

УДК 512.541

А.Р. Чехлов

О СКОБКЕ ЛИ ЭНДОМОРФИЗМОВ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Рассматриваются абелевы группы, в которых квадрат всякого коммутатора (по другому – скобки Ли) эндоморфизмов равен нулю. Описаны группы с указанным выше свойством в ряде классов групп.

Ключевые слова: вполне инвариантная подгруппа, кольцо эндоморфизмов, скобка Ли эндоморфизмов.

Пусть A – абелева группа. Тогда $E(A)$ обозначает кольцо ее эндоморфизмов, $r(A)$ – ранг, если не оговорено противное, то A_p – ее p -компонента, а $t(A)$ – периодическая часть. Если A – однородная группа без кручения, то $t(A)$ – ее тип. Запись $H \leq A$ означает, что H – подгруппа в A ; $H \leq^i A$, что H – вполне инвариантная подгруппа в A , т.е. $fH \subseteq H$ для каждого $f \in E(A)$. Если $f: A \rightarrow B$ – гомоморфизм, то $f|H$ – ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G – группы, то через $\text{Hom}(B, G)B$ обозначим след группы B в группе G , т.е. подгруппу, порожденную всеми гомоморфными образами B в G . $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, $\mathbf{Q}$ – аддитивная группа всех рациональных чисел. Через 1_A обозначим тождественный эндоморфизм группы A . $A^1 = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} nA$. Z_{p^∞} – квазициклическая p -группа, $\hat{Z}_p$ – группа целых p -адических чисел.

Пусть $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ (скобка Ли, или коммутатор). П.А. Крылов поставил вопрос об изучении групп A со свойством $[\varphi, \psi]^2 = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$. Обозначим класс таких групп через BL_2 . Ясно, что прямое слагаемое группы из класса BL_2 также принадлежит BL_2 . Кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $[\varphi, \psi] = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$ (т.е. $A \in \text{BL}_1$). Класс BL_2 можно рассматривать как обобщение класса групп с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

Отметим несколько простых свойств скобки Ли.

- 1) $-[\varphi, \psi] = [-\varphi, \psi] = [\varphi, -\psi] = [\psi, \varphi]$;
- 2) $[\alpha, \varphi + \psi] = [\alpha, \varphi] + [\alpha, \psi]$, $[\alpha + \beta, \varphi] = [\alpha, \varphi] + [\beta, \varphi]$;
- 3) $\varphi^n[\varphi, \psi] = [\varphi, \varphi^n\psi]$, $\psi^n[\varphi, \psi] = [\psi^n\varphi, \psi]$, $[\varphi, \psi]\varphi^n = [\varphi, \psi\varphi^n]$, $[\varphi, \psi]\psi^n = [\varphi\psi^n, \psi]$ для любого $n \in \mathbf{N}$;
- 4) $[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0$, $[\alpha, [\beta, \gamma]] + [\beta, [\gamma, \alpha]] + [\gamma, [\alpha, \beta]] = 0$;
- 5) $[[\alpha, \beta], \gamma] = [\alpha\beta, \gamma] - [\beta\alpha, \gamma]$, $[\alpha, [\beta, \gamma]] = [\alpha, \beta\gamma] - [\alpha, \gamma\beta]$;
- 6) $[\alpha, \beta]\varphi = \alpha[\beta, \varphi] + [\alpha\varphi, \beta]$, $[\alpha, \beta]\varphi = [\alpha, \beta\varphi] + \beta[\varphi, \alpha]$;
- 7) $\varphi[\alpha, \beta] = [\varphi, \alpha]\beta + [\alpha, \varphi\beta]$, $\varphi[\alpha, \beta] = [\varphi\alpha, \beta] + [\beta, \varphi]\alpha$.

Лемма 1. Пусть $A = \bigoplus_{j \in I} A_j$, $|I| > 1$. Тогда:

1) если $A_j \leq^i A$ для каждого $j \in I$, то $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда все $A_j \in \text{BL}_2$;

2) если $A \in \text{BL}_2$, то $\alpha_i(\text{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ для любого $\alpha_i \in \text{Hom}(A_i, A_k)$, где $j, k \in I \setminus \{i\}$.

