УДК 517.51

Е.С. Коган

ПОЛУЧЕНИЕ ТОЧНЫХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ КОНСТАНТ В ОЦЕНКЕ СКОРОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КЛАССА $Lip_M 1$ НЕКОТОРЫМИ МЕТОДАМИ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Предлагаемая работа посвящена решению задачи получения точных аппроксимационных констант в оценке скорости приближения функций класса $Lip_M 1$ некоторыми методами суммирования рядов Фурье. В качестве методов суммирования рядов Фурье используются сингулярные операторы типа свертки. В статье предложены два метода решения этой задачи.

Ключевые слова: *методы суммирования рядов Фурье*, *точные аппроксимационные константы*, *точные константы*, *оценка скорости приближения*, *функционал*, *аппроксимативная последовательность операторов.*

1. Введение

Одной из основных задач теории приближений является получение оценок вида $\|L_n(f)-f\| \le \alpha_n(f)$, где L_n – аппроксимирующая последовательность операторов; f – приближаемая функция; $\alpha_n(f)$ – выражение, содержащее индивидуальные характеристики f или характеристики класса, которому принадлежит f. Кроме того, выражение $\alpha_n(f)$ содержит и некоторые характеристики L_n. Эти характеристики, в случае когда рассматривается конкретная последовательность L_n, могут фигурировать в виде констант, не зависящих от f и n. Одна из актуальных задач теории приближений – получение таких констант, которые дают наименьшее из возможных значений для $\alpha_n(f)$.

Постановка задачи получения точных констант в общем виде сформулирована в работах Н.П. Корнейчука [5]. Предлагаемая статья посвящена частному случаю этой проблемы: рассматривается приближение функций, принадлежащих классам $Lip_M 1$, некоторыми конкретными методами суммирования рядов Фурье. Для конкретной последовательности L_n ставится задача определения величины

$$U_n(L_n,\alpha) = \sup\{\|L_n(f)-f\| : f \in Lip_1\alpha\},$$

а если

$$U_n(L_n,\alpha) = A_{\text{н}}^{L,\alpha} \cdot n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha}),$$

(где обозначено $L=\{L_n\}$), то в качестве основной проблемы рассматривается задача определения констант $A_{\text{н}}^{L,\alpha}$ (нижний символ «н» обозначает «наилучшая»).

В этой статье рассматривается следующий набор операторов, являющихся методами суммирования рядов Фурье: операторы Баскакова $M_n^{[m](k_1,\dots k_m)}$ [2], операторы $D_{n,6}^{(2)}$ [4], полученные в работе Е.М. Ершовой.

Операторы Баскакова имеют вид

$$M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}(f,x)=\frac{2^{m-1}\prod\limits_{i=1}^{m}\sin^2\frac{\pi k_i}{n}}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t+x)\sin^2\frac{nt}{2}dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod\limits_{i=1}^{m}\left(\cos t-\cos\frac{2\pi k_i}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-m-1}\lambda_{i,n}^{[m](k_1,\dots,k_m)}\cos it\right)dt\,. \qquad (1)$$

Аналитическое выражение коэффициентов $\lambda_{i,n}^{[m](k_1,\dots k_m)}$ получено в [3].

Как видно из последнего равенства, последовательность операторов $M_n^{[m](k_1,\dots k_m)}$ является методом суммирования рядов Фурье и определяется параметрами m, $k_1,\dots,k_m$. Соответствующие константы будем обозначать $A_{\text{н}}^{[m](k_1,\dots k_m)}$ (нижний символ «н» означает «наилучшее» в обозначении константы).

Операторы, полученные в работе Е. М. Ершовой, имеют вид

$$D_{n,6}^{(2)}(f,x)=\frac{10}{\pi n\left((1-\cos\frac{\sqrt{6}}{n})(11n^4+5n^2+4)-10(n^2+1)\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^6(\cos t-\cos\frac{\sqrt{6}}{n})dt\,.$$

Соответствующие константы обозначим $A_{\text{н}}^{D}$.

2. Получение точной константы в оценке приближения функций класса $Lip_1 1$ операторами $M_n^{[1](k)}$ методом исследования на экстремум

Рассмотрим получение аналитического выражения для константы $A_{\text{н}}^{[1](k)}$ в равенстве

$$U_n=\sup\left\{\left\|M_n^{[1](k)}(f,x)-f\right\|: f\in Lip_1 1\right\}=A_{\text{н}}^{[1](k)}\cdot n^{-1}+o(n^{-1})\,. \qquad (2)$$

Очевидно, если такая константа будет найдена, то для любой функции $f\in Lip_M 1$ можно записать

$$\left\|M_n^{[1](k)}(f,x)-f\right\|\le A_{\text{н}}^{[1](k)}\cdot M\cdot n^{-1}+o(n^{-1})\,. \qquad (3)$$

При этом в силу (2) константу $A_{\text{н}}^{[1](k)}$ в неравенстве нельзя заменить на меньшую.

