

МАТЕМАТИКА

УДК 517.958

Е.В. Губкина

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ¹

Работа посвящена рассмотрению простых струйных течений несжимаемой жидкости. Для этих течений устанавливается локальная единственность решений. Строится итерационный численный метод непрерывности решения системы уравнений для параметров задачи, проверяется его сходимость.

Ключевые слова: метод непрерывности, струйные течения, аналитическая функция, локальная единственность.

Работа посвящена рассмотрению простых струйных течений несжимаемой жидкости. Для этих течений устанавливается локальная единственность решений. Строится итерационный численный метод непрерывности решения системы уравнений для параметров задачи, проверяется его сходимость.

Применение метода непрерывности для теоретического изучения струйных течений восходит к работам А. Вайнштейна, библиография которых имеется в [1]. В [1] методом конечномерной аппроксимации предложено решение общей задачи гидродинамики с одной свободной границей, включающей в себя основные схемы струйных течений и многие новые схемы течений. В работе [2] этому методу придан алгоритмически конструктивный характер и установлена его сходимость для некоторых струйных течений.

В данной работе рассматриваются также другие схемы струйных течений (Жуковского – Рошко и обтекание тела струей) и для одной из схем течения разработан алгоритм реализации численного метода непрерывности.

1. Простейшие струйные схемы

В этом пункте мы дадим краткое физическое описание и математическую постановку для ряда задач об обтекании полигональных препятствий с отрывом струй.

Будем рассматривать плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости в односвязной области D с границей $\partial D = P \cup L$, состоящей из заданного полигона P (конечного или бесконечного) и струй L , срывающихся с его концов z_1, z_n .

Полигон P предполагается простым [1], т.е. $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$:

$$p \in G(\delta), \delta = \{p \mid 0 < \delta \leq \alpha_k \leq 2, k = \overline{1, n}; |\ln l_k| \leq \delta^{-1}, k = \overline{1, n-1}\}. \quad (1)$$

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-0198001р-сибирь-а) и гранта «Мобильность молодых ученых» (код проекта 09-0890706-моб-ст).

1.1. Схема Кирхгофа

Область течения D и ее образ D^* в плоскости комплексного потенциала конформно отображим на верхнюю полуплоскость $\text{Im}\zeta > 0$ так, чтобы вершины z_1 и z_n перешли соответственно в точки $t = \pm 1$ вещественной оси. Тогда производные отображения верхней полуплоскости D_ζ на плоскость $w = \phi + i\psi$ и на область течения D_z имеют вид [1]

$$\frac{dw}{d\zeta} = K_0\zeta; \quad \frac{dz}{d\zeta} = K \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta - t_k}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + (1-\zeta t_k)} \right)^{\beta_k} (1 + \sqrt{1-\zeta^2}), \quad (2)$$

где $\beta_k = \alpha_k - 1, \beta_1 = \beta_n = 0$.

Интегрируя $\frac{dz}{d\zeta}$, получим

$$z = K \int_{-1}^{\zeta} \Pi(\zeta) M(\zeta) d\zeta + z_1, \quad (3)$$

где

$$\Pi(\zeta) = \prod_{k=1}^n (\zeta - t_k)^{\beta_k},$$

$$M(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k \right)^{-\beta_k} (1 + \sqrt{1-\zeta^2}).$$

Входящие в эту формулу параметры K и t_k ($k = \overline{2, n-1}$) ищутся из условия совпадения полигона, определяемого уравнением $z = z(t)$ при $t \in [-1, 1]$ с заданным полигоном:

$$l = g(u); \quad g_i = K \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\Pi(t)| |M(t)| dt, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad (4)$$

где $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ – заданный вектор длин сторон полигона P , $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$ – искомый вектор. Для решения системы уравнений (4) имеют место априорные оценки [1]:

$$K_0^{-1} < K < K_0 < \infty, \quad t_{k+1} - t_k > \varepsilon > 0, \quad k = \overline{1, n-1}. \quad (5)$$

1.2. Обтекание тела струей

В этом пункте рассматривается случай, когда обтекается не все тело, а лишь одна его сторона. Рассмотрим преобразования, аналогичные пункту 1.1. Производные отображения верхней полуплоскости D_ζ на верхнюю полуплоскость в плоскости w и на область течения D_z имеют вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = K_0; \quad \frac{dz}{d\zeta} = K \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta - t_k}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k} \right)^{\beta_k}, \quad (6)$$

причем $\beta_1 = \beta_n = 0$.

