ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 2(6)

УДК 517.53; 517.582; 519.6

Ю.А. Несмеев

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ НУЛЕЙ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Формулируется и применяется утверждение о существовании и единственности нуля функции комплексного переменного во внутренней точке замкнутого прямоугольника на комплексной плоскости, с помощью которого дается итерационный алгоритм вычисления приближённых значений его компонентов. Одно из применений посвящено вычислению приближённых значений нулей интеграла вероятностей с помощью квадратурных формул.

Ключевые слова: *существование*, *единственность*, *нуль*, *функция*, *комплексное переменное*, *интеграл вероятностей*, *квадратурная формула.*

Интеграл вероятностей (функция erf комплексного переменного $z = x + iy$) широко используется во многих областях науки и техники [1, 2]. Потребность его применения в математическом аппарате статистической радиотехники и теории связи вызвала большой объём опубликованных формул, требующих для их оперативного использования в инженерных расчётах вычисления значений этой функции посредством специальных компьютерных программ [2]. Разработка программ должна сопровождаться тестовыми вычислениями значений этой функции в выбранных точках z-плоскости.

Вариантом выбора таких точек является использование нулей функции erf(z). В настоящее время в общедоступных печатных изданиях, например в [1], приводятся приближённые значения компонентов лишь тех нулей, которые имеют номера 1 – 10. Впервые они были опубликованы в 1955 г. в [3]. Число их значащих цифр равно 9, что недостаточно для полноценного использования варианта. Препятствием к использованию варианта является и отсутствие в общедоступных печатных изданиях приближённых значений компонентов нулей, имеющих большие номера.

При вычислении значений компонентов нулей, приведённых в [3], не применялись многозначные таблицы узлов и весов квадратурных формул Гаусса или уточняющих квадратур [4, 5], в то время как использование их в расчётах потенциально может способствовать получению многоразрядных значений компонентов нулей.

В данной работе формулируется очевидное свойство функции комплексного переменного, позволяющее решить обозначенные проблемы. Демонстрируются результаты её применения на трёх примерах, один из которых посвящён вычислению значений нулей функции erf(z).

Свойство. Пусть обе части функции $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определены в замкнутом прямоугольнике с вершинами $M_1(a,c)$, $M_2(a,d)$, $M_3(b,d)$ и $M_4(b,c)$, расположенными в z-плоскости. Пусть $a < b$ и $c < d$, а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают следующими свойствами:

1. В прямоугольнике $M_1M_2M_3M_4$ уравнения $u(x,y) = 0$ и $v(x,y) = 0$ определяют на промежутке $[a, b]$ однозначные непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, принимающие значения из промежутка $[c, d]$.

2. Кривые, имеющие уравнения $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, пересекаются один раз, а точка их пересечения для прямоугольника $M_1M_2M_3M_4$ является внутренней.

Тогда: а) прямоугольнику $M_1M_2M_3M_4$ принадлежит единственный нуль функции $f(z)$, являющийся точкой пересечения кривых $u(x,y) = 0$ и $v(x,y) = 0$; *б*) нуль функции $f(z)$ может быть найден путём того последовательного деления промежутка $[a,b]$ пополам, который вытекает из теоремы Коши об обращении действительной функции действительного переменного в нуль применительно к функции $f_0(x)= f_1(x) - f_2(x)$.

Этим свойством можно пользоваться для вычисления действительной и мнимой частей нуля функции $f(z)$ с точностью, определяемой в значительной степени языком программирования (в случае обращения к нему). Это обстоятельство является следствием следующего факта: в результате деления промежутка $[a,b]$ происходит вычисление с указанной точностью не только корня функции $f_0(x)$, но и координат той точки прямоугольника $M_1M_2M_3M_4$, соответствующие координаты которой обращают одновременно в нуль значения функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Минимальные трудозатраты при использовании свойства на практике могут достигаться, очевидно, в случае выражения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ через элементарные функции. Такой случай имеет место в примерах 1 и 2. В примере 3 функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не выражаются через элементарные функции.

