

УДК 517.54

Г.А. Юферова

УРАВНЕНИЯ ЛЕВНЕРА И ФУНКЦИИ БРАНЖА

Доказана теорема о разложении композиции сходящегося ряда с p -симметричной функцией Кебе. Получено дифференциальное соотношение между степенями решения уравнения Левнера с постоянной управляющей функцией. Установлена связь экспоненциальных многочленов Бранжа с функцией Кебе.

Ключевые слова: *однолистные отображения, уравнение Левнера, проблема коэффициентов.*

Сформулирована и доказана теорема о подстановке ряда обобщенной функции Кебе в произвольный ряд

$$Q_p(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kp}^{(p)} \left(-\frac{2^{\frac{p}{2}} xz}{(1-z^p)^{\frac{2}{p}}} \right),$$

то есть о представлении такой композиции в виде ряда по степеням z , $z \in E$, $E = \{z \in C; |z| < 1\}$. Полученная теорема применяется для разложения целой положительной степени решения $Q_p(u)$ уравнения Левнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \quad \zeta(0, z) = z, \quad z \in E,$$

по степеням z в случае, когда управляющая функция z . Установлена связь между производными по τ функций $\zeta^m(\tau, z)$, $\zeta^{m+1}(\tau, z)$. Как следствие получена система дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений функций

$$\frac{z}{(1-z)^2} \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} \text{ по степеням } z.$$

Показано совпадение этой системы с системой дифференциальных уравнений для нахождения экспоненциальных многочленов Бранжа, используемых в доказательстве справедливости гипотезы Бибераха о коэффициентах. Это позволило провести исследование указанных многочленов с позиции теории конформных отображений.

1. Теорема о композиции степенных рядов.

Теорема 1. Пусть функция $Q_p(u)$ голоморфна в области D , $0 \in D$, и имеет разложение в ряд вида

$$Q_p(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{kp}^{(p)} u^{kp}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Тогда при фиксированном $x \in (0, 1)$ разложение функции

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{1-z^p} Q_p \left(-\frac{2^{\frac{2}{p}} xz}{(1-z^p)^{\frac{2}{p}}} \right) \quad (2)$$

по степеням z имеет вид

$$\Phi_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^{(p)}(x) z^{mp},$$

где коэффициент

$$g_m^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^m b_{kp}^{(p)} (-1)^{k(p+1)} \frac{(-m)_k (m+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} x^{kp}$$

представляет собой многочлен степени m , если $b_{mp}^{(p)} \neq 0$.

В частности, при $p = 1$ и фиксированном $x \in (0, 1)$ разложение функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-z} Q \left(-\frac{4xz}{(1-z)^2} \right), \text{ где } Q(u) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u^k,$$

по степеням z имеет вид

$$\Phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^m \frac{(-m)_k (m+1)_k b_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} x^k z^m.$$

Доказательство. Подставив разложение (1) функции $Q_p(u)$ в (2), будем иметь

$$\Phi_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{kp}^{(p)} (-1)^{kp} 4^k x^{kp} z^{kp} (1-z^p)^{-(2k+1)}.$$

Применим к $(1-z^p)^{-(2k+1)}$ биномиальную формулу Ньютона

$$\Phi_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} b_{kp}^{(p)} (-1)^{kp+j} \binom{-2k-1}{j} 4^k x^{kp} z^{(k+j)p}$$

и соберем в двойной сумме слагаемые, для которых $k+j=m$, $m=0, 1, \dots$, получим

$$\Phi_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m b_{kp}^{(p)} (-1)^{kp+m-k} \binom{-2k-1}{m-k} 4^k x^{kp} \right] z^{pm}.$$

Пользуясь символом Похгаммера, запишем

$$(-1)^{k(p-1)+m} \binom{-2k-1}{m-k} 4^k = (-1)^{kp} \frac{(2k+1)_{m-k}}{(1)_{m-k}} 4^k.$$