Формулы для нахождения z и l_k будут аналогичны пункту 1.1 и отличаться лишь функцией $M(\zeta)$:

$$M(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k \right)^{-\beta_k}.$$

1.3. Схема Рябушинского (схема с зеркалом)

В этой схеме течение обладает двойной симметрией, что достигается помещением на заданном расстоянии за обтекаемым симметричным препятствием его зеркального изображения.

Рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получаем, что производные отображения верхней полуплоскости D_ζ на верхнюю полуплоскость в плоскости w и на область течения D_z имеют вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{K_0}{\zeta^2}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta^2} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta^2 - t_k^2}{(\sqrt{(1-\zeta^2)} + \sqrt{(1-t_k^2)})^2} \right)^{\beta_k}, \quad (\beta_n = 0). \quad (7)$$

Для нахождения z и l_k будем применять формулы (3) и (4) с другим значением $M(\zeta)$:

$$M(\zeta) = M_0(\zeta, \sigma) M_0(\zeta, -\sigma) \zeta^{-2},$$

$$M_0(\zeta, \sigma) = \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k \right)^{-\beta_k},$$

где $\sigma = (t_2, \dots, t_{n-1})$.

1.4. Схема Жуковского – Рошко

В этой схеме рассматривается обтекание симметричного полигонального препятствия с отрывом струй, переходящих в бесконечно длинные параллельные плоские пластины, препятствующие смыканию струй.

Сделаем преобразования, аналогичные пункту 1.1. Тогда производные отображения верхней полуплоскости D_ζ на верхнюю полуплоскость в плоскости w и на область течения D_z имеют вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{K_0}{\zeta^2}, \quad \frac{dz}{d\zeta} = \frac{K}{\zeta^2} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\zeta - t_k}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k} \right)^{\beta_k}, \quad \beta_n = 0; \quad (8)$$

z и l_k также находятся по формулам (3), (4), в которых функция

$$M(\zeta) = \prod_{k=1}^n \left(\sqrt{(1-\zeta^2)(1-t_k^2)} + 1 - \zeta t_k \right)^{-\beta_k} \zeta^{-2}.$$

2. Локальная единственность решений

Теорема 1. Пусть P – простой полигон (условия (1)) для задачи

$$\left| \frac{dz}{dt} \right| = K \mu(t), \quad |t| \geq 1; \quad \arg \frac{dz}{dt} = \gamma_k \pi, \quad t \in [t_k, t_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1},$$

и выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{i=2}^k \beta_i < 1, \forall k = \overline{2, n-1}. \quad (9)$$

Тогда уравнение (4) однозначно разрешимо на множестве

$$\Omega = \{u \mid 0 < \varepsilon \leq u_i \leq \varepsilon^{-1}, i = \overline{1, n-1}\}. \quad (10)$$

При этом

$$\left| \frac{Dg}{Du} \right| = \{g_{ij}\} \neq 0, \infty; \quad g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}, \quad (i, j) = \overline{1, n-1}, \quad u \in \Omega. \quad (11)$$

Доказательство. Локальная единственность решений для схемы Кирхгофа рассмотрена в [1]. Для случая струйного обтекания тела доказательство локальной единственности проводится полностью аналогично. Приведем доказательство локальной единственности решений только для схемы Жуковского – Рошко, а в силу одинакового характера особенностей в формулах (7) и (8), определяющих течения по схемам 1.3 и 1.4, для схемы Рябушинского получаются аналогичные рассуждения.

Для доказательства достаточно показать ограниченность соответствующей функции Вайнштейна [1]:

$$\Lambda(\zeta) = \zeta^2 \delta K - 2K\zeta \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} \delta z,$$

где δz – вариация функции $z = F(\zeta)$ в (3) в зависимости от вариации искомых постоянных δK и $\delta t_i, i = \overline{1, n-1}$.