Пример 1. Функция $f(z) = (x - y) + i(1 - x - y)$ определена, в частности, в замкнутом прямоугольнике с вершинами в точках $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(1,1)$ и $M_4(1,0)$. Притом справедливы равенства $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $u(x, y) = x - y$, $v(x, y) = 1 - x - y$ и выполнены условия теоремы. Функции $f_0(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ описываются зависимостями $f_0(x) = -1 + 2x$, $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = 1 - x$. Поэтому нуль функции $f(z)$ может быть найден путём последовательного деления промежутка $[0;1]$ пополам применительно к функции $-1 + 2x$. Первый же шаг процесса деления приводит к нулю $0{,}5 + i0{,}5$ исходной функции $f(z)$.

Пример 2. Функция $f(z) = (2x - y) + i(y - \cos x)$ удовлетворяет в замкнутом прямоугольнике с вершинами в точках $M_1(0,0)$, $M_2(0,1)$, $M_3(1,1)$ и $M_4(1,0)$ условиям теоремы. Нуль функции $f(z)$ может быть найден путём последовательного деления промежутка $[0; 1]$ пополам применительно к функции $f_0(x) = 2x - \cos x$. Уже на шаге № 28 процесса деления пополам устанавливаются приближённые значения нулей функции $f_0(x)$ и $f(z)$. Этими значениями являются числа 0,45018361 и $0{,}45018361 + i0{,}90036722$.

Пример 3. Применение к функции $\mathrm{erf}(z)$ алгоритма численного способа, основанного на приведенном свойстве, приводит к вычислению приближённых значений компонентов её нулей.

Таким способом были найдены новые представления тех нулей этой функции, которые имеют номера 1 – 10, и нуля под номером 100. Они приведены в верхних частях блоков табл. 1, занумерованных числами 1–10, 100. (Номера блоков и нулей совпадают.) Притом число значащих цифр в приближённых значениях компонентов больше числа 9, а номер одного из нулей является большим – числом 100. При нахождении применялись многозначные таблицы узлов и весов уточняющих квадратур.

В нижних частях блоков табл. 1 даны представления нулей под номерами 1 – 10, приведённые в [1]. Они участвовали при предварительном нахождении соответствующих значений величин *a*, *b*, *c* и *d* перед непосредственным применением свойства.

Таблица 1

1	1,450616163243676 + i1,88094300015331
	1,45061616 + i1,88094300
2	2,244659273803247 + i2,616575140689439
	2,24465928 + i2,61657514
3	2,839 7410469080 + i3,175628099643186
	2,83974105 + i3,17562810
4	3,335460735441156 + i3,646174376387361
	3,33546074 + i3,64617438
5	3,769005567014 + i4,060697233933
	3,76900557 + i4,06069723
6	4,1589983997814 + i4,4355714442365
	4,15899840 + i4,43557144
7	4,51631939958391 + i4,780447644148428
	4,51631940 + i4,78044764
8	4,847970309201 + i5,101588043491
	4,84797031 + i5,10158804
9	5,1587679075375 + i5,4033326428081
	5,15876791 + i5,40333264
10	5,4521922011098 + i5,6888374370364
	5,45219220 + i5,68883744
100	17,659970331721 + i17,767043069336

При предварительном нахождении значений величин a, b, c и d перед вычислением с помощью свойства приближённых значений компонентов нуля под номером 100 была применена приближённая формула для компонентов нуля [1], дающая его приближённое значение

$$17{,}6225405060908+i17{,}8043739109047.$$

Принятые значения величин a, b, c и d при использовании свойства даны в табл. 2.

Таблица 2

	a	b	c	d
1	1,450300	1,450700	1,880300	1,890300
2	2,240000	2,250000	2,600000	2,700000
3	2,839500	2,840000	3,175000	3,176000
4	3,335460	3,335462	3,646160	3,646180
5	3,769000	3,769100	4,060000	4,061000
6	4,158900	4,159000	4,435000	4,436000
7	4,516300	4,516320	4,780100	4,780500
8	4,847970	4,847980	5,101500	5,101600
9	5,158750	5,158770	5,403300	5,403400
10	5,452000	5,453000	5,682000	5,692000
100	17,659800	17,660000	17,759800	17,769800

Уравнениями $u(x,y) = 0$ и $v(x,y) = 0$ при использовании свойства являлись соответственно соотношения

$$\operatorname{erf}(x) + ke^{-x^2}\int_0^y e^{v^2}\sin 2xv dv = 0\,, \tag{1}$$

$$ke^{-x^2}\int_0^y e^{v^2}\cos 2xv dv = 0\,. \tag{2}$$

Здесь и далее используются обозначения:

$$k = \frac{2}{\sqrt{\pi}},\ m = \frac{1}{k},\ n = \frac{1}{\sqrt{2}},\ p = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Соотношения (1) и (2) позволили вычислять значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ путём применения теоремы Коши об обращении функции в нуль на промежутке $[c,d]$ применительно к двум действительным функциям действительного переменного y. Этими функциями служили левые части зависимостей (1) и (2) при фиксированном значении величины x. Притом при определении значений этих функций определённые интегралы вычислялись с помощью квадратурных формул.

