УДК 512.623

Е.А. Фомина

КРИТЕРИЙ БЕСКОНЕЧНО УЗКОГО ПОЛЯ

В статье рассмотрен пример поля, допускающего как линейное, так и двумерное упорядочивание, но не являющегося бесконечно узким полем. Сформулирован и доказан критерий бесконечно узкого поля.

Ключевые слова: *линейно упорядоченные поля, положительный конус, двумерно упорядоченные поля.*

Основные определения теории двумерно упорядоченных полей

Основные определения, относящиеся к теории двумерно упорядоченных полей, изложены в [1]. Приведем те из них, которые часто встречаются в тексте статьи.

1. Пусть M – произвольное непустое множество. Зададим функцию $\zeta\colon M^3 \to \{0, 1, -1\}$. Функция ζ называется *функцией двумерного порядка*, если

$$\forall A \subset M,\ |A| \le 5$$

существует инъекция $\varphi\colon A \to \mathbf{R^2}$, такая, что

$$\forall x, y, z \in A \ \ \zeta(x, y, z) = \eta_2(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z)),$$

где η_2 – функция стандартной ориентации плоскости.

2. Поле K, на котором задан двумерный порядок, совместимый с алгебраической структурой поля, называется *двумерно упорядоченным* полем $<K, \zeta>$, или 2-упорядоченным полем.

3. *Базой* K_0 двумерно упорядоченного поля K называется множество

$$K_0 = \{x \in K |\ \zeta(0, 1, x) = 0\}.$$

База K_0 является линейно упорядоченным полем.

4. *Верхним конусом* K^u поля K называется множество

$$K^u = \{x \in K |\ \zeta(0, 1, x) \ge 0\}.$$

Задание верхнего конуса K^u однозначно определяет двумерный порядок в поле K. Поэтому далее 2-упорядоченное поле будем обозначать $<K, K^u>$.

5. *Нижним конусом* $-K^u$ поля K называется множество

$$-K^u = \{x \in K |\ \zeta(0, 1, x) \le 0\}.$$

6. *Правым конусом* K^r двумерно упорядоченного поля $<K, K^u>$ называется множество

$$K^r = \{x \in K |\ (x \in K^u, x^2 \in K^u \setminus K_0) \vee (x \in -K^u, x^2 \in -K^u \setminus K_0) \vee x \in K_0^+\}.$$

7. В поле $<K, K^u>$ зададим *предпорядок* $<$ следующим образом:

$$\forall x, y \in K, x < y, \text{ тогда и только тогда, когда } (y - x) \in K^r.$$

8. Элемент $a \in K^u \setminus K_0$ называется *бесконечно близким к базе* K_0 элементом, если $\forall n, \forall r \in K_0,\ r < a$,

$$(a - r)^n \in K^u \setminus K_0.$$

Аналогично, $a \in -K^u \setminus K_0$ называется *бесконечно близким к базе* K_0 элементом, если $\forall n$, $\forall r \in K_0$, $r < a$,

$$(a - r)^n \in -K^u \setminus K_0 .$$

9. Поле $<K, K^u>$ называется *бесконечно узким*, если каждый его элемент либо бесконечно близок к базе K_0, либо является элементом базы.

Конструкции бесконечно узких двумерно упорядоченных полей

В [2] описана конструкция бесконечно узкого поля. Пусть K_0 – линейно упорядоченное поле, элемент a – трансцендентен над K_0. Тогда в линейно упорядоченном поле $K_1 = K_0(a)$ множество

$$K_1{}^u = \{f(a) \in K(a) | f'(a) \geq 0\}$$

является верхним конусом двумерного порядка, относительно которого поле K_1 является бесконечно узким полем.

Далее, эта конструкция была обобщена. Пусть B – базис трансцендентности топологического замыкания $\tilde{K}_0$ над K_0. На $\tilde{K}_0$ единственным образом продолжается линейный порядок с K_0. Рассмотрим поле $K = K_0(B)$. Элементами поля K являются дробно-рациональные функции $f_i(a_1, ..., a_n)$ с коэффициентами из поля K_0.

Теорема. Множество

$$K^u = \{f(a_1, ..., a_n) \in K \mid df(a_1, ..., a_n) \geq 0\},$$

где

$$df(a_1,...,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \,;\, x_i = a_i;\, dx_i = 1,$$

задаёт в линейно упорядоченном поле K структуру бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля.

Пример поля, не являющегося бесконечно узким

Исследование этих конструкций бесконечно узких полей приводит к следующему вопросу. Пусть поле K допускает и линейное, и двумерное упорядочивание. Всегда ли в этом случае оно будет бесконечно узким?

В [1] дана классификация полей характеристики нуль. В частности, выделен класс полей, допускающих как линейное, так и двумерное упорядочивание. Это формально вещественные поля, не изоморфные никакому подполю нормального расширения поля **Q**.

Рассмотрим поле $K = \mathrm{Q}(\sqrt[3]{2})$. С одной стороны, поле K линейно упорядочено, как подполе **R**. С другой – $\mathrm{Q}(\sqrt[3]{2}) \cong \mathrm{Q}(\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i})$. Поле $\mathrm{Q}(\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i})$ допускает двумерное упорядочивание, как подполе поля **C**. Следовательно, и поле K допускает двумерное упорядочивание.

Покажем, что поле K не допускает структуры двумерного порядка, относительно которого оно является бесконечно узким полем. Элемент $\sqrt[3]{2}$ как элемент двумерно упорядоченного поля $<K, K^u>$ может принадлежать либо открытому верхнему конусу $K^u \setminus \mathbf{Q}$, либо открытому нижнему конусу $-K^u \setminus \mathbf{Q}$. В обоих случаях он не является бесконечно близким к базе **Q** поля K. Действительно (см. определение 7), при $n = 3$, $r = 0$, $(\sqrt[3]{2} - 0)^3 = 2$; $2 \in \mathbf{Q}$.