Применим легко проверяемые формулы

$$(1)_{2k} (2k+1)_{m-k} = (1)_{m+k},$$

$$4^k = \frac{(1)_{2k}}{(1)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k} = \frac{(1)_{m+k}}{(1)_k (2k+1)_{m-k} \left(\frac{1}{2}\right)_k},$$

и после выполнения простых операций будем иметь

$$(-1)^{k(p-1)+m} \binom{-2k-1}{m-k} 4^k = \frac{(-1)^{kp}}{(1)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k} \cdot \frac{(1)_{m+k}}{(1)_{m-k}}.$$

Учитывая, что

$$\frac{(1)_{m+k}}{(1)_{m-k}} = (m-k+1)_{2k} = (-1)^k (-m)_k (m+1)_k,$$

получим

$$\Phi_p(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^m b_{kp}^{(p)} (-1)^{k(p+1)} \frac{(-m)_k (m+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} x^{kp} \right] z^{pm}.$$

Теорема доказана.

В случае $p = 1$ эта теорема была доказана в [1].

2. Применение теоремы 1 к решению уравнения Левнера с постоянным управлением

Функция

$$\zeta(\tau, z) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 + 4K(z)e^{-\tau}}\right)^2}{4K(z)e^{-\tau}}, \quad K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} - \text{функция Кебе,}$$

является решением уравнения Левнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \quad 0 \leq \tau < +\infty, \quad (3)$$

с начальным условием $\zeta(0, z) = z$, $z \in E$, и осуществляет однолистное конформное отображение круга E на единичный круг с разрезом вдоль вещественной оси от точки -1 до точки $-e^{\tau} \left(1 - \sqrt{1 - e^{-\tau}}\right)^2$. Этому разрезу соответствует на окружности E дуга с концами в точках $\left(\sqrt{1 - e^{-\tau}} \pm ie^{-\frac{\tau}{2}}\right)^2$, содержащая точку $z = -1$.

Теорема 2. Решение $\zeta = \zeta(\tau, z)$ уравнения Левнера (3) с начальным условием $\zeta(0, z) = z$, возведенное в степень m , $m \in N$, имеет разложение в ряд по степеням z следующего вида:

$$\zeta^m(\tau, z) = e^{-m\tau} \sum_{l=m}^{\infty} \binom{l+m-1}{2m-1} {}_2F_1 \left[\begin{matrix} m+l, m-l \\ 2m+1 \end{matrix}; e^{-\tau} \right] z^l.$$

Доказательство. Возведем решение ζ уравнения Левнера (3) в степень m :

$$\zeta^m(\tau, z) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 + 4e^{-\tau}K(z)}\right)^{2m}}{\left(4e^{-\tau}K(z)\right)^m}.$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона и полагая $u = -4e^{-\tau}K(z)$, представим в виде

$$\zeta^m = (-1)^m u^{-m} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{2m}{k} (1-u)^{\frac{k}{2}}.$$

Заменяя здесь $(1-u)^{\frac{k}{2}}$ разложением в ряд по степеням u и меняя порядок суммирования, будем иметь

$$\zeta^m = (-1)^m u^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^{k+n} \binom{2m}{n} \binom{\frac{k}{2}}{n} u^n.$$

Применим к коэффициенту при u^n формулу [2, с. 619, 54]:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{\frac{k}{2}}{m} = (-1)^m 2^{n-2m} \left[\binom{2n-2m-1}{n-1} - \binom{2n-2m-1}{n} \right] u^n.$$

Заменяем индекс суммирования p на n по формуле $p = n - m$, получим

$$\zeta^m = (-1)^m \sum_{p=m}^{\infty} 2^{-2p} \left[\binom{2p-1}{p+m-1} - \binom{2p-1}{p+m} \right] u^p.$$