Доказательство. 1) Очевидно. 2) Пусть θ – проекция A на $\bigoplus_{s \in I \setminus \{i\}} A_s$ и $\gamma a = g \in A_i$, где $a \in A_j$, $\gamma \in \text{Hom}(A_j, A_i)$. Пусть теперь $f \in E(A)$ – такой, что $f|A_j = \gamma$, $f|A_i = \alpha_i$ и $f|A_s = 0$ при $s \neq j, i$. Имеем $[\theta, f]g = \alpha_i g = \alpha_i \gamma a$, $[\theta, f]a = -\gamma a = -g$. Следовательно, $[\theta, f]^2 a = -\alpha_i \gamma a = 0$. Откуда $\alpha_i(\text{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ в силу произвольности γ и a .

Обозначим через A' подгруппу группы A , порожденную всеми ее подгруппами вида $[\xi, \eta]A$, т.е.

$$A' = \langle [\xi, \eta]A \mid \xi, \eta \in E(A) \rangle$$

(E -коммутант группы A). Ясно, что кольцо $E(A)$ коммутативно в точности тогда, когда $A' = 0$. Если $a \in A$, то через $[\varphi, \psi]a$ обозначим коммутатор элемента a .

Если $A = B \oplus G$, то, как можно видеть из следующей леммы, может случиться так, что $B', G' = 0$, но $A' = A$.

Лемма 2. Если $A = B \oplus G$, то $A' = \langle \text{Hom}(B, G)B, \text{Hom}(G, B)G, B', G' \rangle$.

Доказательство. Пусть $\pi: A \rightarrow B$, $\theta: A \rightarrow G$ – проекции, $\gamma \in \text{Hom}(B, G)$ и $0 \neq b \in B$. Тогда если $f \in E(A)$ – такой, что $f|B = \gamma$, $f|G = 1_G$, то $[\theta, f]b = \gamma b$. Это доказывает, что $\text{Hom}(B, G)B \subseteq A'$. Если теперь $\xi, \eta \in E(A)$, то

$$\begin{aligned} [\xi, \eta]b &= [(\pi + \theta)\xi, (\pi + \theta)\eta]b = \\ &= [\pi\xi, \pi\eta]b + (\pi\xi\theta\eta b - \pi\eta\theta\xi b) + (\theta\xi\pi\eta b + \theta\xi\theta\eta b - \theta\eta\pi\xi b - \theta\eta\theta\xi b). \end{aligned}$$

Здесь $[\pi\xi, \pi\eta]b \in B'$, второе слагаемое принадлежит $\text{Hom}(G, B)G$, а третье – $\text{Hom}(B, G)B$. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для элементов подгруппы G , то A' совпадает с указанной подгруппой.

Лемма 3. Пусть $A = B \oplus G$, где $G \leq \text{fi } A$. Тогда условие $A \in \text{BL}_2$ равносильно тому, что $B, G \in \text{BL}_2$, $[\varphi, \psi](\text{Hom}(B, G)B) = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(G)$ и $\beta(B') = 0$ для любого $\beta \in \text{Hom}(B, G)$. В частности, если кольца $E(B)$ и $E(G)$ коммутативны, то $A \in \text{BL}_2$.

Доказательство. Необходимость. Продолжим $\varphi, \psi \in E(G)$ до эндоморфизмов группы A , полагая $\varphi|B = \beta \in \text{Hom}(B, G)$, $\psi|B = 0$. Тогда для $b \in B$ имеем $[\varphi, \psi]b = \varphi\psi b - \psi\varphi b = -\psi\beta b$. Откуда $[\varphi, \psi]^2 b = -[\varphi, \psi]\psi\beta b$. Следовательно, $[\varphi, \psi]\psi(\text{Hom}(B, G)B) = 0$. Симметрично $[\varphi, \psi]\varphi(\text{Hom}(B, G)B) = 0$.

