

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О ПРОЕКТИВНО ИНВАРИАНТНЫХ ПОДГРУППАХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Выделены некоторые типы проективно инвариантных подгрупп абелевых групп, являющиеся вполне инвариантными. Описаны сепарабельные группы, в которых все проективно инвариантные подгруппы вполне инвариантны.

Ключевые слова: *вполне инвариантная подгруппа, проективно инвариантная подгруппа.*

Пусть A – абелева группа. Запись $H \leq A$ означает, что H – подгруппа в A ; $H \leq \text{fi } A$, что H – вполне инвариантная подгруппа в A ; $H \leq \text{pi } A$, что H – проективно инвариантная подгруппа в A ; $E(A)$ – кольцо эндоморфизмов группы A ; если не оговорено противное, то A_p – p -компонента, $t(A)$ – периодическая часть группы A . $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – кольцо всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ – поле или аддитивная группа всех рациональных чисел.

Пусть B и C – группы, X – непустое подмножество в C . Обозначим через $\text{Hom}(C, B)X = \sum_{f \in \text{Hom}(C, B)} f(X)$ – подгруппу, порожденную всеми гомоморфными образами подмножества X в группе B (гомоморфная оболочка подмножества X в группе B).

Подгруппа $H \leq A$ называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для каждого эндоморфизма f группы A . *Проекцией* группы называется всякий ее идемпотентный эндоморфизм. Подгруппа $H \leq A$ называется *проективно инвариантной*, если $\pi H \subseteq H$ для каждой проекции π группы A . В неразложимой группе каждая подгруппа является pi -подгруппой. Всякая неразложимая редуцированная группа является либо циклической p -группой (в такой группе все подгруппы вполне инвариантны), либо неразложимой группой без кручения (в такой группе каждая подгруппа вполне инвариантна тогда и только тогда, когда кольцо эндоморфизмов группы изоморфно кольцу целых чисел).

Отметим, что в [1] доказано, что в периодической сепарабельной группе все pi -подгруппы вполне инвариантны. Ряд свойств pi -подгрупп и описаний некоторых классов групп, в которых все pi -подгруппы являются вполне инвариантными, получен в [2].

Лемма 1 [2, лемма 2]. 1) Пусть π, ρ – проекции группы A , причем $\pi A \leq \text{pi } A$. Тогда $(1-\pi)\rho(1-\pi)$ также является проекцией группы A .

2) Пусть H – pi -подгруппа группы $A = B \oplus C$. Тогда $H \cap B \leq \text{pi } B$, $H \cap C \leq \text{pi } C$ и $\text{Hom}(C, B)(H \cap C) \subseteq H \cap B$, $\text{Hom}(B, C)(H \cap B) \subseteq H \cap C$.

3) Пусть $A = B \oplus C$, $B \leq \text{fi } A$, $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ и $H = B_1 \oplus C_1$. Тогда $H \leq \text{pi } A$ в точности тогда, когда $B_1 \leq \text{pi } B$, $C_1 \leq \text{pi } C$ и $\text{Hom}(C, B)C_1 \subseteq B_1$.

Лемма 2 [2, лемма 4, п. 1)]. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ – фиксированное разложение группы A и $H \leq \text{ri } A$. Тогда условие $H \leq \text{fi } A$ равносильно тому, что $H \cap A_i \leq \text{fi } A_i$ для всех $i \in I$.