Ограниченность проверяется непосредственно. Подставим в функцию $\Lambda(\zeta)$ известные нам δz и $\frac{dz}{d\zeta}$:

$$\delta z = \int_{-1}^{\zeta} \left\{ \frac{\delta K}{K} - \sqrt{1-\zeta^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k \delta t_k}{(\zeta - t_k) \sqrt{1-t_k^2}} \right\} d\zeta$$

и убедимся, что $\Lambda(\zeta) < \infty$.

3. Преобразование уравнений

Рассмотрим преобразование уравнений в схеме Кирхгофа. Для остальных схем они делаются аналогично. Введем обозначения

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, u_k = (t_i - t_k)(\Delta t_k)^{-1}, (i, k) = \overline{1, n-1},$$

и преобразуем интегралы, входящие в (4), полагая $t = s\Delta t_k + t_k$. Тогда в результате преобразования переменных уравнения (4) могут быть представлены в виде

$$u_k = \int_0^1 \Lambda_k(s, \vec{u}) ds \equiv f_k(u, p), \quad (12)$$

где

$$-\alpha = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k, \quad u = (u_1, \dots, u_{n-1}) \in R^{n-1}, \quad u_k = (\Delta t_k)^{\alpha-1} K^{-1}, \quad k = \overline{1, n-2}, \quad u_{n-1} = K^{-1},$$

$$\Lambda_k(s, u) = l_k^{-1} \prod_{i=1}^{n-1} \left| \frac{s - v_i}{\Phi_i} \right|^{\beta_i} (1 + \sqrt{1 - (s\Delta t_k + t_k)^2}),$$

$$\varphi_i = \sqrt{(1 - (s\Delta t_k + t_k^2))(1 - t_k^2)} + 1 - (s\Delta t_k + t_k)t_i,$$

$$v_i = v_{i,k} = (t_i - t_k)(\Delta t_k)^{-1},$$

$p = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, l_1, \dots, l_{n-1})$ – геометрическая характеристика полигона P , в которой $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n-1})$ – вектор внешних углов P , $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ – вектор длин сторон полигона P , $l_k = |P_k| = |z_{k+1} - z_k|$.

Подынтегральное выражение в (12) может иметь интегрируемые особенности в точках $s = 0, 1$. Поэтому в окрестности этих точек необходимо аппроксимировать f_k в (12) кусочно-постоянными сплайнами.

Для оператора $f(u, p)$ в (12) имеет место следующий аналог теоремы 1.

Теорема 2. Преобразование $f(u, p)$ в (12) дважды непрерывно дифференцируемо по аргументам u, p при $(u, p) \in \Omega \times G$, причем

$$\left\| \left(I - \frac{Df}{Du} \right)^{-1} \right\| \leq d(\varepsilon, \delta) < \infty, \quad (13)$$

где I – единичная матрица;

$$\frac{Df}{Du} = \{f_{ij}\}, f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, (i, j) = \overline{1, n-1},$$

$$\|A\| = \sup_{|v|=1} |Av|, A = \{a_{ij}\}.$$

Доказательство. Свойства $f(u, p) \in C^2(\Omega), \forall u \in \Omega$ и $f(u, p) \in C^2(G), \forall p \in G$ проверяются непосредственно.

Заметим, что $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{n-1}), \bar{g}_k = g_k l_k^{-1} = f_k u_k^{-1}, k = \overline{1, n-2}$, очевидно, удовлетворяет (11), при этом

$$\bar{g}_{ij} = \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial u_j} = u_i^{-1} f_{ij}, i \neq j, \bar{g}_{ii} = u_i^{-1} (f_{ii} - 1),$$

следовательно,

$$\left| \frac{D\bar{g}}{Du} \right| = \prod_{i=1}^{n-1} u_i^{-1} \left| \frac{Df}{Du} - I \right| \neq 0, u \in \Omega,$$

что в силу непрерывности $\frac{Df}{Du}$ равносильно (13). Теорема доказана.