Если продолжить φ, ψ следующим образом: $\varphi|B = 1_B + \beta$, $\psi|B = 1_B - \beta$, то $[\varphi, \psi]b = 2\beta b - \varphi\beta b - \psi\beta b$. В силу уже доказанного получаем $2[\varphi, \psi]\beta b = 0$.

Если же положить $\varphi|B = 1_B + 2\beta$, $\psi|B = 1_B - \beta$, то получим $3[\varphi, \psi]\beta b = 0$. Откуда следует, что $[\varphi, \psi]\beta b = 0$. Поэтому $[\varphi, \psi](\text{Hom}(B, G)B) = 0$ в силу произвольности β и b .

Докажем, что $\beta(B') = 0$. Зафиксируем $\beta \in \text{Hom}(B, G)$. Продолжим $\xi, \eta \in E(B)$ до $\bar{\xi}, \bar{\eta} \in E(A)$, полагая $\bar{\xi}|G = 1_G$, $\bar{\eta}|G = 0$, $\bar{\xi}|B = \xi + \beta$, $\bar{\eta}|B = \eta$. Тогда для $b \in B$ имеем $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]b = [\xi, \eta]b + \beta\eta b$. Так как $[\xi, \eta]^2 b = 0$ и $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]\beta\eta b = 0$ (последнее равенство следует из вполне инвариантности G), то $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]^2 b = \beta\eta[\xi, \eta]b = 0$. В силу произвольности элемента b получаем $\beta(\eta[\xi, \eta]B) = 0$ и, симметрично, $\beta(\xi[\xi, \eta]B) = 0$.

Если продолжить ξ, η следующим образом: $\bar{\xi} \mid G = 1_G$, $\bar{\eta} \mid G = 1_G$, $\bar{\xi} \mid B = \xi + \beta$, $\bar{\eta} \mid B = \eta - \beta$, то $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]b = [\xi, \eta]b + \beta\eta b + \beta\xi b - 2\beta b$. Откуда ввиду уже доказанного $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]^2 b = -2\beta[\xi, \eta]b = 0$.

Если же положить $\bar{\xi} \mid G = 1_G$, $\bar{\eta} \mid G = 1_G$, $\bar{\xi} \mid B = \xi + 2\beta$, $\bar{\eta} \mid B = \eta - \beta$, то $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]b = [\xi, \eta]b + 2\beta\eta b + \beta\xi b - 3\beta b$. Откуда $[\bar{\xi}, \bar{\eta}]^2 b = -3\beta[\xi, \eta]b = 0$. Следовательно, $\beta([\xi, \eta]B) = 0$. Поэтому $\beta(B') = 0$ в силу произвольности ξ и η .

Достаточность. Пусть $\pi: A \rightarrow B$, $\theta: A \rightarrow G$ – проекции и $\gamma, \delta \in E(A)$. Имеем

$$[\gamma, \delta] = (\pi + \theta)[\gamma, \delta](\pi + \theta) = \pi[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\theta$$

(учесть, что $\pi[\gamma, \delta]\theta = 0$). Здесь можно считать, что $\theta[\gamma, \delta]\theta \in E(G)$. Поэтому осталось проверить действие $[\gamma, \delta]$ на B . Если $b \in B$, то $[\gamma, \delta]b = [\pi\gamma, \pi\delta]b + \theta\gamma(\pi\delta b) - \theta\delta(\pi\gamma b) + [\theta\gamma, \theta\delta]b$. Последние три слагаемые принадлежат следу B в G , поэтому они аннулируются при действии $[\gamma, \delta]$. Следовательно,

$$[\gamma, \delta]^2 b = \theta\gamma(\pi\delta[\pi\gamma, \pi\delta]b) - \theta\delta(\pi\gamma[\pi\gamma, \pi\delta]b) + [\theta\gamma, \theta\delta][\pi\gamma, \pi\delta]b = 0$$

поскольку, так как $\pi\gamma, \pi\delta \in E(B)$, все эти слагаемые принадлежат образу в G подгруппы $[\pi\gamma, \pi\delta]B$.