Напомним, что fi -подгруппа G p -группы A называется *широкой* [3, § 67], если $G + B = A$ для каждой базисной подгруппы B группы A . Покажем, что всякая ri -подгруппа G редуцированной p -группы A с аналогичным свойством является fi -подгруппой. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда A не сепарабельна. В начале заметим, что $p^0 A \subseteq G$. Воспользуемся доказательством п. д) из [3, § 67]. Пусть $a = b + g \in p^0 A$, где $b \in B$, $g \in G$ ($p^0 A = A^1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} nA$ для p -группы A). Вложим b в конечное прямое слагаемое B' группы B и запишем $A = B' \oplus A'$. Если $\pi: A \rightarrow A'$ – проекция, то $\pi a = \pi g \in G$. Но $(1 - \pi)a = 0$ как элемент бесконечной высоты в B' . Следовательно, $a = \pi g \in G$. Пусть теперь $r_n = \min_{g \in G} h(p^n g)$, где $h(a)$ – высота элемента a . Поскольку $A^1 \subseteq p^n A$ и A – редуцированная группа, то все r_n – целые числа. Имеем $G \subseteq A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$, где $A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots) = \{a \in A \mid H(a) \geq (r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)\}$, а $H(a)$ – индикатор элемента a . Теперь достаточно показать, что $G = A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ [3, теорема 67.2]. Пусть $a \in A(r_0, r_1, \dots, r_n, \dots)$ и $H(a) = (s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n = \infty)$, где, как в теореме 67.2 из [3], можно считать, что $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ – неотрицательные целые числа. В теореме 67.2 показано, что найдется элемент $g \in G$ со свойством $H(g) = (r_0, r_1, \dots, r_n, \infty)$. Вложим g в некоторое конечное прямое слагаемое C группы A [3, лемма 65.4], $A = C \oplus N$. Если $a = c + y$, где $c \in C$, $y \in N$, то $H(a) = H(c) \cap H(y)$. В частности, $H(a) \leq H(c)$, $H(y)$. Имеем $H(g) \leq H(a) \leq H(y)$. Поэтому существует $\phi \in E(A)$ со свойством $\phi(g) = y$ [3; лемма 65.5, упр. 6, п. б)]. Согласно лемме 1, $y \in G \cap N$. А поскольку C – сепарабельная группа, то $G \cap C \leq \text{fi } C$. Поэтому если $f(g) = c$ для некоторого $f \in E(C)$, то $f(g) = c \in G \cap C$. Итак, $a \in G$.

Напомним, что для порядкового числа σ подгруппа $p^\sigma A$ определяется следующим образом: $p^0 A = A$, $p^{\sigma+1} A = p(p^\sigma A)$ и $p^\sigma A = \bigcap_{\beta < \sigma} p^\beta A$, если σ – предельное число. Наименьшее порядковое число τ , для которого $p^{\tau+1} A = p^\tau A$, называется p -длиной группы A ; $p^\tau A$ в этом случае является максимальной p -делимой подгруппой в A .

Если A – p -группа и a – ее элемент порядка p^k , то число k называется *экспонентой* $e(a)$ элемента a .

Лемма 3. Пусть A – неограниченная p -группа. Тогда

- 1) если $0 \neq H \leq \text{ri } A$, то $H \cap (p^n A[p]) \neq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;
- 2) если, кроме того, группа A вполне транзитивна $0 \neq G \leq \text{fi } A$, то $G \cap (p^\sigma A[p]) \neq 0$ для каждого порядкового числа σ со свойством $p^\sigma A \neq 0$.

Доказательство. 1) Пусть D – делимая часть группы A . Тогда если $A = C \oplus D$, то $H = (H \cap C) \oplus (H \cap D)$. В силу инъективности группы D для любых

$0 \neq c \in (H \cap C)[p]$ и $0 \neq d \in D[p]$ отображение $c \rightarrow d$ продолжается до гомоморфизма $C \rightarrow D$. Согласно лемме 1, п. 2, $d \in H \cap (D[p])$. Осталось заметить, что $D \subseteq p^n A$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть теперь группа A редуцированная. Допустим, что $\langle a \rangle \cap H \neq 0$ для некоторого циклического прямого слагаемого $\langle a \rangle$ группы A . Тогда для всякого элемента c экспоненты $e(c) = n + 1 \geq k = e(a)$, принадлежащего дополнительному прямому слагаемому C , отображение $\langle a \rangle \rightarrow p^{n+1-k} c$ продолжается до гомоморфизма $\langle a \rangle \rightarrow C$. Отсюда следует, что $H \cap (p^n C[p]) \neq 0$.