4. Деформация полигонов

Теорема 3. Пусть: а) отображение (4) $g = g(u), u \in \Omega$, непрерывно дифференцируемо;

б) прообраз ограниченного замкнутого множества G , определенного в (1), лежит в Ω (априорная оценка (10));

в) в точках $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$ разрешимости уравнения (4) решение $u \in \Omega$ локально единственно (соотношения (11)).

Тогда уравнение (4) имеет по крайней мере одно решение $u \in \Omega$.

Если дополнительно к условиям (а) – (в) найдется вектор $p^0 = (\beta^0, l^0) \in G(\delta)$, для которого решение u^0 уравнения (4) единственно, то уравнение (4) однозначно разрешимо для любых $p \in G$.

Доказательство теоремы проводится с помощью модифицированного метода непрерывности.

Рассмотрим отрезок прямой $P^0 = \{x, y \mid x = x^0, y_1 < y < y_n\}$, соединяющий точки $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_n = x_n + iy_n$, и обозначим через $P^0 = \bigcup_{k=1}^{n-1} P_k^0$ «полигон» P^0 , проходящий через точки $z_k^0 = x_k^0 + iy_k^0$, $k = \overline{1, n}$, с внутренними углами $\alpha_k \pi = \pi$ ($\alpha_k = 1$), $k = \overline{1, n-1}$. Постоянная x^0 выбрана так, чтобы $P^0 \cap P = \emptyset$. В уравнениях (4) функция $\frac{dz^0}{dt}$ не зависит от t_k^0 – прообразов вершин z_k^0 , $k = \overline{2, n-1}$. Поэтому последовательно из уравнения (4) однозначно определяются u_k^0 , $k = \overline{1, n-1}$.

Соединим точки z_k^0 полигона P гладкими жордановыми кривыми S_k так, чтобы $|S_i \setminus S_j| \geq d_0$, $i \neq j$. Тогда, выбирая на кривых S_k произвольно точки $z_k(S_k)$ и соединяя их между собой и концами $(z_1, z_n) \in P$ отрезками прямых, получим семейство полигонов $P(S)$, $S = (S_1, \dots, S_{n-1})$ с внутренними углами $\alpha_k \pi$, $k = \overline{1, n-1}$, $\alpha_k = \alpha_k(S)$ и длинами сторон $l_k = l_k(S)$, $k = \overline{1, n-1}$. По построению $P(S)$ удовлетворяет условию (1) простого полигона с постоянной $\delta = \delta(d_0) > 0$. Далее метод непрерывности заключается в последовательном доказательстве однозначной разрешимости уравнения (4) с помощью теоремы о неявных функциях для непрерывно дифференцируемых вдоль $S = S(S_2, \dots, S_{n-1})$ полигонов $P(S)$, начиная с полигона P^0 [1].

Следствие 1. Для струйных течений при условии (9) уравнение (4) однозначно разрешимо.

В самом деле, согласно теореме 1, выполняются предположения а) – в) теоремы 3 и по построению для P^0 уравнения (4) однозначно разрешимы.

Зафиксируем произвольно вектор $u^0 \in \Omega$, и пусть P^0 – соответствующий ему полигон с вершинами z_k^0 , $k = \overline{1, n}$. Построим семейство полигонов $\{P^\mu\}$, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\mu_k \in [0, 1]$, включающее в себя P^0 и исходный полигон $P = P^e$, $e = (1, \dots, 1)$.

Пусть P^μ и P^λ , $0 \leq \mu_k \leq \lambda_k \leq 1$ – два различных ($|\mu - \lambda| > 0$) полигона из семейства $\{P^\mu\}$, таких, что их характеристики p^μ и p^λ и соответствующие им мультииндексы μ и λ являются близкими:

$$0 \leq |p^\lambda - p^\mu| = q \ll 1, \quad 0 < |\lambda - \mu| \leq \rho(q) \ll 1, \quad (14)$$

где постоянная $q > 0$ – мера деформации $P^\mu \rightarrow P^\lambda$.

