ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 3(7)

УДК 512.541

Э.Г. Кирьяцкий

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $\tilde{C}_n(E)$

В данной работе изучаются свойства голоморфных в единичном круге E функций, разложение которых в степенной ряд начинается с z^n, имеющих в единичном круге положительную вещественную часть n-й производной.

Ключевые слова: *голоморфная функция*, *разделенная разность*, *класс Каратеодори*, *класс Левандовского*, *оценки коэффициентов.*

Через $\tilde{C}_n(E)$, $n \ge 0$, обозначим класс голоморфных в единичном круге E (т.е. в круге $|z|<1$) функций $F(z)$ вида

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{k+k-1}, \tag{1}$$

для которых выполнено условие $\operatorname{Re}\left\{F^{(n)}(z)\right\} > 0$ при любом $z \in E$ [1].

При $n = 0$ получим класс Каратеодори [2, 4]. Если $n = 1$, то имеем класс однолистных в E функций с ограниченным вращением [3, 4].

В данной работе изучаются различные свойства функций вида (1) из класса $\tilde{C}_n(E)$, где $n \ge 0$. Мы устанавливаем признаки принадлежности функций к классу $\tilde{C}_n(E)$, оцениваем модули коэффициентов разложения в степенной ряд, модули и действительные части этих функций. Устанавливаем так называемую теорему покрытия, относящуюся к образу круга E при отображении этого круга любой функцией из класса $\tilde{C}_n(E)$, $n \ge 0$. Кроме того, находим радиусы тех окружностей $|z| = r < 1$, которые отображаются функциями из класса $\tilde{C}_n(E)$, $n \ge 0$, на выпуклые и звездообразные замкнутые кривые.

1. Определим разделенную разность n-го порядка голоморфной в E функции $F(z)$ формулой [1, 5]

$$[F(z); z_0, \ldots z_n] = \frac{1}{2\pi!} \int_{\Gamma} \frac{F(\xi)\, d\xi}{(\xi - z_0) \ldots (\xi - z_n)}, \tag{2}$$

где Γ – простой замкнутый контур, лежащий внутри круга E и охватывающий все точки $z_0, \ldots, z_n \in E$.

Так как E есть выпуклая область, то формулу (2) можно заменить формулой

$$[F(z); z_0, \ldots, z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_{n-1}} F^{(n)}(\zeta)\, dt_1 \ldots dt_n, \tag{3}$$

где
$$\zeta = z_0 + t_1(z_1 - z_0) + \ldots + t_n(z_n - z_{n-1}) \in E,$$

$$0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le t_1, \ldots, 0 \le t_n \le t_{n-1},$$

причем среди точек $z_0,...,z_n \in E$ могут быть совпадающие между собой точки [1, 5]. В частности, если $z_0 = z_1 = ... = z_n = \xi$, то

$$[F(z); z_0,...,z_n] = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\xi).$$

Лемма 1. *Если* $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, *то* $\operatorname{Re}[F(z); z_0,...,z_n] > 0$, $\forall z_0,...,z_n \in E$.

Действительно, пользуясь условием леммы 1 и формулой (3), имеем

$$\operatorname{Re}[F(z); z_0,...,z_n] = \int_0^1 \int_0^{t_1} ... \int_0^{t_{n-1}} \operatorname{Re} F^{(n)}(\zeta)\, dt_1 ... dt_n > 0.$$

Лемма 2. *Если* $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, $n \geq 1$, *то* $[F(z); z, z_1] \in \tilde{C}_{n-1}(E)$ *при любом фиксированном* $z_1 \in E$. *В частности,* $\frac{F(z)}{z} \in \tilde{C}_{n-1}(E)$.

В самом деле, если $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, то, согласно свойствам разделенных разностей и лемме 1, имеем $\operatorname{Re}[[F(z); z, z_1]; z_2,...,z_{n+1}] = \operatorname{Re}[F(z); z_1, z_2,...,z_{n+1}] > 0$ при любом $z_1 \in E$ и любых $z_2,...,z_{n+1} \in E$. Но тогда $[F(z); z, z_1] \in \tilde{C}_{n-1}(E)$. Положив $z_1 = 0$, получим $[F(z); z, 0] = \frac{F(z)}{z} \in \tilde{C}_{n-1}(E)$.

Используя лемму 2, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Если* $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, $n \geq 1$, *то* $\frac{F(z)}{z^k} \in \tilde{C}_{n-k}(E)$, $0 \leq k \leq n$.