Преобразуем разность в скобках, вынося за скобки общий член

$$\frac{(-1)^{p+m-1} (1-2p)_{p+m-1}}{(p+m-1)!}$$

и складывая затем два оставшихся слагаемых. Получим

$$\zeta^m = \sum_{p=m}^{\infty} 2^{-2p} \frac{(-1)^{p-1} (1-2p)_{p+m-1}}{(p+m)!} 2mu^p.$$

В силу теоремы 1, запишем

$$\zeta^m = (1-z) \sum_{l=m}^{\infty} g_l(e^{-\tau}) z^l,$$

где
$$g_l(e^{-\tau}) = \sum_{k=m}^l \frac{(-l)_k (l+1)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (1)_k} \frac{(-1)^{k-1} m(1-2k)_{k+m-1}}{2^{2k-1} (k+m)!} e^{-k\tau}.$$

Поскольку
$$\left(\frac{1}{2}\right)_k = 2^{-2k} \frac{(2k)!}{k!},$$

то
$$\zeta^m(\tau, z) = (1-z) \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{k=m}^l \frac{(-1)^{k-1} 2m(-l)_k (l+1)_k (1-2k)_{k+m-1}}{(2k)!(k+m)!} e^{-k\tau} z^l.$$

Преобразуем правую часть с учетом формул

$$(-m)_m (m+1)_m = (-1)^m (2m)!,$$

$$(-l)_k (l+1)_k - (-l+1)_k (l)_k = -2k(-l)_k (l+1)_{k-1},$$

$$\frac{(-1)^{m-1} 2m(-m)_m (m+1)_m (1-2m)_{2m-1}}{(2m)!(2m)!} = 1,$$

получим

$$\zeta^m(\tau, z) = e^{-m\tau} z^m + \sum_{l=m+1}^{\infty} \sum_{k=m}^l \frac{(-1)^k 2m(-2k)_{k+m} (-l)_k (l+1)_{k-1}}{(2k)!(k+m)!} e^{-k\tau} z^l.$$

Заменим k на p по формуле $p = k - m$. С учетом формул

$$(-l)_{p+m} = (-l)_m (l+m)_p,$$

$$(l+1)_{m-1+p} = (l+1)_{m-1} (l+m)_p,$$

$$(p+2m)! = (2m+1)_p (2m)!$$

и равенств

$$\frac{(-l)_m (l+1)_{m-1}}{(2m-1)!} = (-1)^m \binom{l+m-1}{2m-1},$$

$$\frac{(-2k)_{k+m}}{(2k)!!} = \frac{(-1)^{k+m}}{(k-m)!},$$

имеем

$$\zeta^m(\tau, z) = e^{-m\tau} + \sum_{l=m+1}^{\infty} \sum_{p=0}^{l-1} \binom{l+m-1}{2m-1} \frac{(-l+m)_p (l+m)_p}{p!(2m+1)_p} e^{-(p+m)\tau} z^l.$$

Теорема доказана.

Следствие Решение $\zeta(\tau, z)$ уравнения Левнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \quad 0 \leq \tau < +\infty,$$

с начальным условием $\zeta(0, z) = z$ имеет разложение в ряд по степеням z вида

$$\zeta(\tau, z) = e^{-\tau} \sum_{m=1}^{\infty} l_2 F_1 \left[\begin{matrix} -m+1, m+1 \\ 3 \end{matrix}; e^{-\tau} \right] z^m.$$

Ранее разложение функции $\zeta(\tau, z)$ по степеням z было получено Г.Д. Садри-диновой [3]. Связь этих коэффициентов с гипергеометрической функцией Гаусса ранее не отмечалась.

3. Соотношение между $\zeta^m(\tau, z)$ и $\zeta^{m+1}(\tau, z)$

Рассмотрим последовательность $\left\{ \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} \right\}_{m=0}^{\infty}$. Представим разложение об-

щего элемента этой последовательности по степеням z в виде

$$\frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} = m \sum_{j=m}^{\infty} \Gamma_j^{(m)}(\tau) z^j, \quad z \in E, m=1, 2, \dots \quad (4)$$

Ранее такое разложение встречалось и использовалось в работе [4].