Пусть $f\in C_{2\pi}\cap Lip_M 1$ зафиксировано произвольным образом, тогда для любого $x\in R$ имеем

$$M_n^{[1](k)}(f,x)-f(x)=\int\limits_0^{\pi}(f(x+t)+f(x-t)-2f(x))u_n(t)dt\,, \qquad (*)$$

где $u_n(t)=\dfrac{\sin^2\dfrac{\pi k}{n}\cdot\sin^2\dfrac{nt}{2}}{\pi n\cdot\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot\left(\cos t-\cos\dfrac{2\pi k}{n}\right)}$.

Обозначим $\varphi(x,t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, $t\in[0,\pi]$.

Тогда $M_n^{[1](k)}(f,x)-f(x)=\int\limits_0^\pi\varphi(x,t)u_n(t)dt$.

Следует заметить, что $\varphi(x,t)\in Lip_{2M}1$ для каждого $x\in R$.

Пусть n таково, что выполняется $\dfrac{2k\pi}{n}<\pi$.

Для $r\in[0,k\pi]$ определим функцию φ_r на $[0,\pi]$ по формуле

$$\varphi_r(t)=\begin{cases} t, & \text{если } t\in\left[0,\dfrac{2r}{n}\right],\\ \dfrac{4r}{n}-t, & \text{если } t\in\left(\dfrac{2r}{n},\pi\right].\end{cases}$$

Если для определенной выше функции $\varphi(x,t)$ и фиксированного n подобрать r так, что $2M\varphi_r\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)=\varphi\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, то

$$\int\limits_0^\pi\varphi(x,t)u_n(t)dt\le 2M\int\limits_0^\pi\varphi_r(t)u_n(t)dt. \tag{4}$$

Неравенство (4) выполняется в силу того, что если $t\in\left[0,\dfrac{2k\pi}{n}\right]$, то $\varphi_r(t)\ge\varphi(x,t)$ и $u_n(t)\ge 0$, а если $t\in\left[\dfrac{2k\pi}{n},\pi\right]$, то $\varphi_r(t)\le\varphi(x,t)$ и $u_n(t)\le 0$.

Таким образом, $U_n=\max\limits_{0\le r\le k\pi}2\int\limits_0^\pi\varphi_r(t)u_n(t)dt$.

С другой стороны,

$$2\int\limits_0^\pi\varphi_r(t)u_n(t)dt=\frac{4k^2\pi}{n}\left(\int\limits_0^r\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2k^2-t^2)}-\int\limits_r^\infty\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2k^2-t^2)}+\right.$$
$$\left.+2r\int\limits_r^\infty\frac{\sin^2 tdt}{t^2(\pi^2k^2-t^2)}\right)+o(n^{-1}).$$

При этом можно подобрать оценку остатка, которая не зависит от r.

Проведем исследование на экстремум функции

$$\Phi(r)=\int\limits_0^r\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2k^2-t^2)}-\int\limits_r^\infty\frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2k^2-t^2)}+2r\int\limits_r^\infty\frac{\sin^2 tdt}{t^2(\pi^2k^2-t^2)}.$$

Имеем

$$\Phi'(r) = \frac{\sin^2 r}{r(\pi^2 k^2 - r^2)} + \frac{\sin^2 r}{r(\pi^2 k^2 - r^2)} - 2\frac{\sin^2 r}{r(\pi^2 k^2 - r^2)} +$$

$$+2\int_r^\infty \frac{\sin^2 tdt}{t^2(\pi^2 k^2 - t^2)} = 2\int_r^\infty \frac{\sin^2 tdt}{t^2(\pi^2 k^2 - t^2)}.$$

Следовательно, функция $\Phi(r)$ имеет экстремум в точке $r_0 \in [0, k\pi]$, такой что

$$\int_{r_0}^\infty \frac{\sin^2 tdt}{t^2(\pi^2 k^2 - t^2)} = 0 . \tag{5}$$

Заметим, что константа r_0, удовлетворяющая равенству (5), не зависит от n.

А так как $\Phi''(r_0) = -\dfrac{\sin^2 r_0}{r_0^2(\pi^2 k^2 - r_0^2)} < 0$, то в точке $r = r_0$ функция $\Phi(r)$ имеет максимум.

Итак,

$$A_{\text{н}}^{[1](k)} = 4k^2\pi\left(\int_0^{r_0} \frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2 k^2 - t^2)} - \int_{r_0}^\infty \frac{\sin^2 tdt}{t(\pi^2 k^2 - t^2)}\right). \tag{6}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для функции $f \in C_{2\pi}$, $f \in Lip_M 1$ выполняется оценка

$$\left\| M_n^{[1](k)}(f(t), x) - f(x) \right\| \le A_{\text{н}}^{[1](k)} \cdot M \cdot n^{-1} + o(n^{-1}),$$

где константа $A_{\text{н}}^{[1](k)}$, определенная равенствами (6) и (5), не может быть уменьшена на классе $Lip_M 1$.

Описанный выше метод хорошо срабатывает при $m = 1$. Если его применять при $m = 2$ (в [7] рассматривается случай $m = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$), то мы приходим к исследованию на экстремум функции двух переменных. Распространить его на случай произвольного m представляется бесперспективным. Ниже предлагается другой метод получения констант $A_H^{[m](k_1,\dots k_m)}$, который можно распространить и на операторы, не входящие в группу $M_n^{[m](k_1,\dots k_m)}$.

