n_k)}(x_k) \ge f_+^{(n_k)}\left(f_-^{(n_k)}(x_k)\right) \ge$$

$$\ge x_k(1-\delta_2) + \varphi(x_k(1-\delta_2))\left(S^+_{N_{k+1}} - S^+_{N_k}\right) \ge$$

$$\ge x_k(1-\delta_2) + \varphi(x_k(1-\delta_2))\, n_k(b-2\varepsilon z) =$$

$$= x_k(1-\delta_2) + \delta\varphi(x_k(1-\delta_2))\cdot\frac{x_k}{\varphi(x_k)}\cdot(b-2\varepsilon z) \ge$$

$$\ge x_k(1-\delta_2) + \delta(1-\delta_2)x_k(b-2\varepsilon z) =$$

$$= x_k(1-\delta c-2\delta\varepsilon z)(1+\delta b-2\varepsilon z) \ge x_k\left(1+\frac{\delta a}{2}\right).$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$\delta < \frac{a}{4bc},\ \varepsilon(4z + c(p)b) < \frac{a}{4},$$

где $c(p) \ge z\delta$ при $0 < \delta < 1$ и фиксированном p.

При этом

$$\delta_2 = \delta c + 2\varepsilon c(p) \le \frac{a}{4b} + \frac{a}{4b} < \frac{1}{2},$$

что обеспечивает неравенство $f^-_{n_k}(x_k) > 0$. Итак, утверждение (4) доказано.

Пусть $N_k \le n < N_{k+1}$, тогда

$$\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi\left(f^{(n)}(x)\right)} \ge \frac{x_k(1-\delta_2)\varphi(x_k)}{\varphi(x_k(1-\delta_2))\varphi(x_k)} = (1-\delta_2)n_k\frac{\varphi(x_k)}{\varphi(x_k(1-\delta_2))} \ge (1-\delta_2)n_k$$

и
$$\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi\left(f^{(n)}(x)\right)} \ge (1-\delta_2)\frac{n_k}{N_{k+1}}\cdot N_{k+1} = (1-\delta_2)N_{k+1}z^{-1} \ge (1-\delta_2)nz^{-1}.$$

Рассмотрим событие

$$B_1(\varepsilon, x) = \left\{|\gamma_i| < \varepsilon\frac{f^{(i-1)}(x)}{\varphi\left(f^{(i-1)}(x)\right)},\quad i = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Поскольку $\mathrm{M}\,|\gamma_i| < \infty$, то для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} B_1(\varepsilon, x) = 1.$$

Обозначим

$$I_n(x) = \int\limits_{f^{(n-1)}(x)}^{f^{(n)}(x)} \frac{dt}{\varphi(t)}.$$

Если $\gamma_n > 0$, то

$$\frac{\varphi\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{\varphi\left(f^{(n)}(x)\right)} < \frac{I_n(x)}{\gamma_n} < 1.$$

Далее, применив теорему о среднем и свойства функции $\varphi(x)$, получим

$$A_n = 1 - \frac{\varphi\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{\varphi\left(f^{(n)}(x)\right)} \le \gamma_n \varphi'\left(f^{(n-1)}(x)\right) \le \gamma_n \frac{\varphi\left(f^{(n-1)}(x)\right)}{f^{(n-1)}(x)}.$$

Следовательно, на множестве $B \cdot B_1$ выполняется

$$1 - \varepsilon \le \frac{I_n(x)}{\gamma_n} \le 1 .$$

Аналогично, если $\gamma_n < 0$, найдем

$$1 < \frac{I_n(x)}{\gamma_n} < 1 + \varepsilon$$

на множестве $B \cdot B_2$, где

$$B_2 = B_2(\varepsilon, x) = \left\{ \gamma_n, |\gamma_n| < \varepsilon \frac{f^{(n)}(x)}{\varphi\left(f^{(n)}(x)\right)}, \quad n = 0,1,2,\ldots \right\}.$$

Поэтому на множестве $B_1 \cdot B_2 \cdot B$ имеем

$$B(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{S_n} \int_x^{f^{(n)}(x)} \frac{dt}{\varphi(t)} \right) \le 1 + \varepsilon$$

и
$$A(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{1}{S_n} \int_x^{f^{(n)}(x)} \frac{dt}{\varphi(t)} \right) \ge 1 - \varepsilon .$$

Рассмотрим случайную величину

$$\tau = \tau(x, y) = \min\{n : f^{(n)}(x) > y\}$$

и события

$$C(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x) = \infty \right),$$

$$C(x, y) = \{\tau(x, y) < \infty\},$$

$$D(\varepsilon, x) = B(x) - A(x) < \varepsilon .$$

Для неотрицательных убывающих последовательностей $\{\varepsilon_k\}$ и $\{\delta_k\}$, таких, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = \lim_{k\to\infty} \delta_k = 0,$$

найдутся числа $x_n > 0$, для которых справедливо

$$\mathbf{P}(D(\varepsilon_k, x_k)) \ge (1 - \delta_k).$$

Поскольку $C(x) \le C(x, y)$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(D(\varepsilon_k, x_k)) \ge \mathbf{P}(C(x))(1 - \delta_k),$$

если $\varepsilon_k < \varepsilon$.

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathbf{P}(D(\varepsilon, x)) \ge \mathbf{P}(C(x)) \to 1 \text{ при } x \to \infty.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получим $A(x) = B(x)$ на множестве $C(x)$ и справедливость теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 технически аналогично доказательству теоремы 1 и опускается по причине громоздкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaver D.R.* An absorption probability problem // J. Math. Anal. Appl. 1964. V. 9. No. 3. P. 384 – 393.
2. *Гринцевичус А.К.* О непрерывности распределения одной суммы зависимых величин, связанной с независимыми, по прямым // Теор. вероятн. и ее примен. 1974. Т. 19. Вып. 1. С. 164 – 198.
3. *Лев Г.Ш.* Полумарковские процессы умножения со сносом // Там же. 1972. Т. 17. № 1. С. 160 – 166.
4. *Лев Г.Ш.* Обобщенные процессы умножения // Там же. 1987. Т. 32. Вып. 4. С. 751 – 760.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ЛЕВ Герш Шахнович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова. E-mail: vmmm@smtp.ru.
ФРОЛОВ Антон Викторович – аспирант кафедры высшей математики и математического моделирования, Алтайского государственного технического университета им. И.И. Ползунова. E-mail: vmmm@smtp.ru.

Статья принята в печать 30.11.2008 г.