Лемма 4. Если $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $|I| > 1$, то $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда все $A_i \in \text{BL}_2$, $\alpha_i(\text{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$, $[\varphi_i, \psi_i](\text{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ и $\beta_i(A_i') = 0$ для любых $\alpha_i, \beta_i \in \text{Hom}(A_i, A_k)$ и $\varphi_i, \psi_i \in E(A_i)$, где $j, k \in I \setminus \{i\}$.

Доказательство. Необходимость вытекает из лемм 1, 3.

Достаточность. Пусть $B_j = \bigoplus_{i \in I \setminus \{j\}} A_i$, $\pi: A \rightarrow A_j$ и $\theta: A \rightarrow B_j$ – проекции, а $\gamma, \delta \in E(A)$. Если $a \in A_j$, то

$$\begin{aligned} [\gamma, \delta]a &= [(\pi + \theta)\gamma, (\pi + \theta)\delta]a = [\pi\gamma, \pi\delta]a + [\pi\gamma, \theta\delta]a + [\theta\gamma, \pi\delta]a + [\theta\gamma, \theta\delta]a = \\ &= [\pi\gamma, \pi\delta]a + \pi\gamma\theta\delta a - \theta\delta\pi\gamma a + \theta\gamma\pi\delta a - \pi\delta\theta\gamma a + \theta\gamma\theta\delta a - \theta\delta\theta\gamma a. \end{aligned}$$

Здесь $\theta\delta a \in \text{Hom}(A_j, B_j)A_j$ и $\pi\gamma \mid B_j \in \text{Hom}(B_j, A_j)$, поэтому $\pi\gamma\theta\delta a = 0$. Аналогично $\pi\delta\theta\gamma a = 0$. Далее

$$\theta\delta\pi\gamma a, \theta\gamma\pi\delta a, \theta\gamma\theta\delta a, \theta\delta\theta\gamma a \in \text{Hom}(A_j, B_j)A_j,$$

а поскольку в скобках $[\pi\gamma, \theta\delta]$, $[\theta\gamma, \pi\delta]$ в качестве множителей входят гомоморфизмы из $\text{Hom}(B_j, A_j)$, то перечисленные элементы аннулируются при действии этих скобок. С учетом того, что $[\pi\gamma, \pi\delta]^2 a = 0$ и $[\theta\gamma, \theta\delta](\text{Hom}(A_j, B_j)A_j) = 0$ окончательно получаем $[\gamma, \delta]^2 a = 0$.

Из лемм 1, 3 следует, что делимая группа принадлежит BL_2 тогда и только тогда, когда все ее ненулевые p -компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1.

Теорема 5. Если $A \in \text{BL}_2$, то каждая ее ненулевая p -компонента A_p есть либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы B_p и группы Z_{p^∞} , причем в последнем случае $A/A_p = p(A/A_p)$ при $B_p \neq 0$.

Доказательство. Вытекает из лемм 1 и 3.

Следствие 6. Если A – периодическая группа, то $A \in \text{BL}_2$ тогда и только тогда, когда каждая ее ненулевая p -компонента есть либо ненулевая циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и

группы Z_{p^∞} . В частности, если A редуцирована, то ее кольцо эндоморфизмов коммутативно.

Теорема 7. Если $0 \neq D$ – делимая часть группы A , $A = B \oplus D$, то $A \in \text{BL}_2$ тогда и только тогда, когда $B, D \in \text{BL}_2$, E -коммутант B' группы B периодичен, причем если обе подгруппы $D_p, B_p \neq 0$, то $B/B_p = p(B/B_p)$ и, кроме того, условие $0 \neq \iota(D) \neq D$ влечет периодичность B , в этом случае A имеет строение $A = (\bigoplus_{p \in \Pi} A_p) \oplus D_0$, где Π – некоторое множество простых чисел, каждая A_p есть или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической p -группы и группы Z_{p^∞} , а $D_0 \cong \mathbf{Q}$.