3. Некоторые утверждения общего характера

Рассмотрим линейные операторы

$$L_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x) w_n(t)\, dt , \tag{7}$$

где $w_n(t)$ – четная непрерывная функция, имеющая простые нули в точках множества $T = \{\tau_i\}_{i=1}^m$ (T зависит от n) и не имеющая других простых нулей на $(0, \pi)$.

Полагаем, что τ_i перенумерованы в порядке возрастания $0<\tau_1<\tau_2<\ldots$ $\ldots<\tau_{m-1}<\tau_m<\pi$. Условимся обозначать $\tau_0=0$ (целесообразность такого обозначения будет ясна далее). Полагаем, кроме того, $w_n(0)>0$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} w_n(t)dt=1$.

Положим $z(t)=\prod\limits_{k=1}^{m}(\tau_k^2-t^2)$, $\Delta^+=\{t: z(t)\ge 0, t\in[-\pi,\pi]\}$, $\Delta^-=[-\pi,\pi]\setminus\Delta^+$.

Пусть $\varphi_0(t)-2\pi$ – периодическая функция, определенная на $[-\pi,\pi]$ следующим образом:

$$\varphi_0(t)=\begin{cases}|t|, & \text{если } t\in\Delta^+,\\ -|t|, & \text{если } t\in\Delta^-.\end{cases}$$

Предложение 1. Для любой функции $f\in Lip_M 1$ выполняется

$$\|L_n(f,x)-f\|\le M\cdot L_n(\varphi_0(t),0). \tag{8}$$

Доказательство. В силу того, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} w_n(t)dt=1$ и $L_n(f,x)$ имеет вид (7), получим для любого x

$$L_n(f,x)-f(x)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(t+x)-f(x))w_n(t)dt.$$

Так как $f\in Lip_M 1$, то $|f(t+x)-f(x)|\le M|t|$.

Отсюда следует

$$|L_n(f,x)-f(x)|\le\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(t+x)-f(x)|\cdot|w_n(t)|dt\le M\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cdot|w_n(t)|dt=$$

$$=M\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\cdot w_n(t)dt=M\cdot L_n(\varphi_0(t),0),$$

то есть в силу произвольности x получим (8), что и требовалось доказать.

Функция φ_0 является разрывной и, следовательно, классу $Lip_M 1$ не принадлежит. Поэтому возможно усиление неравенства (8).

Пусть $f\in Lip_M 1$, при этом $f(0)=0$. Рассмотрим поведение этой функции на отрезке $[\tau_i,\tau_{i+1}]$, если $f(\tau_i)=y_i$,$f(\tau_{i+1})=y_{i+1}$. Полагаем $i=0,1,\ldots,m-1$, при этом $y_0=0$,$\tau_0=0$.

Из того, что

$$|f(t)-f(\tau_i)|\le M\cdot|t-\tau_i| \text{ и } |f(t)-f(\tau_{i+1})|\le M\cdot|t-\tau_{i+1}|,$$

следует $\mu_i(t)\le f(t)\le\eta_i(t)$, где

$$\mu_i(t)=\begin{cases}y_i+M(t-\tau_i), & \text{если } t\in\left[\tau_i,\tau_i^{\max}\right],\\ y_{i+1}-M(t-\tau_{i+1}), & \text{если } t\in\left[\tau_i^{\max},\tau_{i+1}\right],\end{cases}$$

и

$$\tau_i^{\max} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{2M}, \tag{9}$$

$$\eta_i(t) = \begin{cases} y_i - M(t - \tau_i), & \text{если } t \in \left[\tau_i, \tau_i^{\min}\right], \\ y_{i+1} + M(t - \tau_{i+1}), & \text{если } t \in \left[\tau_i^{\min}, \tau_{i+1}\right], \end{cases}$$

и

$$\tau_i^{\min} = \frac{\tau_i + \tau_{i+1}}{2} + \frac{y_i - y_{i+1}}{2M}. \tag{10}$$

На отрезке $[\tau_m, \pi]$ $f(t)$ должна удовлетворять неравенствам

$$-M(t - \tau_m) + y_m \le f(t) \le M(t - \tau_m) + y_m.$$

Обозначим $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$. Пусть далее $\psi_Y^{\max}(t)$,$\psi_Y^{\min}(t)$ – четные 2π-периодические функции, которые на каждом из отрезков $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ $i = 0,1,...,m-1$ определены следующим образом:

$$\psi_Y^{\max}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \text{и } w_n(t) \ge 0, \\ \eta_i(t), \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \text{и } w_n(t) \le 0. \end{cases}$$

$$\psi_Y^{\min}(t) = \begin{cases} \mu_i(t), \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \text{и } w_n(t) \le 0, \\ \eta_i(t), \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \text{и } w_n(t) \ge 0. \end{cases}$$

На отрезке $[\tau_m, \pi]$ эти функции определяются аналогично:

$$\psi_Y^{\max}(t) = \begin{cases} M(t - \tau_m) + y_m, \text{если } t \in [\tau_m, \pi] \text{и } w_n(t) \ge 0, \\ -M(t - \tau_m) + y_m, \text{если } t \in [\tau_m, \pi] \text{и } w_n(t) \le 0. \end{cases}$$

$$\psi_Y^{\min}(t) = \begin{cases} M(t - \tau_m) + y_m, \text{если } t \in [\tau_m, \pi] \text{и } w_n(t) \le 0, \\ -M(t - \tau_m) + y_m, \text{если } t \in [\tau_m, \pi] \text{и } w_n(t) \ge 0. \end{cases}$$

График любой функции $\psi_Y^{\max}$ на $[0, \pi]$ представляет собой ломаную, звеньями которой являются отрезки графиков линейных функций с угловым коэффициентом, равным M или $-M$.