Обработка результатов использования зависимостей (1) и (2) для вычисления приближённых значений компонентов нуля под номером 1 отражена в табл. 3.

Таблица 3

1)	$a = 1{,}450300$ $b = 1{,}450700$ $c = 1{,}880300$ $d = 1{,}890300$
2)	$1{,}450616163243676 + i1{,}880943000153315$
	$1{,}450616163243676 + i1{,}880943000153314$
3)	$1{,}450616163243676 + i1{,}88094300015331$
4)	$1{,}45061616 + i1{,}88094300$
5)	$-9{,}86990386940339 \cdot 10^{-9} - i1{,}17792007234318 \cdot 10^{-8}$
6)	$-9{,}86990391992721 \cdot 10^{-9} - i1{,}17792013223450 \cdot 10^{-8}$
7)	$2{,}00703169361827 \cdot 10^{-14} - i1{,}53545253768483 \cdot 10^{-14}$
8)	$2{,}00189257532069 \cdot 10^{-14} - i1{,}59534928670380 \cdot 10^{-14}$

В табл. 3 представлены данные, состоящие из восьми строк. Притом вторая строка состоит из двух подстрок. Первая строка даёт значения величин a, b, c и d. Во второй строке содержатся два комплексных числа, каждое из которых является результатом последовательного деления промежутка $[a,b]$ пополам. Эти числа получены применением квадратурных формул на 41 и 81 узел. В третьей строке приведено комплексное число, сформированное из комплексных чисел второй строки. Правила формирования: формирование действительной (мнимой) части начинается с большего разряда целой части; в очередной разряд действительной (мнимой) части включается цифра, общая для действительных (мнимых) частей комплексных чисел; включение прекращается при первом несовпадении одноразрядных цифр. Комплексное число, которое в качестве своих компонентов имеет так сформированные действительные числа, было принято за такое приближённое значение нуля под номером 1, все знаки которого являются верными. (Оно является верхним комплексным числом блока 1 из табл. 1.) В четвёртой строке дано комплексное число, полученное из комплексного числа третьей строки округлением его действительной и мнимой частей до восьми знаков после запятой. (Оно совпадает с нижним комплексным числом блока 1 из табл. 1.) В пятой и шестой строках приведены значения левых частей равенств (1) и (2), вычисленные с помощью квадратурных формул на 41 и 81 узел в той точке z-плоскости, которая определена комплексным числом четвёртой строки. В седьмой и восьмой строках указаны данные, аналогичные данным пятой и шестой строк, но происходящие из применения комплексного числа из третьей строки.

Табл. 3 была получена с помощью специально разработанной компьютерной программы на языке Турбо Паскаль [6]. В программе все величины, принимающие дробные значения, в том числе и те, которые дают значения определённых интегралов, имели тип extended, благодаря чему представления значений этих величин в компьютере содержали 19 – 20 десятичных цифр.

При вычислении определённых интегралов, входящих в равенства (1) и (2), промежуток интегрирования разбивался на такие части, из которых лишь одна могла иметь длину, меньшую 1, а все остальные (при их наличии) обязаны были иметь длину, равную 1. Если длина промежутка была меньше 1, то интеграл по ней заменялся на разность таких двух интегралов, у одного из которых длина промежутка интегрирования равнялась 1. Вычисление интеграла по каждой части (элементарный промежуток) осуществлялось по уточняющим квадратурам. Притом были задействованы все 16 знаков узлов и весов квадратур.

При обращении к последовательному делению промежутка пополам выполнялись следующие действия: a) процесс деления прекращался тогда, когда длина очередного состоявшегося промежутка была не большей числа 10^{-15}; b) за нуль принималась середина последнего промежутка, полученного делением.