Произведем непрерывную деформацию $P^\mu \rightarrow P^\lambda$ с помощью следующего линейного преобразования вершин $z_k^\mu \in P^\mu, z_k^\lambda \in P^\lambda, k = \overline{1, n}$:

$$z_k^\nu = \varepsilon_k z_k^\lambda + (1 - \varepsilon_k) z_k^\mu, \quad \varepsilon_k \in [0, 1], \quad \mu_k \leq \nu_k \leq \lambda_k, \quad (15)$$

где $\varepsilon_k = \frac{\nu_k - \mu_k}{\lambda_k - \mu_k}$ при $\lambda_k > \mu_k$ и $\varepsilon_k = 0$ при $\lambda_k = \mu_k$. Преобразование (15) вершин $z_k^\mu \rightarrow z_k^\lambda$, удовлетворяющее условию (14) близости P^μ и P^λ , будем называть *циклом деформаций*. Очевидно, при каждом фиксированном $q > 0$ за конечное число таких циклов деформаций начальный полигон P^0 преобразуется в заданный $P = P^e, e = (1, \dots, 1)$, при этом $P^\mu \in G(\delta), \delta = \delta(q) > 0$.

В силу теоремы 1 уравнение (4), соответствующее любому полигону $P^\mu \subset G(\delta)$, однозначно разрешимо.

5. Сходимость метода непрерывности

Рассмотрим один цикл метода непрерывности (4°). Пусть для полигона $P^{(0)}$ уравнение (12) имеет единственное решение $u^{(0)}$ и $P^{(\lambda)}, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n), \lambda_k \in [0, 1]$, – семейство полигонов, содержащее заданный полигон $P^{(e)}, e = (1, \dots, 1) \in R^n$, для которого необходимо найти решение $u^{(e)}$ этого уравнения.

Зафиксируем векторы μ и λ так, чтобы выполнялось условие (14) и предположим, что для полигона $P^{(\lambda)}$ соответствующее уравнение (12) имеет решение $u^{(\lambda)} = f(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)})$. Представим уравнение (12), соответствующее полигону $P^{(\mu)}$, в виде

$$\Delta u \equiv u^{(\mu)} - u^{(\lambda)} = \Delta_p f(u^{(\mu)}, p^{(\mu)}) + \Delta_u f(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)}). \quad (16)$$

Здесь

$$\Delta_p f = f(u^{(\mu)}, p^{(\mu)}) - f(u^{(\mu)}, p^{(\lambda)}),$$

$$\Delta_u f = f(u^{(\mu)}, p^{(\lambda)}) - f(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)}), \quad f(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)}) = u^{(\lambda)}.$$

Ввиду непрерывной дифференцируемости $f(u, p)$ по p (теорема 3) имеем

$$|\Delta_p f| \leq K_1 |\lambda - \mu|, \quad u \in \Omega, \quad (17)$$

где K_1 не зависит от λ, μ . Поскольку $f(u, p) \in C^2(\Omega), p \in G(\delta)$, то

$$\Delta_u f = \frac{Df(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)})}{Du^{(\lambda)}} \Delta u + \Phi_0 \quad |\Delta u| \quad \Delta u, \quad \Phi_0 \in C(\Omega), \quad \|\Phi_0\| = \phi_0.$$

Выберем постоянную ρ из условия

$$0 < \rho \leq \frac{1}{2\phi_0} \left\| \left(I - \frac{Df}{Du} \right)^{-1} \right\| = \frac{d}{2\phi_0} \quad (18)$$

и на множестве $\Omega_p = \{v \mid |v| \leq \rho\} \in R^{n-1}$, $v \equiv \Delta u$, представим (16) в виде

$$A(u)v \equiv \left(I - \frac{Df(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)})}{Du^{(\lambda)}} - I\Phi_0 |v| \right) v = \Delta_p f(u^{(\lambda)}, p^{(\lambda)}), \quad (19)$$

откуда в силу (16) – (18) получим

$$|v| \leq K_2(\varepsilon, \delta, \rho) |\lambda - \mu|, v \in \Omega_p. \quad (20)$$