Прежде чем дать более детальное описание этих графиков, сделаем некоторые уточнения.

Расположение на числовой оси точек y_i должно соответствовать тому, что точки (τ_i, y_i) принадлежат графику функции из класса $Lip_M 1$.

Если известно y_i, то для y_{i+1} должны выполнятся неравенства

$$y_i - M(\tau_{i+1} - \tau_i) \le y_{i+1} \le y_i + M(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Заметим, если $y_{i+1} = y_i - M(\tau_{i+1} - \tau_i)$, то $\tau_i^{\max} = \tau_i$,$\tau_i^{\min} = \tau_{i+1}$; если $y_{i+1} = y_i + M(\tau_{i+1} - \tau_i)$, то $\tau_i^{\max} = \tau_{i+1}$,$\tau_i^{\min} = \tau_i$. В этом можно убедиться непосредственной подстановкой в (9) и (10). Если f – четная функция и графики

$\psi_Y^{\max}$ и $\psi_Y^{\min}$ симметрично продолжены на $[-\pi, 0]$ относительно оси ординат, то

$$L_n(\psi_Y^{\min}, 0) \le L_n(f, 0) \le L_n(\psi_Y^{\max}, 0). \tag{11}$$

Пусть λ_i^Y, $i = 1, 2, \dots, m$ – величины, определенные следующим образом:

$$\lambda_i^Y = \begin{cases} \tau_{i-1}^{\max}, & \text{если } i - \text{нечетно}, \\ \tau_{i-1}^{\min}, & \text{если } i - \text{четно}. \end{cases}$$

Тогда λ_i^Y являются абсциссами точек «излома» графика функции $\psi_Y^{\max}$.

Для $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^m$, $\lambda_i \in [\tau_{i-1}, \tau_i]$, $\tau_0 = 0$, обозначим через Ψ_Λ четную 2π-периодическую функцию, которая на $[0, \pi]$ определена следующим образом:

$$\Psi_\Lambda = (-1)^i (t - \lambda_i) + \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \tag{12}$$

при $t \in [\lambda_i, \lambda_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m$, полагая при этом $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{m+1} = \pi$.

Если обозначить $\Lambda^Y = \{\lambda_i^Y\}_{i=1}^m$, то $\psi_Y^{\max} = M \cdot \Psi_{\Lambda^Y}$. Неравенства (11) показывают, что

$$\sup_{\substack{f \in Lip_M 1 \\ f - \text{четно}}} |L_n(f, 0) - f(0)| = M \cdot \sup_\Lambda |L_n(\Psi_\Lambda, 0)|.$$

Заметим, что условие четности f под знаком супремума можно снять.

В самом деле, для любой заданной на $[-\pi, \pi]$ функции $f \in Lip_M 1$ существуют четные функции f_1, $f_2 \in Lip_M 1$ такие, что

$$L_n(f_1, 0) \le L_n(f, 0) \le L_n(f_2, 0).$$

Эти функции можно определить следующим образом:

Если $\int_{-\pi}^{0} f(t) w_n(t) dt \le \int_{0}^{\pi} f(t) w_n(t) dt$, то положим

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in [-\pi, 0), \\ f(-t), & \text{при } t \in [0, \pi], \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{при } t \in [-\pi, 0), \\ f(t), & \text{при } t \in [0, \pi], \end{cases}$$

если же $\int_{-\pi}^{0} f(t) w_n(t) dt \ge \int_{0}^{\pi} f(t) w_n(t) dt$, то

$$f_1(t) = \begin{cases} f(-t), & \text{при } t \in [-\pi, 0), \\ f(t), & \text{при } t \in [0, \pi], \end{cases} \quad f_2(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in [-\pi, 0), \\ f(-t), & \text{при } t \in [0, \pi]. \end{cases}$$

4. Теорема об экстремальном значении функционала некоторого специального вида

Мы доказали, что вопрос об экстремальном значении величины $\|L_n(f, x) - f(x)\|$ при $f \in Lip_M 1$ сводится к вопросу об экстремальном значении величины $|L_n(f, 0)|$ при $f \in \{\varphi_\Lambda\}$.

Из предложения 1 пункта 3 известно, что задача нахождения константы при главном члене в экстремальном значении величины $\left\| M_n^{[1](k)}(f,x)-f(x) \right\|$ приводит к исследованию функционала, определяемого некоторым преобразованным ядром.

Поставим задачу в общем виде.