Допустим, что H имеет нулевое пересечение со всяким циклическим прямым слагаемым группы A . Тогда $H \cap B = 0$ для каждой базисной подгруппы B группы A . Запишем B в виде $B = \bigoplus_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_n = 0$ или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^n . Для каждого n имеет место прямое разложение $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_n \oplus A_n$, где $A_n = (\bigoplus_{i=n+1}^{\infty} B_i) + p^n A$. В силу предположения $H \subseteq A_n$. Хорошо известно, что $p^n A$, значит, и $p^n A[p]$ – существенные подгруппы в A_n [3; § 32, упр. 9]. Откуда $H \cap (p^n A[p]) \neq 0$.

2) Следует из того, что если $g \in G[p]$, то для любого $a \in A[p]$ с индикатором $H(a) \geq H(g)$ существует $\varphi \in E(A)$ со свойством $\varphi g = a$.

Из леммы 3 вытекает, что в неограниченной редуцированной вполне транзитивной p -группе, p -длина которой является предельным порядковым числом σ , нет минимальных $\mathfrak{f}$ -подгрупп. Действительно, если H – минимальная $\mathfrak{f}$ -подгруппа, то $H = H \cap (p^\beta A[p])$ для каждого порядкового числа $\beta < \sigma$. Откуда $H = \bigcap_{\beta < \sigma} (H \cap (p^\beta A[p])) \subseteq \bigcap_{\beta < \sigma} p^\beta A[p] = 0$. В частности, в неограниченной редуцированной сепарабельной p -группе нет минимальных $\mathfrak{f}$ -подгрупп. Если же p -длина редуцированной вполне транзитивной p -группы равна $\sigma + 1$, то $p^\sigma A$ будет минимальной $\mathfrak{f}$ -подгруппой (а если подгруппа $p^\sigma A$ неразложима, она будет минимальной $\mathfrak{f}$ -подгруппой и без условия вполне транзитивности группы A). Если же p -группа нередуцированная и D – ее делимая часть, то $D[p]$ – минимальная $\mathfrak{f}$ -подгруппа.

Покажем, что если A – неограниченная редуцированная p -группа, то у нее нет максимальных $\mathfrak{r}$ -подгрупп (воспользуемся идеей доказательства А.П. Дика соответствующего утверждения для $\mathfrak{f}$ -подгрупп). Действительно, если H – максимальная $\mathfrak{r}$ -подгруппа, $y \in A \setminus H$, $e(y) = k$, то $H + A[p^k] = A$, где $A[p^k] = \{a \in A \mid p^k a = 0\}$. Пусть теперь $\langle x \rangle$ – такое прямое слагаемое группы A , что $e(x) = m > k$. Тогда $x = h + a$ для некоторых $h \in H$, $a \in A[p^k]$. Так как $p^k x = p^k h$, то $\langle h \rangle$ – прямое слагаемое группы A , $A = \langle h \rangle \oplus C$. Если $y = h' + c$ для некоторых $h' \in \langle h \rangle$ и $c \in C$, то $p^k y = p^k h' + p^k c = 0$. Поэтому $e(c) \leq k$, значит, $\langle c \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle h \rangle$. По лемме 1, п. 2 $\langle c \rangle \subseteq H \cap C$ и, следовательно, $y \in H$. Противоречие.

Если A – ограниченная p -группа и $p^k A = 0$, где $k \geq 2$ и $p^{k-1} A \neq 0$, то $A[p^{k-1}]$ – наибольшая $\mathfrak{r}$ -подгруппа. В элементарной p -группе каждая ее ненулевая $\mathfrak{r}$ -подгруппа совпадает с самой группой. Если же A – нередуцированная p -группа с неограниченной редуцированной частью, то максимальных $\mathfrak{r}$ -подгрупп опять нет.