Учитывая (18), находим $K_2 |\lambda - \mu| \leq \rho$, т.е. (20) выполняется, если

$$|\lambda - \mu| \leq K_2^{-1} \rho \equiv q. \quad (21)$$

Введем параметр $m \rightarrow \infty$, и пусть $\lambda(m) \rightarrow \mu$ при $m \rightarrow \infty$. Например, $\lambda = (\mu_2 - 1/m, \dots, \mu_{n-1} - 1/m)$. Тогда, согласно (20), имеем $|v| = |u^{(\lambda)} - u^{(\mu)}| \rightarrow 0$ при $\lambda(m) \rightarrow \mu$. Следовательно, уравнение (12) относительно $u^{(\mu)} \in R^{n-1}$, $\forall \mu \in [0, 1]$ может быть решено методом итераций для полигонов $P^{(\lambda)} \rightarrow P^{(\mu)}$, $\lambda(m) \rightarrow \mu$ при выполнении (21).

Итак, начиная с заданного $u^{(0)} = f(u^{(0)}, p^{(0)})$, найдем решение $u^{(\mu)}$ уравнения (12) методом итераций для $P^{(\mu)}$, $|\mu| \leq q$. Далее построим решение $u^{(v)}$, $|v - \mu| \leq q$ и т.д. За конечное число таких деформаций $P^{(\lambda)}$ в $P^{(\mu)}$, $|v - \mu| \leq q$, отыщется решение и для заданного полигона $P^{(e)}$, $e = (1, \dots, 1) \in R^n$. Доказано утверждение.

Теорема 4. *Метод циклической непрерывности сходится. На каждом цикле решение $u^{(e)}$ уравнения (12), отвечающее заданному полигону $P^{(e)}$, $e = (1, \dots, 1) \in R^n$, может быть построено за конечное число деформаций $P^{(\lambda)}$ в $P^{(\mu)}$, $|\lambda - \mu| \leq q$, причем решение $u^{(\mu)}$ отыскивается методом итераций, начиная с $u^{(\lambda)}$.*

6. Алгоритм реализации метода непрерывности

Для осуществления перехода от одной итерации к другой необходимо формировать полную базу данных о полигоне.

База данных для $(m + 1)$ -й итерации.

1. Задать геометрическую характеристику $p = (\beta, l)$ (вводятся вершины полигона $z_k(x_k, y_k)$, $k = \overline{1, n}$, и вычисляется геометрическая характеристика).

2. Задать $u_k^{(m)}$ с предыдущей итерации (в частности, начальная итерация $u_k^{(0)}$ может быть выбрана из решения задачи для P^0 , $P^0 = (0, \dots, 0, l_1(t_1^0), \dots, l_{n-1}(t_1^0))$, t_k^0 – выбираются произвольно, например, $t_1^0 = t_1 = 1, t_2^0 = 2, \dots$, а $l_k(t_k^0)$ определяются из расчета начальной задачи P^0 . Или в качестве начальной итерации $u_k^{(0)}$ можно взять единичный вектор $\bar{u}^{(0)} = (1, \dots, 1) \in R^{n-1}$.

3. Задать оператор $u_k^{(m)} = f_k(u^{(m)}, p)$, $u = (u_1, \dots, u_{n-1})$. Вычисления проводятся по формуле (12).

Построить полигон $P^{(\mu)}$, для которого вычислен вектор $u^{(\mu)}$, причем формула (12) применяется до тех пор, пока не достигнута заданная точность.

4. Вычислить погрешность определения длин сторон полигона P :

$$l_k^{(m+1)} = (u_k^{(m+1)})^{-1} f_k(u_k^{(m+1)}): \left(\sum_{k=1}^{n-1} |l_k - l^{(m+1)}|^2 \right)^{1/2} \equiv \Delta l < \varepsilon.$$

5. Вычислить свободную границу $L^{(m)}$ (после проведения m -й итерации)

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977.
2. Монахов В.Н. О сходимости численного метода непрерывности решения задач гидродинамики со свободными границами // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. №. 5. С. 1082 – 1090.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ГУБКИНА Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математики и информатики Горно-Алтайского государственного университета.
E-mail: Helenvl@bk.ru

Статья принята в печать 05.06.2009 г.