Коэффициенты $\Gamma_j^{(m)}(\tau)$ принимают при $\tau = 0$ значения

$$\Gamma_j^{(m)}(0) = \begin{cases} -1, & j = m, \\ (-1)^{m+j+1} 2, & j \neq m, j = m+1, \dots \end{cases}$$

Следующая теорема устанавливает связь между элементами последовательности $\left\{ \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} \right\}_{m=0}^{\infty}$.

Теорема 3 При $m = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{m+1} \frac{d\zeta^{m+1}(\tau, z)}{d\tau} + \frac{1}{m} \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} \right] = \frac{d\zeta^{m+1}(\tau, z)}{d\tau} - \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau}. \quad (5)$$

Доказательство. Умножая уравнение Левнера (3) на $m\zeta^{m-1}$ и на $(m+1)\zeta^m$, получим

$$\frac{1}{m} \frac{d\zeta^m}{d\tau} = -\zeta^m \frac{1-\zeta}{1+\zeta}, \quad \frac{1}{m+1} \frac{d\zeta^{m+1}}{d\tau} = -\zeta^{m+1} \frac{1-\zeta}{1+\zeta}.$$

Складывая почленно, будем иметь

$$\frac{1}{m+1} \frac{d\zeta^{m+1}(\tau, z)}{d\tau} + \frac{1}{m} \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau} = -\zeta^m \frac{1-\zeta}{1+\zeta} (1+\zeta) = \zeta^{m+1} - \zeta^m.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по τ , получим (5). Теорема доказана.

Следствие При $m = 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\frac{d}{d\tau} \Gamma_j^{(m+1)}(\tau) + \frac{d}{d\tau} \Gamma_j^{(m)}(\tau) = (m+1) \Gamma_j^{(m+1)}(\tau) - m \Gamma_j^{(m)}(\tau).$$

Действительно, после подстановки (4) в (5) имеем

$$\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{j=m}^{\infty} \Gamma_j^{(m+1)}(\tau) z^j + \sum_{j=m}^{\infty} \Gamma_j^{(m)}(\tau) z^j \right] = (m+1) \sum_{j=m}^{\infty} \Gamma_j^{(m+1)}(\tau) z^j - m \sum_{j=m}^{\infty} \Gamma_j^{(m)}(\tau) z^j.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , в силу единственности разложения функции в ряд, получим указанное соотношение. Следствие доказано.

4. Производящая функция для многочленов Бранжа

Образует определенную в $[0, +\infty) \times E$ последовательность $\{W_m(\tau, z)\}_{m=0}^{\infty}$, полагая

$$W_0(\tau, z) = -K(z) \frac{d \ln \zeta(\tau, z)}{d\tau} = z + \dots, \quad W_m(\tau, z) = -\frac{K(z)}{m} \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что

$$W_m(\tau, z) = \zeta^m(\tau, z) W_0(\tau, z), \quad m = 1, 2, \dots$$

и имеет место следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W_m(\tau, z) + \frac{\partial}{\partial \tau} W_{m+1}(\tau, z) = (m+1) W_{m+1}(\tau, z) - m W_m(\tau, z). \quad (6)$$

Действительно, умножая (5) на функцию Кебе $K(z)$ и дифференцируя (6) по τ , будем иметь

$$\frac{K(z)}{m+1} \frac{d^2 \zeta^{m+1}}{d\tau^2} + \frac{K(z)}{m} \frac{d^2 \zeta^m}{d\tau^2} = K(z) \frac{d\zeta^{m+1}}{d\tau} - K(z) \frac{d\zeta^m}{d\tau}.$$

Учитывая, что $W_m(\tau, z) = -\frac{K(z)}{m} \frac{d\zeta^m(\tau, z)}{d\tau}$, получим (6).