Критерий бесконечно узкого поля

Теорема. Пусть K – нетривиальное 2-упорядоченное поле, т.е. $K^u \neq K_0$.

K является бесконечно узким тогда и только тогда, когда правый конус K^r поля K является также и положительным конусом поля K, т.е. $K^r = K^+$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть K – бесконечно узкое поле. Покажем, что в этом случае $K^r = K^+$. Другими словами, для K^r справедливы следующие условия:

(1) $K^r + K^r = K^r$;

(2) $K^r \cdot K^r = K^r$;

(3) $K^r \cap -K^r = \varnothing$;

(4) $K^r \cup -K^r = K\backslash\{0\}$.

Условия (1) и (3) справедливы для правого конуса K^r любого двумерно упорядоченного поля $<K, K^u>$ [1]. Докажем (2) и (4).

(2) Пусть $a, b \in K^r$. Докажем, что $ab \in K^r$.

Если хотя бы один из элементов a, b принадлежит $K_0^{\ +}$, то утверждение доказано (см. лемму 4.1.1. [1]). С учётом оговоренного, возможны следующие случаи расположения элементов:

2a) $a, b \in K^u \backslash K_0$;

2b) $a, b \in -K^u \backslash K_0$;

2c) $a \in K^u \backslash K_0$, $b \in -K^u \backslash K_0$;

2d) $a \in -K^u \backslash K_0$, $b \in K^u \backslash K_0$.

Ситуации 2c и 2d рассмотрены в [1] и доказано (теорема 4.2.2), что в этих случаях $ab \in K^r$.

Рассмотрим случай 2a. Положим для определённости, что $ab^{-1} \in K^u \backslash K_0$. Так как $a, b \in K^r$, то $a^2, b^2 \in K^u \backslash K_0$.

Справедлива следующая

Лемма (лемма 3.3.6 [1]). Пусть $x, y \in K^u$, $xy^{-1} \in K^u \backslash K_0$, $xz^{-1} \in K^u$, $zy^{-1} \in K^u$. Тогда $z \in K^u$.

Положим в условиях леммы $x = a^2$, $y = a$, $z = ab$. Тогда, действительно, $xy^{-1} = a \in K^u \backslash K_0$, $xz^{-1} = ab^{-1} \in K^u \backslash K_0$, $zy^{-1} = b \in K^u$. Значит, $z = ab \in K^u \backslash K_0$.

Так как поле K – бесконечно узкое, то элемент $(ab)^2$ также принадлежит $K^u \backslash K_0$. Значит, согласно определению правого конуса, $ab \in K^r$.

Случай 2b рассматривается аналогично случаю 2a, только множество $K^u \backslash K_0$ нужно заменить на $-K^u \backslash K_0$.

Итак, (2) доказано.

(4) Пусть $a \in K$, $a \neq 0$.

В общем случае двумерно упорядоченного поля множество элементов

$$\{x \in K\backslash\{0\} \mid (x \in K^u \backslash K_0, x^2 \in K_0) \vee (x \in -K^u \backslash K_0, x^2 \in K_0)\}$$

не принадлежит множеству $(K^r \cup -K^r)$.

В бесконечно узком поле таких элементов нет. Действительно, если $x \in K^u \backslash K_0$, то в случае $x > 0$ элемент $x^2 \in K^u \backslash K_0$; в случае $x < 0$ элемент $x^2 \in -K^u \backslash K_0$. Ситуация аналогична, если $x \in -K^u \backslash K_0$.

Следовательно, $K^r \cup -K^r = K\backslash\{0\}$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть для правого конуса K^r поля K выполнены условия (1)– (4).

Покажем, что поле K в этом случае является бесконечно узким.

Пусть $x \in K$. Если $x \in K_0$, то утверждение доказано. Рассмотрим случай, когда $x \in K^u \setminus K_0$. Докажем, что

$$\forall n, \forall r \in K_0, r < a, \ (a - r)^n \in K^u \setminus K_0.$$

Имеем $\forall r \in K_0$, $r < a$, элемент $(a - r) \in (K^u \cap K^r) \setminus K_0$.

Так как имеет место условие (2), то для каждого натурального k элемент $(a - r)^k \in K^r$. По определению правого конуса для $n = 2k$ элемент $(a - r)^n \in K^u \setminus K_0$.

Пусть $n = 2k + 1$. Тогда применим лемму 3.3.6. [1] (см. выше). Положим в условиях леммы $x = (a - r)^{2k+2}$, $y = (a - r)^{2k}$, $z = (a - r)^{2k+1}$. Тогда, действительно, $xy^{-1} = (a - r)^2 \in K^u \setminus K_0$, $xz^{-1} = (a - r) \in K^u \setminus K_0$, $zy^{-1} = (a - r) \in K^u$. Значит, $z = (a - r)^{2k+1} \in K^u \setminus K_0$. Таким образом, доказано, что $\forall n, \forall r \in K_0, r < a, \ (a - r)^n \in K^u \setminus K_0$.

Случай, когда $x \in -K^u \setminus K_0$, рассматривается аналогично. Значит, K – бесконечно узкое поле. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск, 2003.
2. *Пестов Г.Г., Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50 – 53.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ФОМИНА Елена Анатольевна – аспирантка кафедры математического анализа механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ef@sibmail. com

Статья принята в печать 03.11.2008 г.