Исходя из определения класса $\tilde{C}_n(E)$, легко установить также теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы функция* $F(z)$ *принадлежала классу* $\tilde{C}_n(E)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\frac{1}{n(n-1)...(n-m+1)} F^{(m)}(z) \in \tilde{C}_{n-m}(E), \text{ где } 1 \leq m \leq n.$$

Теорема 3. *Если* $n \geq 1$ *и*

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in \tilde{C}_n(E),$$

то справедливы неравенства

$$|a_{k,n}| \leq \frac{(k-1)!n!2}{(n+k-1)!}, \quad k = 2,3,...; \tag{4}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \frac{1}{n!}\left|F^{(n)}(z)\right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad \forall |z| = r < 1; \tag{5}$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \frac{1}{n!} \operatorname{Re} F^{(n)}(z) \leq \frac{1+r}{1-r} \quad \forall |z| = r < 1; \tag{6}$$

$$r^n + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!n!2}{(n+k-1)!} r^{n+k-1} \leq |F(z)| \leq r^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!n!2}{(n+k-1)!} r^{n+k-1}, \ \forall |z| = r < 1. \tag{7}$$

Знаки равенства в (4) – (7) *реализуются функцией*

$$H_n(z;\theta) = e^{in\theta} H_n\left(ze^{-i\theta}\right)$$

при надлежащем выборе θ, $0 \le \theta \le 2\pi$, *где функция* $H_n(z)$ *определена формулой*

$$H_n(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!n!2}{(n+k-1)!} z^{n+k-1} . \tag{8}$$

причем $H_n(z;\theta) \in \tilde{C}_n(E)$.

Для доказательства воспользуемся теоремой 2, где возьмем $m = n$. Тогда получим

$$\varphi(z) = \frac{1}{n!} F(z) \in \tilde{C}_0(E),$$

т.е. функция $\varphi(z)$ принадлежит известному классу Каратеодори [2, 4]. Учитывая свойства функций из этого класса, легко получаем (4), (5) и (6). Правую часть неравенства (7) получим интегрированием правой части неравенства (5) по r вдоль отрезка, соединяющего точки $z = 0$ и $z = re^{i\varphi}$. Левую часть неравенства (7) получим интегрированием левой части неравенства (6) по r вдоль отрезка, соединяющего точки $z = 0$ и $z = re^{i\varphi}$ с последующим учетом того, что $\operatorname{Re} F(z) \le |F(z)|$, $\forall z \in E$. Далее, легко убедиться в том, что

$$\frac{1}{n!} e^{in\theta} H_n^{(n)}\left(e^{-in\theta} z\right) = \frac{1 + e^{-in\theta} z}{1 - e^{-in\theta} z} \text{ и } \frac{1}{n!} \operatorname{Re} H_n^{(n)}(z;\theta) = \operatorname{Re} \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} > 0, \ \forall z \in E .$$

Значит, $H_n(z;\theta) \in \tilde{C}_n(E)$. Отсюда легко следует, что функция $H_n(z;\theta)$ реализует знаки равенства в (4) – (7).

Лемма 3. *Имеют место следующие формулы*:

$$H_n(1) = 1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!n!}{(n+k-1)!} = \frac{n+1}{n-1}, \quad n \ge 2; \tag{9}$$

$$(-1)^n H_n(-1) = 1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!n!(-1)^{k-1}}{(n+k-1)!} = n2^n \left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} \right), \quad n \ge 1 . \tag{10}$$

Доказательство. Согласно формуле (8), имеем

$$H_1(z) = 1 + 2\sum_{k=2}^{\infty} z^{k-1} = \frac{1+z}{1-z}, \ \forall z \in E .$$

Пусть $n \ge 2$. Интегрируем n раз вдоль отрезка, соединяющего точки 0 и z:

$$\underbrace{\int_0^z dz \int_0^z dz \ldots \int_0^z \frac{1+z}{1-z} dz}_{n} = \frac{z^n}{n!} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(n+k-1)!} z^{n+k-1} .$$

Для левой части полученного равенства применим известную формулу Коши для кратного интеграла [5]. Тогда

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} \frac{1+t}{1-t} dt = \frac{z^n}{n!} + 2\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(n+k-1)!} z^{n+k-1} .$$

Умножив обе части на $n!$, получим для функции $H_n(z)$ интегральную формулу

$$H_n(z)=z^n+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!n!}{(n+k-1)!}z^{n+k-1}=n\int_0^z(z-t)^{n-1}\frac{1+t}{1-t}dt\,,\quad n\geq 2\,. \tag{11}$$