Начальный элемент $W_0(\tau, z)$ этой последовательности представляет собой отображение круга E на плоскость с тремя разрезами, два из которых лежат на мнимой оси, не проходят через нуль, симметричны и имеют концы в точках $\pm i \frac{e^\tau}{2}$, а третий разрез лежит на вещественной оси и соединяет точку

$$-\frac{e^{-2\tau}(1-\sqrt{1-e^{-\tau}})^2}{1-e^{2\tau}(1-\sqrt{1-e^{-\tau}})^4} \text{ с } -\infty. \quad \text{Функция } W_m(\tau, z) \text{ голоморфна относительно } z \text{ в}$$

круге E и, согласно теореме Тейлора, раскладывается в степенной ряд

$$W_m(\tau, z) = \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l,$$

равномерно сходящийся внутри E . Подставляя его в (6), получим

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{d}{d\tau} Q_{l,m}(\tau) + \frac{d}{d\tau} Q_{l,m+1}(\tau) \right] z^l = (m+1) \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m+1}(\tau) z^l - m \sum_{l=0}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях равенства, получим

$$\frac{d}{d\tau} Q_{l,m}(\tau) + \frac{d}{d\tau} Q_{l,m+1}(\tau) = (m+1) Q_{l,m+1}(\tau) - m Q_{l,m}(\tau).$$

Поскольку

$$W_m(\tau, z) = e^{-(m+1)\tau} z^{m+1} + \dots,$$

то при $l = 0, 1, \dots, m$ коэффициенты $Q_{l,m}(\tau)$ равны нулю.

Фиксируем $n \in N \setminus \{1\}$. Полагая $m = n - s$, $s = n, n-1, \dots, 1$, получим дифференциальные уравнения для коэффициентов разложения функции

$$W_m(\tau, z) = \sum_{l=m+1}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l :$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Q_{n,n-s}(\tau) + \frac{d}{d\tau} Q_{n,n-s+1}(\tau) &= (n-s+1) Q_{n,n-s+1}(\tau) - (n-s) Q_{n,n-s}(\tau), \\ s &= 2, \dots, n-1; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{d\tau} Q_{n,n-1}(\tau) = -(n-1) Q_{n,n-1}(\tau), \quad s = 1,$$

с начальными условиями

$$Q_{l,m}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } l < m \text{ и при } l = m+2, m+4, \dots, \\ 1, & \text{при } l = m+1, m+3, \dots, \end{cases}$$

полученными с учетом разложения

$$W_m(0, z) = \frac{z^{m+1}}{1-z^2} = \sum_{l=0}^{\infty} z^{m+1+2l} = z^{m+1} + z^{m+3} + \dots$$

Запишем систему (7) в нормальной форме:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} Q_{n,n-1}(\tau) &= -(n-1)Q_{n,n-1}(\tau), \quad s=1, \\ \frac{d}{d\tau} Q_{n,n-s}(\tau) &= 2 \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{s+j+1} (n-j) Q_{n,n-j}(\tau) - (n-s) Q_{n,n-s}(\tau), \\ s &= 2, \dots, n-1, \quad n \in N \setminus \{1\}.\end{aligned}$$

5. Связь функций Бранжа с функцией Кебе

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\tau} &= -(n-1)y_1, \\ \frac{dy_s}{d\tau} &= 2 \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^{s+j+1} (n-j) y_j - (n-s) y_s, \quad s=2, \dots, n-1, \quad n \in N \setminus \{1\},\end{aligned} \quad (8)$$

и начальными условиями $y_s(0) = y_s^0$, $s=1, 2, \dots, n-1$.