Доказательство. Необходимость. Если $0 \neq b \in B$ – элемент бесконечного порядка, то ввиду инъективности группы D найдется гомоморфизм $\alpha: B \rightarrow D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причем если часть без кручения D_0 группы D отлична от нуля, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma \alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \text{Hom}(A, Z_{p^\infty})$. Поэтому в силу леммы 1 условие $0 \neq \iota(D) \neq D$ влечет периодичность B . Наконец, если $B_p \neq 0$, то по теореме 5 B_p – циклическая группа, поэтому $B = B_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq B$. Если теперь $pE_{(p)} \neq E_{(p)}$, то при условии $D_p \neq 0$ найдется ненулевая композиция гомоморфизмов $E_{(p)} \rightarrow B_p \rightarrow D_p$, что противоречит лемме 1.

Достаточность. Пусть $0 \neq \iota(D) \neq D$. Имеем $A = B \oplus \iota(D) \oplus D_0$, где $B \oplus \iota(D) \leq \text{fi } A$, $E(B)$ и $E(\iota(D))$ – коммутативные кольца. Согласно лемме 3, $B \oplus \iota(D) \in \text{BL}_2$. Поскольку след группы D_0 в $B \oplus \iota(D)$ содержится в подгруппе $\iota(D)$, а $E(\iota(D))$ и $E(D_0)$ – коммутативные кольца, то из леммы 3 следует, что $A \in \text{BL}_2$. Если же $D_0 = 0$, то $E(D)$ – коммутативное кольцо и $D \leq \text{fi } A$. Далее, если $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то по условию $pE_{(p)} = E_{(p)}$ при $D_p \neq 0$. В силу леммы 2 $B' = (E_{(p)})'$ и, значит, $(B')_p = 0$. Откуда ввиду периодичности B' вытекает, что $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \text{Hom}(B, D)$. Поэтому по лемме 3 $A \in \text{BL}_2$. Пусть, наконец, D – группа без кручения. Тогда $r(D) = 1$, $D \leq \text{fi } A$, $E(D)$ – коммутативное кольцо и, так как B' – периодическая группа, $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \text{Hom}(B, D)$, следовательно, по лемме 3 вновь $A \in \text{BL}_2$.

Следствие 8. Если $0 \neq D$ – делимая часть группы A , $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ – группа без кручения, то $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7, а достаточность из леммы 3.

Отметим, что делимая группа $D = \iota(D) \oplus D_0$ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов $E(D)$ тогда и только тогда, когда либо $\iota(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbf{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$.

Следствие 9. Пусть $A = \iota(A) \oplus R$ – расщепляющаяся группа ($\iota(A)$, $R \neq 0$). Запишем A в виде $A = T \oplus B \oplus \iota(D) \oplus D_0$, где $T \oplus B$ – редуцированная, а $D = \iota(D) \oplus D_0$ – делимая часть A и $\iota(A) = T \oplus \iota(D)$. Группа $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда $\iota(D) \cong \bigoplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, $r(D_0) \leq 1$, $T = \bigoplus_{p \in \Pi_1} T_p$, каждая T_p – ненулевая циклическая

p -группа, $pB = B$ при $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$, $E(B)$ – коммутативное кольцо и, если $B, D_0 \neq 0$, то $t(D) = 0$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 7. Достаточность. Имеем $t(A) = T \oplus t(D) \leq \text{fi } A$. Если $D_0 = 0$, то обозначим через G – след группы B в $t(A)$. G можно записать в виде $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \bigoplus_{p \in \Pi_1 \cap \Pi} G_p \subseteq T$, $G_2 = \bigoplus_{p \in \Pi} G_p \subseteq t(D)$ ($pG = G$ при $p \in \Pi'$, поэтому $G_p \cap T_p = 0$ для таких p). Поскольку $\bigoplus_{p \in \Pi_1 \cap \Pi} T_p \leq \text{fi } t(A)$ и кольца $E(T)$, $E(t(D))$ коммутативны, то $[\varphi, \psi]G = 0$

для любых $\varphi, \psi \in E(t(A))$. Поэтому $A \in \text{BL}_2$ по лемме 3. Если же $B \neq 0$ и $D_0 \cong \mathbf{Q}$, то $A = B \oplus T \oplus D_0$, где $T \oplus D_0 \leq \text{fi } A$ и $E(B)$, $E(T \oplus D_0)$ – коммутативные кольца. Вновь по лемме 3 $A \in \text{BL}_2$. Наконец, при $B = 0$ имеем $A = T \oplus D$, где $E(T)$, $E(t(D))$ – коммутативные кольца и $D \in \text{BL}_2$. Поэтому и в этом случае $A \in \text{BL}_2$.