Из (11) при $z\to 1$ имеем

$$1+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!n!}{(n+k-1)!}=n\int_0^1(1-t)^{n-2}(1+t)dt=\frac{n+1}{n-1}\,,\ n\geq 2\,.$$

Отсюда следует формула (9). Докажем формулу (10). Из (11) при $z\to -1$ имеем

$$(-1)^n H_n(-1)=1+2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!n!(-1)^{k-1}}{(n+k-1)!}=n\int_0^{-1}\frac{(1+t)^n}{1-t}dt=n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{1+t}dt\,.$$

Вычисляя последний определенный интеграл, получим

$$n\int_0^1\frac{(1-t)^n}{1+t}dt=2^n n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right).$$

Формула (10) доказана при любом $n\geq 2$. Легко проверяется справедливость формулы (10), если $n=1$.

Теорема 3. *Если $n>2$, то образ круга E при отображении его любой функцией $w=F(z)\in\tilde{C}_n(E)$ содержится в круге*

$$|w|<\frac{n+1}{n-1}\,. \tag{12}$$

Если $n\geq 1$, то образ круга E при отображении его любой функцией $w=F(z)\in\tilde{C}_n(E)$ содержит круг

$$|w|<n2^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $n\geq 2$. Из (7) и леммы 3 следует

$$\left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq H_n(r)<H_n(1)=\frac{n+1}{n-1}\,,\ \forall r<1\,,$$

и справедливость (12) установлена. Из левой части (7) и леммы 3 следует

$$\left|F\left(re^{i\theta}\right)\right|\geq(-r)^n H_n(-r)\,,\ \forall r<1\,.$$

Устремляя r к единице, получим

$$\left|F\left(e^{i\theta}\right)\right|\geq(-1)^n H_n(-1)=n2^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k2^k}\right).$$

Справедливость (13) также установлена.

Следствие 1. *При любом $n\geq 1$ образ круга E при отображении его любой функцией $w=F(z)\in\tilde{C}_n(E)$ содержит круг $|w|<2\ln 2-1$.*

Доказательство. Установим неравенство

$$2\ln 2-1\leq n2^n\left(\ln 2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k2^k}\right)<1\,,\ n=1,2,3,\ldots\,.$$

Ясно, что

$$P_n = n2^n\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k k}\right) = n2^n \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{2^k (n+k)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{n+k}\right).$$

Отсюда следует, что P_n монотонно возрастает и $P_n \to 1$. Поэтому

$$2\ln 2 - 1 \le P_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{n+k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 1$$

и следствие 1 доказано.

2. Обозначим через $\tilde{L}_n(E)$ класс голоморфных в E функций

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{k+k-1}, \tag{14}$$

для которых выполняется неравенство

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^{n}\left|a_{k,n}\right| \le 1, \text{ где } B_{n+k-1}^{n} = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}.$$

При $n=1$ имеем класс $\tilde{L}_1(E)$. Известно [7], что этот класс является собственным подклассом класса всех однолистных в E функций $F(z)$ с нормировкой $F(0)=0$, $F^{(1)}(0)=1$. Класс $\tilde{L}_1(E)$ часто называют классом Левандовского [8]. Простыми примерами функций, принадлежащих классу $\tilde{L}_n(E)$, является функция

$$F(z) = z^n + \frac{n!(k-1)!}{(n+k-1)!} z^{n+k-1}, \quad k = 2,3,4,\dots. \tag{15}$$

Отсюда, между прочим, легко следуют оценки коэффициентов $a_{k,n}$ функций вида (14) из класса $\tilde{L}_n(E)$, а именно

$$\left|a_{k,n}\right| \le \frac{n!(k-1)!}{(n+k-1)!}, \quad k = 2,3,4,\dots, \tag{16}$$

со знаком равенства для функций (15).

Нетрудно установить строгое включение $\tilde{L}_n(E) \subset \tilde{C}_n(E)$. В самом деле, пусть функция $F(z)$ вида (14) принадлежит классу $\tilde{L}_n(E)$. Тогда

$$\frac{1}{n!}\operatorname{Re} F^{(n)}(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^{n} \operatorname{Re}\left\{a_{k,n} z^{n+k-1}\right\} > 1 - \sum_{k=2}^{\infty} B_{n+k-1}^{n}\left|a_{k,n}\right| \ge 0.$$

Это значит, что $\tilde{L}_n(E) \subseteq \tilde{C}_n(E)$. Далее, функция $H_n(z)$, задаваемая формулой (8), принадлежит классу $\tilde{C}_n(E)$. Но из (16) следует, что функция $H_n(z)$ не принадлежит классу $\tilde{L}_n(E)$. Таким образом, для любой функции $F(z)$ из класса $\tilde{L}_n(E)$ следует неравенство $\operatorname{Re} F^{(n)}(z) > 0$, $\forall z \in E$, и класс $\tilde{L}_n(E)$ является собственным подклассом класса $\tilde{C}_n(E)$.