Рассмотрим функционал $\eta(f)=\int\limits_0^\infty f(t)W(t)\,dt$, где $W(t)$ – непрерывная на $[0,\infty)$ функция, такая, что $\int\limits_0^\infty |W(t)|\,dt<\infty$, $\int\limits_0^\infty t|W(t)|\,dt<\infty$, $\int\limits_0^\infty W(t)\,dt=w_0>0$, $W(0)>0$, $W(t)$ имеет простые нули в точках τ_i, $0<\tau_1<...<\tau_m<\infty$ и только в них, $\int\limits_0^{\tau_i} W(t)\,dt>w_0$ при нечетных i, $\int\limits_0^{\tau_i} W(t)\,dt<w_0$ при четных i. Можно ограничиться требованием непрерывности $W(t)$ на конечном отрезке $[0,a]$, таком, что при любом i $\tau_i\in(0,a)$.

Так же, как и в предыдущем пункте, полагаем $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ (кроме того, рассматриваем $\lambda_0=0$, $\lambda_{m+1}=\infty$), $\lambda_i\in[\tau_{i-1},\tau_i]$ при $i=1,...,m$ (считаем $\tau_0=0$). Функция $\varphi_\Lambda(t)$, $t\in[0,a)$ определяется той же формулой, что и $\psi_\Lambda(t)$, согласно (12). Положим $\Lambda^0=\{\lambda_i^0\}_{i=1}^m$, где λ_i^0 удовлетворяют равенству

$$\int\limits_0^{\lambda_i^0} W(t)\,dt=w_0\,. \tag{13}$$

Поставим следующую задачу: найти верхнюю грань значений функционала η на функциях множества $\{\varphi_\Lambda\}$, то есть определить величину $\sup\limits_\Lambda \eta(\varphi_\Lambda)$.

Приводимая ниже теорема 2 дает решение этой задачи.

Теорема 2. $\sup\limits_\Lambda \eta(\varphi_\Lambda)=\eta(\varphi_{\Lambda^0})$**.**

5. Применение теоремы 2 к получению точных аппроксимационных констант

Данную теорему можно применить и для случая конечного отрезка $[0,a]$. Для этого случая достаточно положить $W(t)=0$ при $t\in(a,\infty)$.

Пусть зафиксированы параметры, определяющие операторы Баскакова: натуральное $m\ge 1$ и мультииндекс $(k_1,...,k_m)$. Для выбранного набора $K=\{\xi_i\}_{i=0}^m$, такого, что $\xi_0=k_0=0$, $\xi_i\in[\pi k_{i-1},\pi k_i]$ при $i=1,...,m$, положим $\Lambda_n(K)=\left\{\lambda_i^{(n)}\right\}_{i=0}^{m+1}$, $\lambda_{m+1}^{(n)}=\dfrac{2\xi_i}{n}$. Обозначим, далее φ_n – четную 2π-периодическую функцию, определенную на $[0,\pi]$ согласно (12), как $\varphi_n=\Psi_\Lambda$ при $\Lambda=\Lambda_n(K)$.

Пусть $\Phi(t)=\frac{n}{2}\varphi_n\left(\frac{2}{n}t\right)$. Этой формулой Φ определяется при $t\in\left[0,\frac{\pi n}{2}\right]$. На промежутке $\left(\frac{\pi n}{2},\infty\right)$ определим Φ той же формулой, что и на промежутке $\left[\xi_m,\frac{\pi n}{2}\right]$.

Тогда $\Phi=\Psi_\Lambda$ определено формулой (12) при $\Lambda=K=\{\xi_i\}_{i=0}^m$.

Таким образом,

$$M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}(\varphi_n(t),0)=\frac{2^m\prod_{i=1}^m\sin^2\frac{\pi k_i}{n}}{\pi n}\int_0^\pi\frac{\varphi_n(t)\sin^2\frac{nt}{2}dt}{\sin^2\frac{t}{2}\prod_{i=1}^m\left(\cos t-\cos\frac{2k_i\pi}{n}\right)}=$$

$$=\frac{4\pi^{2m-1}}{n}\prod_{i=1}^m k_i^2\int_0^\infty\Phi(t)\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod_{i=1}^m(k_i^2\pi^2-t^2)}+o(n^{-1}).$$

Так как остаток $o(n^{-1})$ не зависит от K (подробнее об этом в [7]), то задача определения наилучшей константы в оценке

$$\left\|M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}(f(t),x)-f(x)\right\|\le A_{\text{н}}^{[m](k_1,\dots,k_m)}M\cdot n^{-1}+o(n^{-1}),$$

для $f\in Lip_M 1$, сводится к исследованию на максимум функционала

$$\eta_{(k_1,\dots,k_m)}(\Phi)=4\pi^{2m-1}\prod_{i=1}^m k_i^2\int_0^\infty\Phi(t)\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod_{i=1}^m(k_i^2\pi^2-t^2)}\quad\text{при }\Phi\in\{\Psi_\Lambda\}.$$

Заметим, что $M_n^{[m](k_1,\dots,k_m)}(1,x)=\frac{1}{2}\eta_{(k_1,\dots,k_m)}(1)+o(1)=1$.

Отсюда $\eta_{(k_1,\dots,k_m)}(1)=2$.

Применим теорему 2 к случаю $m=1$.