Теорема 10. 1) Пусть A – вполне разложимая группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D – делимая часть группы A . Тогда $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда:

а) если $D \neq 0$, то $r(D) = 1$, а B – прямая сумма групп ранга 1 несравнимых между собой типов;

б) если $D = 0$, то $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i – прямая сумма групп ранга 1 несравнимых между собой типов $> t(B_i)$, причем типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при различных i и j .

2) Пусть A – сепарабельная (векторная группа) без кручения, $A = B \oplus D$, где D – делимая часть группы A . Тогда $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда:

а) если $D \neq 0$, то $r(D) = 1$, а B – прямая сумма (прямое произведение) групп ранга 1 несравнимых между собой типов;

б) если $D = 0$, то $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($A = \prod_{i \in I} A_i$), где либо $r(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $r(B_i) = 1$, C_i – сепарабельная (векторная) группа, типы прямых слагаемых ранга 1 которых несравнимы между собой и $> t(B_i)$, причем типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j не сравнимы при различных i и j .

Доказательство. 1) Необходимость следует из леммы 3, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A , где $r(N_i) = 1$, невозможны следующие соотношения для типов: $t(N_1) = t(N_2)$ или $t(N_1) \leq t(N_2) \leq t(N_3)$. Достаточность в случае а) вытекает из леммы 3, поскольку $D \leq \text{fi } A$ и $E(B)$, $E(D)$ – коммутативные кольца. В случае б) достаточность следует из того, что $A_i \leq \text{fi } A$, где, согласно лемме 3, $A_i \in \text{BL}_2$.

2) Прямые слагаемые сепарабельных групп являются сепарабельными группами. Далее, если $\Omega(A)$ – множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A , то $\Omega(A)$ можно разбить на классы эквивалентности $\Omega(A) = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, где типы $s, t \in \Omega(A)$ считаются эквивалентными, если существуют $t_1, \dots, t_n \in \Omega(A)$, такие, что типы t_i и t_{i+1} сравнимы для всех $i = 1, \dots, n$ (здесь $t_0 = s, t_{n+1} = t$). В этом случае $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и $A_i \leq \text{fi } A$, т.е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ не сравнимы при $i \neq j$ [1; § 19, упр. 7]. С учетом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично 1).

Теорема 11. Пусть A – копериодическая группа, D – ее делимая часть, $A = B \oplus D$, $D = t(D) \oplus D_0$. Тогда $A \in \text{BL}_2$ в том и только в том случае, когда A ал-

гебраически компактна, $D = (\bigoplus_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}) \oplus D_0$, где Π – некоторое множество простых чисел, $r(D_0) \leq 1$ и, кроме того:

а) если $0 \neq t(D) \neq D$, то $B = \bigoplus_{p \in \Pi_1} B_p$, каждая B_p – циклическая p -группа и Π_1 – некоторое конечное множество простых чисел;

б) если $t(D) = 0$ или $D_0 = 0$, то $B = G \oplus C$, $G = \bigoplus_{p \in \Pi_1} B_p$, каждая B_p – циклическая p -группа, $C \cong \bigoplus_{p \in \Pi_2} \hat{Z}_p$, Π_1 и Π_2 – такие множества простых чисел, что $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$, причем если $D \neq 0$, то множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно.