Из того что $F(z)\in\tilde{C}_n(E)$, не всегда следует $F(z)\in\tilde{L}_n(E)$. Однако имеют место следующие три теоремы, связывающие классы $\tilde{C}_n(E)$ и $\tilde{L}_n(E)$:

Теорема 4. *Если*

$$F(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,n}z^{n+k-1}\in\tilde{C}_n(E),$$

то
$$\Psi(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{n-1}{4}\left|a_{k,n}\right|^2 z^{n+k-1}\in\tilde{L}_n(E). \tag{17}$$

и
$$\Psi(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n-m-1)(n+k-1)...(n+k-m)}{4n(n-1)...(n-m+1)}\left|a_{k,n}\right|^2 z^{n+k-1}\in\tilde{L}_n(E) \tag{18}$$

при любом целом m, *удовлетворяющем условию* $0\le m<n-1$.

Доказательство. При $n=1$ соотношение (17) очевидно. Так как $F(z)\in\tilde{C}_n(E)$, $n\ge 2$, то, учитывая оценки (4) и формулу (9), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}B_{n+k-1}^{n}\frac{n-1}{4}\left|a_{k,n}\right|^2\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!n!(n-1)}{(n+k-1)!}=1.$$

Отсюда следует (17). Далее, так как $n>m+1$, $m\ge 0$, то, учитывая оценки (4) и формулу (9), получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}B_{n+k-1}^{n}\frac{(n-m-1)(n+k-1)...(n+k-m)}{4n(n-1)...(n-m+1)}\left|a_{k,n}\right|^2\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!(n-m)!(n-m-1)}{(n-m+k-1)!}.$$

Положим $p=n-m$, где $p\ge 2$. Тогда, применяя формулу (9), в которой роль n играет p, получим

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!(n-m)!(n-m-1)}{(n-m+k-1)!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!p!(p-1)}{(p+k-1)!}=1.$$

Отсюда следует (18).

Теорема 5. *Если* $n\ge 4$ *и*

$$F(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,n}z^{n+k-1}\in\tilde{C}_n(E),$$

то
$$\psi(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)^2(n-2)(n-3)}{4n\left(n^2-2n-1\right)}\left|a_{k,n}\right|^2\in\tilde{L}_n(E). \tag{19}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{k=2}^{\infty}B_{n+k-1}^{n}\frac{(n-k-1)^2(n-2)(n-3)}{4n\left(n^2-2n-1\right)}\left|a_{k,n}\right|^2\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!(n-1)!(n+k-1)(n-2)(n-3)}{(n+k-2)!\left(n^2-2n\right)-1}=$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!(n-1)!}{(n+k-1)!\left(n^2-2n-1\right)}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)!(n-2)!(n-1)(n-2)(n-3)}{(n+k-1)!\left(n^2-2n-1\right)}=$$

$$=\frac{(n-2)(n-3)}{n^2-2n-1}\frac{1}{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^2-2n-1}\frac{1}{n-3}=1.$$

Отсюда следует (19).

Теорема 6. *Если*

$$F(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,n}z^{n+k-1}\in\tilde{C}_n(E)$$

и
$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|b_{k,n}\right|\le\frac{1}{2},$$

то
$$\psi(z)=\sum_{k=2}^{\infty}B_{n+k-1}^{n}\left|b_{k,n}\right|\left|a_{k,n}\right|z^{n+k-1}\in\tilde{L}_n(E). \tag{20}$$

Доказательство. В самом деле

$$\sum_{k=2}^{\infty}B_{n+k-1}^{n}\left|b_{k,n}\right|\left|a_{k,n}\right|\le\sum_{k=2}^{\infty}2\left|b_{k,n}\right|\le 1.$$

Отсюда следует (20).