Если же редуцированная часть ограничена, то наибольшая ri -подгруппа совпадает с суммой делимой части и наибольшей ri -подгруппой ее ограниченной части. В делимой p -группе максимальных ri -подгрупп нет.

Пусть p – простое число. Обозначим через C p -компоненту группы A . В [4, теорема 1.1] описаны fi -подгруппы G группы A со свойством $pA \subseteq G \subseteq C+pA$. В частности, теорема 1.1 из [4] дает описание fi -подгрупп, содержащих pA , произвольной p -группы A , а также группы A с p -делимой факторгруппой A/C . Рассмотрим ri -подгруппы группы A , содержащие pA . Из теоремы 1 следует, что периодическая часть всякой такой подгруппы является fi -подгруппой в A .

Теорема 1. Подгруппа G группы A , содержащая pA , является проективно инвариантной тогда и только тогда, когда G совпадает с одной из следующих подгрупп: pA , $C[p^k]+pA$, $C+pA$, $H+pA$, где $k \in \mathbb{N}$, а H – такая проективно инвариантная подгруппа группы A , что $C \subseteq H$.

Доказательство. Необходимость. Пусть B – базисная подгруппа группы A . Тогда $A = B+pA$. Запишем B в виде $B = B_0 \oplus B'$, где B_0 – свободная группа (или $B_0 = 0$), $B' = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$, а $B_i = 0$ или является прямой суммой циклических групп одного и того же порядка p^i . Поскольку каждая B_i для $i \geq 1$ – прямое слагаемое в A , а $G \leq \text{ri } A$, то $G \cap B = (G \cap B_0) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} (G \cap B_i)$.

Допустим, что $G \neq pA$ и пусть $a \in G \setminus pA$. В силу равенства $G = (G \cap B) + pA$ считаем, что $a \in B$. Имеем $a = b_0 + b_{i_1} + \dots + b_{i_n}$, где $b_0 \in B_0$ и $b_{i_s} \in B_{i_s}$. Ввиду включения $pA \subseteq G$ можно считать, что если $b_0 \neq 0$, то $b_0 \notin pB_0$ и, аналогично, $b_{i_s} \notin pB_{i_s}$. Отсюда $G \cap B_{i_s} \neq pB_{i_s}$ ($s = 1, \dots, n$). Заметим, что $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m \oplus A_m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, где $A_m = (B_0 \oplus \bigoplus_{i \geq m+1} B_i) + p^m A$. Отсюда в силу леммы 2, п. 2 следует, что если $G \cap B_k \neq pB_k$ для некоторого $k \geq 1$, то $G \cap B_k = B_k$ и $G \cap B_j = B_j$ для каждого $j = 1, \dots, k$. Аналогично, если $b_0 \notin pB_0$ (такой элемент найдется, если $G \cap B_0 \neq pB_0$), то $B_1 \oplus \dots \oplus B_m \subseteq G$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда $B' \subseteq G$ и, значит, $C \subseteq B' + pA \subseteq G$. Таким образом, либо $G \cap B = B_1 \oplus \dots \oplus B_k \oplus p(\bigoplus_{i \geq k+1} B_i) \oplus pB_0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, либо $B' \subseteq G$.

В первом случае $G \subseteq (G \cap B) + pA = B_1 \oplus \dots \oplus B_k + pA = B_1 \oplus \dots \oplus B_k + pA_k$. При доказательстве импликации $2) \Rightarrow 3)$ в [4, теорема 1.1] показано, что $B_1 \oplus \dots \oplus B_k + pA_k = C[p^k] + pA$ (учесть равенство $A_k = (B_0 \oplus \bigoplus_{i \geq k+1} B_i) + p^k A$, где порядки элементов из $\bigoplus_{i \geq k+1} B_i \geq p^{k+1}$, откуда будет следовать включение $C[p^k] = A[p^k] \subseteq B_1 \oplus \dots \oplus B_k + pA_k$).