Пусть

$$Y_n(\tau) = \left\{ Y_{1,n} \left(\tau, \frac{1}{n-1} \right), \dots, Y_{s,n} \left(\tau, \frac{s}{n-s} \right), \dots, Y_{n-1,n}(\tau, n-1) \right\}$$

$$\text{и} \quad Y_n^*(\tau) = \left\{ Y_{1,n}(\tau, -1), \dots, Y_{s,n} \left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2} \right), \dots, Y_{n-1,n} \left(\tau, -\frac{1+(-1)^n}{2} \right) \right\}$$

– решения системы (8) с начальными условиями

$$y_s(0) = \frac{s}{n-s} \quad \text{и} \quad y_s(0) = -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}$$

соответственно.

В [1, с. 179] показано, что s -й компонентой решения $Y_n(\tau)$ системы (8) является функция

$$Y_{s,n} \left(\tau, \frac{s}{n-s} \right) = \frac{(2m)_k}{(m-1)k!} e^{-(n-s)\tau} {}_4F_3 \left[\begin{matrix} 2m+k, m-\frac{1}{2}, -k, m-1 \\ m+\frac{1}{2}, 2m-1, m \end{matrix}; e^{-\tau} \right].$$

Функцию $Y_{s,n} \left(\tau, \frac{s}{n-s} \right)$ называют (s, n) -функцией Бранжа или экспоненциальным многочленом Бранжа.

Дифференцируя экспоненциальный многочлен Бранжа по τ , получим

$$Y'_{s,n} \left(\tau, \frac{s}{n-s} \right) = -\frac{e^{-(n-s)\tau}}{k!} (2m)_k {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 2m+k, -k, m-\frac{1}{2} \\ m+\frac{1}{2}, 2m-1 \end{matrix}; e^{-\tau} \right].$$

Заметим, что

$$Y'_{s,n} \left(0, \frac{s}{n-s} \right) = -Y_{s,n} \left(0, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2} \right).$$

Поскольку функции

$$-Y'_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right), Y_{s,n}\left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right)$$

удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений (8) с одинаковыми начальными условиями, то в силу теоремы единственности решения получим

$$Y_{s,n}\left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right) = -Y'_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right), \quad s = 1, 2, \dots, n-1.$$

Вернемся теперь к системе (7) с начальными условиями $Q_{n,n-s}(0) = \frac{1+(-1)^{s+1}}{2}$.

Заметим, что функции

$$Q_{n,n-s}(\tau) \text{ и } Y_{s,n}\left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right)$$

удовлетворяют одной и той же системе дифференциальных уравнений и

$$Q_{n,n-s}(0) = Y_{s,n}\left(0, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right).$$

Тогда по теореме единственности решения будем иметь

$$Q_{n,n-s}(\tau) = Y_{s,n}\left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right).$$

Получаем, таким образом, следующую теорему.

Теорема 4. Производная функции Бранжа $Y_{s,n}\left(\tau, \frac{s}{n-s}\right)$ и коэффициент

$Q_{n,n-s}(\tau)$ разложения функции $W_m(\tau, z) = \frac{e^{-\tau} \zeta^{m+1}}{1-\zeta^2} = \sum_{l=m+1}^{\infty} Q_{l,m}(\tau) z^l$ равны, то есть

$$Q_{n,n-s}(\tau) = Y_{s,n}\left(\tau, -\frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right), \quad 0 < \tau < +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров И.А. Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Томский государственный университет, 2001. 220 с.
2. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Марычев О.И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981, 800 с.
3. Сатритдинова Г.Д. Об одном случае интегрирования уравнения Левнера с симметрией вращения // Докл. РАН. 1999. Т. 368. С. 462 – 463.
4. Александров И.А., Александров А.И., Касаткина Т.В. Функционал Милина и полиномы де Бранжа // Актуальные проблемы современной математики. Т. 3: Сб. научных трудов. Новосибирск: Изд-во НИИ МИДО, 1997. С. 13 – 18.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЮФЕРОВА Галина Александровна – аспирантка кафедры математического анализа механико-математического факультета ТГУ. E-mail: galaOk@mail.ru.

Статья принята в печать 24.04.2009 г.