Контроль точности вычислений значений определённых интегралов происходил только при получении данных, приведённых в строках под номерами 5 – 8 табл. 3, в соответствии со следующим допущением: ошибка, даваемая каждой из двух квадратур, имеет такой же порядок, как и разность между результатами вычислений по двум разным квадратурным формулам [4]. Поэтому в качестве относительной погрешности результата вычисления значения определённого интеграла по конкретной квадратурной формуле принималась абсолютная величина того результата деления, который дают разность (делимое) результатов вычисления по квадратурным формулам на 41 и 81 узел и результат (делитель) вычисления по конкретной квадратурной формуле.

При получении данных, приведённых в пятых и шестых (седьмых и восьмых) строках, минимальный и максимальный порядок относительной погрешности результатов вычислений, относящихся к элементарным промежуткам, с помощью каждой из квадратур составили –17 и –16. Сравнение порядков компонентов комплексных чисел, приведённых в пятой и шестой строках табл. 3, с соответствующими данными из строк под номерами 7 и 8 позволяют сделать вывод: те приближённые значения действительных и мнимых частей нулей, которые приведены в третьей строке, обеспечивают для функции erf(z) более высокую точность результатов вычислений её значений в нуле под номером 1.

Обработка результатов использования зависимостей (1) и (2) для вычисления приближённых значений компонентов нулей под номерами 2 – 10 привела к выводам, аналогичным тем, которые изложены выше в связи с нулём под номером 1. Поэтому был сделан следующий вывод: те приближённые значения действительных и мнимых частей нулей под номерами 1 – 10, которые приведены в верхних частях блоков табл. 1, обеспечивают для функции erf(z) более высокую точность результатов вычислений её значений в её нулях.

Новые, приведённые в табл. 1 значения нулей были применены для отладки программы, вычисляющей значения функции erf(z) с помощью квадратурных формул, и программ, позволяющих оперативно проводить расчёты с помощью формул, предложенных в [2]. Примером результативности таких программ является преобразование с их помощью зависимостей

$$\int_{-1}^{0} \operatorname{erf}(z+1)e^{-z^2}dz = m\operatorname{erf}^2(n), \qquad (3)$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \operatorname{erf}(z+1)e^{-z^2}dz = p\left(\operatorname{erf}^2\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{erf}^2(n)\right), \tag{4}$$

$$\int_{i-1}^{0} \operatorname{erf}(iz+i+1)e^{z^2}dz = -im\operatorname{erf}^2(n+in), \tag{5}$$

$$\int_{\frac{i-1}{2}}^{0} \operatorname{erf}(iz+i+1)e^{z^2}dz = -ip\left(\operatorname{erf}^2\left(\frac{1+i}{2}\right)+\operatorname{erf}^2(n+in)\right) \tag{6}$$

в соотношения

$$\int_{-1}^{0} \operatorname{erf}(z+1)e^{-z^2}dz = 4{,}13039301207643\cdot 10^{-1}, \tag{7}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \operatorname{erf}(z+1)e^{-z^2}dz = 3{,}26568004341490\cdot 10^{-1}, \tag{8}$$

$$\int_{i-1}^{0} \operatorname{erf}(iz+i+1)e^{z^2}dz = 8{,}14574300511071\cdot 10^{-1} - i6{,}33348392157181\cdot 10^{-1}, \tag{9}$$

$$\int_{\frac{i-1}{2}}^{0} \operatorname{erf}(iz+i+1)e^{z^2}dz = 6{,}68051001730\cdot 10^{-1} - i4{,}0675738422487\cdot 10^{-1}. \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочник* по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
2. *Коротков Н.Е.* Интегралы для приложений интеграла вероятностей. Воронеж: Изд-во ФГУП «ВНИИС», 2002. 800 с.
3. *Salzer H.E.* Complex zeros of the error function // J. Franklin Inst. 1955. V. 260. P. 209 – 211.
4. *Кронрод А.С.* Узлы и веса квадратурных формул (шестнадцатизначные таблицы). М.: Наука, 1964. 144 с.
5. *Handbook* of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Ed. by Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. National bureau of standards // Applied mathematics. Series 55, Issued June 1964.
6. *Руководство* по программированию под управлением MS DOS. М.: Радио и связь, 1995. 544 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

НЕСМЕЕВ Юрий Алексеевич – пенсионер, до выхода на пенсию преподаватель кафедры высшей математики Магнитогорского государственного технического университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

Статья принята в печать 20.05.2009 г.