Во втором случае, если $C+pA \subseteq G$, то пусть H – ri -подгруппа в A , порожденная подгруппами $G \cap B$ и C . Тогда $H+pA = G$.

Достаточность очевидна.

Ранг подгруппы B_0 назовем p -рангом без кручения группы A (это инвариант группы A). Если в условиях предыдущей теоремы $G \cap B_0 = B_0$, то $G = A$. Отсюда вытекает

Следствие 1. Если p -ранг без кручения группы $A \leq 1$, то всякая ее проективно инвариантная подгруппа, содержащая pA , является вполне инвариантной и совпадает с одной из следующих подгрупп: pA , $C[p^k]+pA$, $C+pA$ или A , где k – некоторое натуральное число.

Следствие 2. Пусть A – такая группа, что каждый ее элемент содержится в некотором прямом слагаемом, являющемся прямой суммой групп p -ранга без кручения ≤ 1 . Тогда всякая p -подгруппа H группы A со свойством $pA \subseteq H$ является вполне инвариантной.

Доказательство. Пусть $a \in H$ и $a \in B = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где B – заявленное прямое слагаемое в A , $a = a_1 + \dots + a_n$, $a_j \in A_{i_j}$ ($j = 1, \dots, n$). Имеем $a_j \in H \cap A_{i_j} \leq p A_{i_j}$. Поэтому по следствию 1 $f(a_j) \in H \cap A_{i_j}$ для каждого $f \in E(A_{i_j})$. Этого по лемме 2 достаточно, чтобы H была вполне инвариантной в A .

Группа A называется *сепарабельной*, если любое конечное подмножество ее элементов можно вложить в прямое слагаемое, являющееся прямой суммой групп ранга 1 (каждая группа ранга 1 изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathbf{Q}$ или подгруппе группы Z_{p^∞} для некоторого простого p).

Покажем, что всякая p -подгруппа H сепарабельной группы A является сепарабельной. Кроме того, факторгруппа A/H также сепарабельна. Действительно, если $x_1, \dots, x_k \in H$, то существует разложение $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n \oplus B$, где $A_1, \dots, A_n$ – группы ранга 1 и $x_1, \dots, x_k \in A_1 \oplus \dots \oplus A_n$. Имеем $H = (H \cap A_1) \oplus \dots \oplus (H \cap A_n) \oplus (H \cap B)$, где каждая из групп $H \cap A_1, \dots, H \cap A_n$ либо нулевая, либо группа ранга 1, а в прямой сумме этих групп содержатся все элементы $x_1, \dots, x_k$. Далее, $A/H = (A_1 + H)/H \oplus \dots \oplus (A_n + H)/H \oplus (B + H)/H$, где $(A_i + H)/H \cong A_i/(A_i \cap H)$ для каждого $i = 1, \dots, n$. Если A_i – подгруппа группы Z_{p^∞} , то такова же и ее факторгруппа $A_i/(A_i \cap H)$. Если же A_i – группа без кручения ранга 1, то при $A_i \cap H \neq 0$ факторгруппа $A_i/(A_i \cap H)$ изоморфна подгруппе группы $\bigoplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$ для некоторого множества Π простых чисел, зависящего от i . Таким образом, каждая $A_i/(A_i \cap H)$ – прямая сумма групп ранга 1 и прямое слагаемое $\bigoplus_{i=1}^n (A_i + H)/H$ группы A/H содержит смежные классы $x_i + H$.

Теорема 2. Пусть A – сепарабельная группа. Каждая ее p -подгруппа является p -подгруппой тогда и только тогда, когда A обладает следующим свойством: если ее прямое слагаемое B , являющееся группой без кручения ранга 1, p -делимо для некоторого простого числа p , то в дополнительном прямом слагаемом имеется прямое слагаемое, изоморфное B .