Теорема 7. *Любая функция* $F(z)\in\tilde{C}_n(E)$, $n\ge 5$, *отображает каждую окружность* $|z|=r<1$ *на выпуклую кривую.*

Доказательство. Пусть

$$F(z)=z^n+\sum_{k=2}^{\infty}a_{k,n}z^{n+k-1}\in\tilde{C}_n(E),$$

где $n\ge 1$. Тогда легко убедиться в справедливости равенства

$$1+\frac{zF''(z)}{F'(z)}=\frac{n^2+\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)^2a_{k,n}z^{k-1}}{n+\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)a_{k,n}z^{k-1}}. \tag{21}$$

Отсюда, если $n\ge 5$ и $|z|=r<1$, то, пользуясь оценками (4), получим

$$1+\mathrm{Re}\frac{zF''(z)}{F'(z)}=\mathrm{Re}\frac{n^2+\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)^2a_{k,n}z^{k-1}}{n+\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)a_{k,n}z^{k-1}}\ge$$

$$\ge\frac{n^2-\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)^2\left|a_{k,n}\right|}{n+\sum_{k=2}^{\infty}(n+k-1)\left|a_{k,n}\right|}\ge n-4+\frac{2(1-n)}{n(n-3)}>0.$$

Таким образом, для любой функции $F(z)$ из класса $\tilde{C}_n(E)$, $n\ge 5$, на любой окружности $|z|=r<1$ справедливо неравенство

$$1+\mathrm{Re}\frac{F''(z)}{F'(z)}>0.$$

Как известно [4], это означает, что функция $F(z)$ отображает любую окружность $|z|=r<1$ на выпуклую кривую.

Замечание 1. Исходя из формулы (21), заключаем, что радиусы r окружностей $|z| = r < 1$, которые отображаются любой функцией $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, где n есть одно из чисел 1, 2, 3, 4, на выпуклую кривую, можно найти, решая неравенство

$$n^2 - \sum_{k=2}^{\infty} (n+k-1)^2 \frac{2r^{k-1}}{B_{n+k-1}^n} > 0 .$$

Теорема 8. *Любая функция* $F(z)$ *из класса* $\tilde{C}_n(E)$, *где* $n \geq 4$, *отображает каждую окружность* $|z| = r < 1$ *на звездообразную кривую*.

Доказательство. Пусть

$$F(z) = z^n + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{n+k-1} \in \tilde{C}_n(E) ,$$

где $n \geq 1$. Тогда легко убедиться в справедливости равенства

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{n + \sum_{k=2}^{\infty} (n+k-1) a_{k,n} z^{k-1}}{1 - \sum_{k=2}^{\infty} a_{k,n} z^{k-1}} . \tag{22}$$

Отсюда, если $n \geq 4$ и $|z| = r < 1$, то, пользуясь оценками (4), получим

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \geq \frac{n - \sum_{k=2}^{\infty} (n+k-1) |a_{k,n}|}{1 + \sum_{k=2}^{\infty} |a_{k,n}|} \geq n - 4 + \frac{2n-8}{(n-2)(n+1)} .$$

Таким образом, для любой функции $F(z)$ из класса $\tilde{C}_n(E)$, $n \geq 4$, на любой окружности $|z| = r < 1$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \frac{F'(z)}{F(z)} \geq 0 .$$

Как известно [4], это означает, что функция $F(z)$ отображает любую окружность $|z| = r < 1$ на звездообразную кривую.

Замечание 2. Исходя из формулы (22), заключаем, что радиусы r окружностей $|z| = r < 1$, которые отображаются любой функцией $F(z) \in \tilde{C}_n(E)$, где n есть одно из чисел 1, 2, 3, на звездообразную кривую, можно найти, решая неравенство

$$n - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(n+k-1) r^{k-1}}{B_{n+k-1}^n} \geq 0 .$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Кирьяцкий Э.Г.* Многолистные функции и разделенные разности. Вильнюс: Техника, 1995. 390 с.
2. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. С. 35 – 39.

3. *Зморович В.А.* К теории специальных классов однолистных функций // Успехи мат. наук. Т. 14. № 4. С. 137 – 143.
4. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1960. 621 с.
5. *Ибрагимов И.И.* Методы интерполирования функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 510 с.
6. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1958. 468 с.
7. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.; Л., 1951. 507 с.
8. *Кирьяцкий Э.Г.*, *Касаткина Т.В.* Об одном обобщении класса Левандовского // Вестник ТГУ. 2006. № 290. С. 56 – 60.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

КИРЬЯЦКИЙ Эдуард Григорьевич, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования факультета фундаментальных наук Вильнюсского технического университета имени Гедиминаса, член-корреспондент Международной академии наук Евразии (IEAS). E-mail: Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt

Статья принята в печать 26.01.2009 г.