Доказательство. Необходимость. Имеем $A^1 = D \oplus B^1$. Если $B_p \neq 0$, $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то $B^1 = E_{(p)}^1$. Отсюда следует, что B^1 – делимая подгруппа без кручения в B и, значит, $B^1 = 0$, $A^1 = D$. Поэтому группа A алгебраически компактна [2, предложение 54.2]. Если $0 \neq t(D) \neq D$, то по теореме 7 B – периодическая группа. Всякая периодическая алгебраически компактная группа ограниченная [2, следствие 40.3], это доказывает а).

б) Замыкание $G = (t(B))^-$ в $\mathbf{Z}$ -адической топологии периодической части $t(B)$ выделяется в B прямым слагаемым, $B = G \oplus C$, ($\Pi_1 = \{p \in P \mid B_p \neq 0\}$). Если $D_p, B_p \neq 0$, то $pC = C$, поэтому $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. Если множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ бесконечно, то след группы C в G является смешанной группой, а это при условии $D \neq 0$ в силу леммы 2 противоречит теореме 7.

Достаточность. В случае а) $A \in \text{BL}_2$ по теореме 7. Если выполнены условия б), то $G \leq \text{fi}(G \oplus C)$ и $E(G)$, $E(C)$ – коммутативные кольца. Поэтому по лемме 3 $G \oplus C \in \text{BL}_2$. Пусть $D \neq 0$. По лемме 2 $(G \oplus C)' = \text{Hom}(C, G)C$. Так как множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно, то $(G \oplus C)'$ – периодическая группа и $\beta(G \oplus C)' = 0$ для каждого $\beta \in \text{Hom}(G \oplus C, D)$ в силу условия $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$. Следовательно, по лемме 3 $A \in \text{BL}_2$.

Для каждого натурального $n > 1$ можно рассматривать класс BL_n групп A , таких, что $[\varphi, \psi]^n = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$. Ясно, что $\text{BL}_n \subset \text{BL}_{n+1}$. Для сравнения приведем один результат о группах из класса BL_n (автор планирует подготовить отдельную статью, посвященную группам из BL_n при $n > 2$). Напомним, что длинной цепи $a_1 < \dots < a_n$ называется число $n - 1$.

Теорема 12. Пусть A – сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ – множество типов всех ее прямых слагаемых ранга 1 и $n > 2$. Группа $A \in \text{BL}_n$ тогда и только тогда, когда в A нет однородных прямых слагаемых ранга ≥ 2 и в $\Omega(A)$ все цепи линейно упорядоченных элементов имеют длину $\leq n - 1$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B \oplus G$ – прямое слагаемое в A , $B \cong G$ и $\varphi: B \rightarrow G$, $\psi: G \rightarrow B$ – взаимно обратные изоморфизмы. Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов группы A (полагая их действия равными нулевому эндоморфизму на дополнительных соответствующих прямых слагаемых). Тогда для $0 \neq b \in B$ получаем $[\psi, \varphi]^n b = b \neq 0$. Пусть теперь $A_1 \oplus \dots \oplus A_{n+1}$ – такое прямое слагаемое в A , что $r(A_i) = 1$, $0 \neq a \in A_1$, и $t(A_1) < \dots < t(A_{n+1})$. Тогда существуют $\varphi_i \in \text{Hom}(A_i, A_{i+1})$ со свойством $\varphi_n \dots \varphi_1 a \neq 0$. Откуда, если ψ – такой эндоморфизм группы A , что $\psi|_{A_i} = 1_{A_i}$, при четном i и $\psi|_{A_i} = 0$ – в противном случае, то для $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$ получаем $[\varphi, \psi]^n a = \pm \varphi_n \dots \varphi_1 a \neq 0$ (знак $\pm$ зависит от n).

Достаточность легко проверяется индукцией.

Поскольку группа из BL_n не содержит прямые слагаемые, разложимые в прямые суммы изоморфных групп, то делимые группы и редуцированные алгебраически компактные группы без кручения принадлежат BL_n в точности тогда, когда их кольца эндоморфизмов коммутативны, т.е. когда они из класса BL_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. М.: Факториал Пресс, 2006.
2. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1; 1977. Т. 2.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЧЕХЛОВ Андрей Ростиславович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: cheklov@math.tsu.ru

Статья принята в печать 07.02.2009г.