Для применения теоремы 2 следует убедиться в существовании $\lambda^0<k\pi$, такого, что

$$4k^2\pi\int_0^{\lambda^0}\frac{\sin^2 tdt}{t^2(k^2\pi^2-t^2)}=2.$$

Введем обозначение

$$g_{(k_1,\dots,k_m)}(r)=4\pi^{2m-1}\prod_{i=1}^m k_i^2\int_0^r\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod_{i=1}^m(k_i^2\pi^2-t^2)}.$$

Для $m=1$ имеем $g_k(\infty)=2$. Но

$$g_k(\infty)=g_k(k\pi)+4\pi^{2m-1}k^2\int\limits_{k\pi}^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t^2(k^2\pi^2-t^2)}=2\,.$$

Интеграл в последнем равенстве отрицателен, следовательно, $g_k(k\pi)>2$. А так как при $t\in[0,k\pi]$ $\sin^2 t\cdot\left(t^2(k^2\pi^2-t^2)\right)^{-1}\ge 0$, то найдется $\lambda^0\in[0,k\pi]$, такое, что $g_k(\lambda^0)=2$.

Тогда, по теореме 2, обозначив $\Lambda^0=\left\{\lambda^0\right\}$, получим $A_{\text{н}}^{(k)}=\eta_{(k)}(\Psi_{\Lambda^0})$.

Так как $\int\limits_{\lambda^0}^{\infty}\sin^2 t\cdot\left(t^2(k^2\pi^2-t^2)\right)^{-1}dt=0$, то

$$\int\limits_{\lambda^0}^{\infty}(-t+2\lambda^0)\sin^2 t\cdot\left(t^2(k^2\pi^2-t^2)\right)^{-1}dt=-\int\limits_{\lambda^0}^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t(k^2\pi^2-t^2)}\,.$$

Таким образом,

$$A_{\text{н}}^{(k)}=4k^2\pi\left(\int\limits_{0}^{\lambda^0}\frac{\sin^2 tdt}{t(k^2\pi^2-t^2)}-\int\limits_{\lambda^0}^{\infty}\frac{\sin^2 tdt}{t(k^2\pi^2-t^2)}\right),$$

что соответствует (6).

Докажем вспомогательное предложение 2.

Предложение 2. $g_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(k_1\pi)<g_{(k_1,\ldots,k_{m-1},k_m)}(k_1\pi)$.

Доказательство. Преобразуем $g_{(k_1,\ldots,k_m)}(r)$ к виду

$$g_{(k_1,\ldots,k_m)}(r)=4\pi^{-1}\int\limits_0^r\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod\limits_{i=1}^{m}\left(1-\left(\frac{t}{k_i\pi}\right)^2\right)}\,.$$

Имеем

$$g_{(k_1,\ldots,k_m)}(k_1\pi)=4\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\pi}\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod\limits_{i=1}^{m-1}\left(1-\left(\frac{t}{k_i\pi}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{t}{k_m\pi}\right)^2\right)}=$$

$$=4\pi^{-1}\int\limits_0^{k_1\pi}\frac{\sin^2(t)dt}{t^2\prod\limits_{i=1}^{m-1}\left(1-\left(\frac{t}{k_i\pi}\right)^2\right)}\cdot\left(1-\left(\frac{\xi}{k_m\pi}\right)^2\right)^{-1},$$

где $\xi\in(0,k_1\pi)$.

Таким образом,

$$g_{(k_1,\ldots,k_m)}(k_1\pi)=\left(1-\left(\frac{\xi}{k_m\pi}\right)^2\right)^{-1}g_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(k_1\pi)>g_{(k_1,\ldots,k_{m-1})}(k_1\pi)\,.$$

Предложение доказано.

Итак, при $m=2$ имеем $g_{(k_1,k_2)}(k_1\pi) > g_{(k_1)}(k_1\pi) > 2$, $g_{(k_1,k_2)}(\infty) = 2$. Так как $\sin^2 t\cdot\left(t^2(k_1^2\pi^2-t^2)(k_2^2\pi^2-t^2)\right)^{-1} \ge 0$ при $t\in[k_2\pi,\infty)$ (равенство имеет место в изолированных точках), то $g_{(k_1,k_2)}(k_2\pi) < 2$.

Следовательно, существуют $\lambda_1^0 \in (0,k_1\pi)$ и $\lambda_2^0 \in (k_1\pi,k_2\pi)$ такие, что $g_{(k_1,k_2)}(\lambda_1^0) = g_{(k_1,k_2)}(\lambda_2^0) = 2$.

Таким образом, теорему 2 можно применять для нахождения выражения для констант $A_{\text{н}}^{(k_1,k_2)}$ при любых целых k_1, k_2, если $0<k_1<k_2$. Конкретно, $A_{\text{н}}^{(k_1,k_2)} = \eta_{(k_1,k_2)}(\Psi_{\Lambda^0})$, где $\Lambda^0=\left\{\lambda_1^0,\lambda_2^0\right\}$ при тех значениях λ_1^0 и λ_2^0, о которых говорилось выше.

Учитывая, что при нахождении $\eta_{(k_1,k_2)}(\Psi_{\Lambda^0})$ значения Ψ_{Λ^0} на промежутках $\left[\lambda_1^0,\lambda_2^0\right)$ и $\left[\lambda_2^0,\infty\right)$ можно изменять на любую константу, сформулируем результат.