Доказательство. Необходимость. Пусть $pB = B$ и в дополнительном прямом слагаемом C нет прямого слагаемого, изоморфного B . Пусть $V = \text{Hom}(B, C)B$. Тогда $B' = B \oplus V \leq \text{fi } A$ и $V \leq \text{fi } A$. Поэтому если $A = F \oplus N$, то $B' = (B' \cap F) \oplus (B' \cap N)$ и $V = (V \cap F) \oplus (V \cap N)$. Так как $B \cong B'/V \cong (B' \cap F)/(V \cap F) \oplus (B' \cap N)/(V \cap N)$, то в правой части одно из слагаемых, скажем первое, равно нулю, т.е. $B' \cap F = V \cap F$. Если те-

перь $0 \neq b \in B$ и $H = \langle b \rangle \oplus V$, то $(V \cap F) \oplus (H \cap N) = (H \cap F) \oplus (H \cap N) = H$. Значит, $H \leq \text{ri } A$. Однако $\langle b \rangle \not\leq \text{fi } B$ и, следовательно, $H \not\leq \text{fi } A$.

Достаточность. Пусть $H \leq \text{ri } A$, $x \in H$. Так как A сепарабельна, то x принадлежит прямому слагаемому $G_1 \oplus \dots \oplus G_n$, $x = g_1 + \dots + g_n$, где $g_i \in H \cap G_i$, $r(G_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Согласно лемме 2, достаточно показать, что $f_i(g_i) \in H$ для $f_i \in E(G_i)$. Если G_i – подгруппа группы Z_{p^∞} , то в G_i каждая подгруппа вполне инвариантна.

Пусть G_i – группа без кручения. Тогда $E(G_i)$ изоморфно подкольцу кольца $\mathbf{Q}$, порожденному такими дробями $1/p$, что $pG_i = G_i$. Если множество $\{p \mid pG_i = G_i, p - \text{простое число}\}$ пусто, то $E(G_i) \cong \mathbf{Z}$ и, следовательно, $f_i(g_i) \in H \cap G_i$. Если же $pG_i = G_i$ для некоторого простого p , то по условию для G_i найдется такая подгруппа $B_i \cong G_i$, что $G_i \oplus B_i$ – прямое слагаемое в A . Пусть $\chi(b_i) = \chi(f_i(g_i))$, где $b_i \in B_i$. По лемме 1 $b_i \in H$ и, значит, $f_i(g_i) \in H$.

Отметим, что в [5] автор получил следующее описание векторных групп, каждая ri -подгруппа которых является fi -подгруппой.

Теорема 3. В редуцированной векторной группе $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – группы без кручения ранга 1, каждая проективно инвариантная подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда группа A представима в виде прямой суммы $A = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4$ векторных групп G_1, G_2, G_3, G_4 , где $G_1 \cong G_2$, G_3 изоморфна некоторому прямому слагаемому в G_2 , прямые слагаемые ранга 1 групп $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$ и G_4 не изоморфны, ранг группы G_4 конечен и G_4 не имеет ненулевых элементов бесконечной p -высоты для каждого простого числа p .

ЛИТЕРАТУРА

1. Megibben C. Projective-invariant subgroups of abelian groups // Tamkand J. Math. 1977. V. 8. No. 2. P. 177 – 182.
2. Чехлов А.Р. Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2008. № 1(2). С. 76 – 82.
3. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 335 с.; 1977. Т. 2. 416 с.
4. Еремина М.В., Крылов П.А. Тензорное произведение абелевых групп как нетеров модуль над кольцом эндоморфизмов // Изв. вузов. Математика. 2001. № 4. С. 16 – 23.
5. Чехлов А.Р. Векторные группы, инвариантные относительно проекций, подгруппы которых вполне характеристичны // Междунар. конф. по матем. и механ. Томск, 2008. С. 67.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 18.12.2008 г.