Теорема 3. Для операторов $M_n^{(k_1,k_2)}(f,x)$ и любой функции $f\in Lip_M 1$ выполняется оценка

$$\left\|M_n^{(k_1,k_2)}(f,x)-f(x)\right\| \le A_{\text{н}}^{(k_1,k_2)} M\cdot n^{-1}+o(n^{-1}),$$

где константа

$$A_{\text{н}}^{(k_1,k_2)} = 4\pi^3 k_1^2 k_2^2\left(\int_0^\infty \frac{\sin^2 t dt}{t\prod_{i=1}^m (k_i^2\pi^2-t^2)} - 2\int_{\lambda_1^0}^{\lambda_2^0} \frac{\sin^2 t dt}{t\prod_{i=1}^m (k_i^2\pi^2-t^2)}\right)$$

не может быть снижена.

Покажем, что теорему 2 можно применить при $m=3$ для любых (k_1,k_2,k_3) $k_1<k_2<k_3$.

Заметим, что

$$2\pi^{2m-1}\prod_{i=1}^m k_i^2 \int_0^\infty \frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^m (k_i^2\pi^2-t^2)} = 1, \tag{14}$$

и сформулируем утверждение, показывающее существование множества $\Lambda^0=\left\{\lambda_1^0,\lambda_2^0,\lambda_3^0\right\}$, которое обеспечивает существование точной аппроксимационной константы.

Теорема 4. Пусть целые k_i, $i=1,2,3$, таковы, что $0<k_1<k_2<k_3$. Тогда существуют λ_i^0, $i=1,2,3$, $0<\lambda_1<\pi k_1<\lambda_2<\pi k_2<\lambda_3<\pi k_3$, такие, что

$$2\pi^5 k_1^2 k_2^2 k_3^2 \int_0^{\lambda_i^0} \frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^3 (k_i^2\pi^2-t^2)} = 1. \tag{15}$$

Доказательство. Очевидно (15) имеет место, если для

$$\Phi(r)=2\pi^5k_1^2k_2^2k_3^2\int_0^r\frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^{3}(k_i^2\pi^2-t^2)}$$

выполняется $\Phi(k_1\pi)>1$, $\Phi(k_2\pi)<1$, $\Phi(k_3\pi)>1$.

Из предложения 2 следует, что неравенство

$$2\pi^{2m-1}\prod_{i=1}^{m}k_i^2\int_0^{k_1\pi}\frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^{m}(k_i^2\pi^2-t^2)}>1$$

выполняется при любом $m>0$. Следовательно, $\Phi(k_1\pi)>1$.

Далее, очевидно, что $\Phi(k_3\pi)>1$. Действительно, $\Phi(\infty)=1$, а подынтегральное выражение, фигурирующее в определении $\Phi(r)$, отрицательно почти везде на $[k_3\pi,\infty)$.

Итак, осталось доказать, что $\Phi(k_2\pi)<1$.

Конкретизируя (1) для $m=1$ и $m=2$, получим

$$2\pi k_1^2\int_0^\infty\frac{\sin^2 t dt}{t^2\left(\pi^2k_1^2-t^2\right)}=1,\quad 2\pi^3k_1^2k_2^2\int_0^\infty\frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^{2}\left(\pi^2k_i^2-t^2\right)}=1. \tag{16}$$

Вычитая в (16) первое равенство из второго, имеем

$$\int_0^\infty\frac{\sin^2 t dt}{\left(\pi^2k_1^2-t^2\right)\left(\pi^2k_2^2-t^2\right)}=0.$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi k_2}\frac{\sin^2 t dt}{\left(\pi^2k_1^2-t^2\right)\left(\pi^2k_2^2-t^2\right)}<0. \tag{17}$$

Из (17) нетрудно получить

$$2\pi^3k_1^2k_2^2\int_0^{\pi k_2}\frac{\sin^2 t dt}{\prod_{i=1}^{3}\left(\pi^2k_i^2-t^2\right)}<0. \tag{18}$$

Это следует из того, что любое значение функции $\left(\pi^2k_3^2-t^2\right)^{-1}$ на интервале $(k_1\pi,k_2\pi)$ больше любого значения этой функции на $(0,k_1\pi)$.

Складывая неравенство

$$2\pi^3k_1^2k_2^2\int_0^{\pi k_2}\frac{\sin^2 t dt}{t^2\prod_{i=1}^{2}\left(\pi^2k_i^2-t^2\right)}<1$$

с неравенством (18), получим $\Phi\left(k_2\pi\right)<1$.

Теорема доказана.

Покажем применение теоремы 2 к получению точной константы в оценке приближения функции класса $Lip_M 1$ операторами, приведенными в работе [4].

В работе [4] приводится, в частности, следующий пример аппроксимирующей последовательности операторов класса S_2:

$$D_{n,6}^{(2)}(f,x)=\frac{10}{\pi n\left((1-\cos\frac{\sqrt{6}}{n})(11n^4+5n^2+4)-10(n^2+1)\right)}\times$$

$$\times\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^6 (\cos t-\cos\frac{\sqrt{6}}{n})dt\ .$$

Найдем выражение в интегральной форме для $D_{n,6}^{(2)}(1,x)$. Учитывая четность ядра, получаем

$$D_{n,6}^{(2)}(1,x)=\frac{40}{\pi n\left(2\sin^2\frac{\sqrt{6}}{2n}(11n^4+5n^2+4)-10(n^2+1)\right)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^6 \sin\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{n}-t}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{n}+t}{2}\right)dt=$$

$$=\mu_n\int_0^{\pi}E_n(t)dt=\mu_n\int_0^{\delta_n}E_n(t)dt+\mu_n\int_{\delta_n}^{\pi}E_n(t)dt,$$

где $\delta_n\to 0$, $\delta_n>\frac{\sqrt{6}}{n}$ выбрано так, что $n\delta_n\to\infty$.

Тогда

$$\left|\mu_n\int_{\delta_n}^{\pi}E_n(t)dt\right|\le\mu_n\int_{\delta_n}^{\pi}\left|E_n(t)\right|dt\le\mu_n\pi^6\int_{\delta_n}^{\pi}\frac{t^2-\frac{6}{n^2}}{t^6}dt=\pi^6\mu_n q_n\ .$$

Имеем

$$\left|\mu_n\int_{\delta_n}^{\pi}E_n(t)dt\right|=q_{1,n}+q_{2,n}=o(1)\ . \qquad (19)$$

Равенство в (19) имеет место, так как $q_{1,n}$ имеет порядок $O(\delta_n n^{-3})$, а $q_{2,n}$ – порядок $O(\delta_n n^{-5})$.

Рассмотрим другое слагаемое: первое из двух, представляющих $D^{(2)}_{n,6}(1,x)$ (делаем замену $u=\dfrac{nt}{2}$ и отделяем бесконечно малые):

$$\mu_n\int_0^{\delta_n}E_n(t)dt=\frac{40}{23}\pi^{-1}\int_0^{n\delta_n/2}\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du+o(1)=$$

$$=\frac{40}{23}\pi^{-1}\int_0^{\infty}\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du+o(1),$$

таким образом, $\dfrac{40}{23}\pi^{-1}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du=1$.

Итак, точная константа $A^D_{\text{н}}$ в неравенстве

$$\left\|D^{[2]}_{n,6}(f,x)-f(x)\right\|\le A^D_{\text{н}}M\cdot n^{-1}+o\left(n^{-1}\right)$$

определяется как экстремальное значение функционала

$$\eta(\varphi)=\frac{80}{23}\pi^{-1}\int_0^{\infty}\varphi(u)\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du$$

на функциях вида

$$\varphi_\Lambda(u)=\begin{cases}u, & u\in[0,\lambda],\\ 2\lambda-u, & u\in(\lambda,\infty),\end{cases}$$

для $\lambda\in\left[0,\sqrt{1,5}\right]$.

Согласно теореме 2, экстремум (максимум) достигается при значении $\lambda=\lambda_0$, таком, что

$$\frac{40}{23}\pi^{-1}\int_0^{\lambda_0}\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du=1.$$

Так как $\displaystyle\int_{\lambda_0}^{\infty}\frac{\sin^6 u}{u^6}(3-2u^2)du=0$, то под знаком интеграла на промежутке $[\lambda_0,\infty)$ вместо $2\lambda_0-u$ можно записать $-u$.

Таким образом, одна из возможных форм записи точной константы выглядит следующим образом:

$$A^D_{\text{н}}=\frac{80}{23}\pi^{-1}\Big(\int_0^{\infty}\frac{\sin^6 u}{u^5}\left|3-2u^2\right|du-2\int_{\lambda_0}^{\sqrt{1,5}}\frac{\sin^6 u}{u^5}(3-2u^2)du\Big).$$

Следует обратить внимание на то, что теорему 2 можно применить для методов суммирования рядов Фурье, которые не входят в группу методов, разработанных В.А. Баскаковым [2], что и было показано для операторов, приведенных в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абакумов Ю.Г.*, *Карымова Е.Ю.*, *Коган Е.С.* Тригонометрические операторы Баскакова. Общие положения // Методы математического моделирования и информационные технологии: Труды Института прикладных математических исследований. Петрозаводск, 2000. Вып. 2. С. 87 – 104.
2. *Баскаков В.А.* Об одном методе построения операторов класса S_{2m} // Теория функций и приближений. Интерполирование по Лагранжу. Саратов, 1984. С. 19 – 25.
3. *Баскаков В.А.* Об операторах класса S_{2m}, построенных на ядрах Фейера // Применение функционального анализа в теории приближений: Сб. науч. трудов. Тверь, 2001. С. 5 – 12.
4. *Ершова Е.М.* Операторы класса S_{2m} и их аппроксимативные свойства: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Институт электроники и математики, 2002. 13 с.
5. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
6. *Коган Е.С.* Тригонометрические операторы Баскакова и некоторые задачи, связанные с ними // Математика и ее приложения: Журн. Иванов. матем. об-ва. 2004. Вып. 1. С. 79 – 93.
7. *Коган Е.С.* Некоторые методы получения точных и экстремальных констант в оценках приближения линейными операторами функций классов $Lip_M\alpha$: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2005. 16 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

КОГАН Евгения Семеновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики, вычислительной техники и прикладной математики факультета экономики и информатики Читинского государственного университета. E-mail: eskogan@mail.ru

Статья принята в печать 20.05.2009г.