ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2009 Математика и механика № 3(7)

УДК 514.752

Н.М. Онищук, О.В. Цоколова

МИНИМАЛЬНЫЕ НЕГОЛОНОМНЫЕ ТОРСЫ 2-ГО РОДА

В трёхмерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{E}_3$ рассматривается гладкое неголономное двумерное распределение, имеющее нулевую полную кривизну 2-го рода и нулевую среднюю кривизну, называемое минимальным неголономным торсом 2-го рода (МНТ-2). Доказано, что существует три вида МНТ-2. Исследована геометрия каждого из них.

Ключевые слова: *неголономная геометрия*, *распределение*, *уравнение Пфаффа*, *векторное поле.*

По гладкому двумерному распределению Δ [1, с. 683], сопоставляющему $\forall M \in E_3$ двумерную плоскость π, проходящую через точку M, однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение называется голономным, если определяемое им уравнение Пфаффа вполне интегрируемо. В этом случае пространство $\boldsymbol{E}_3$ расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей. Если же соответствующее уравнение Пфаффа не является вполне интегрируемым, то распределение называется неголономным. При этом интегральные кривые уравнения Пфаффа называются кривыми распределения (или допустимыми кривыми [2, с. 14]). Все кривые распределения, проходящие через точку M, касаются в этой точке плоскости π. Пару (M, π) называют плоским элементом, плоскость π – плоскостью распределения в точке M. С распределением тесно связана не только геометрия интегральных кривых уравнения Пфаффа, но и геометрия ортогонального векторного поля.

1. Главные кривизны и главные направления 2-го рода. Линии кривизны 2-го рода

Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M, а $\vec{e}_3$ – вектор, ортогональный плоскости π в точке M. К каждому плоскому элементу присоединим ортонормированный репер (M, $\vec{e}_\alpha$). Деривационные формулы репера запишем в виде

$$d\vec{r} = \omega^\alpha \vec{e}_\alpha,$$

$$d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta,$$

при этом $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$ и $d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3).$

Главные формы [3,с.288] – это формы $\omega^\alpha, \omega_3^\alpha$. Из них формы ω^α – базисные, поэтому

$$\omega_3^\alpha = A_\beta^\alpha \omega^\beta. \tag{1.1}$$

По матрице

$$(A_\beta^\alpha) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяем линейный оператор $\boldsymbol{A}$, называемый основным линейным оператором

[4, с. 108]. Для него $A(d\vec{r}) = d\vec{e}_3$. Плоскость π в выбранном репере определяется уравнением $x^3 = 0$, а уравнение Пфаффа, соответствующее распределению $\Delta : M \to \pi$, имеет вид

$$\omega^3 = 0. \tag{1.2}$$

Условием полной интегрируемости уравнения (1.2) является обращение в нуль скаляра $\rho = A_2^1 - A_1^2$, называемого скаляром неголономности. Для неголономного распределения, о котором идёт речь в данной работе, скаляр $\rho \neq 0$.

Оператор $\boldsymbol{A}$ отображает всякий вектор плоскости π в вектор этой же плоскости, поэтому возникает линейный оператор $\boldsymbol{A}^*$, являющийся сужением оператора $\boldsymbol{A}$ на плоскость π. Матрица оператора $\boldsymbol{A}^*$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора $\boldsymbol{A}^*$, взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы – главными направлениями 2-го рода. Произведение главных кривизн 2-го рода – это полная кривизна 2-го рода, а их полусумма – средняя кривизна.

Введём обозначения: $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода, $K_2 = k_1^{(2)} k_2^{(2)}$ – полная кривизна 2-го рода, $H = \dfrac{k_1^{(2)} + k_2^{(2)}}{2}$ – средняя кривизна.

Кривая распределения, в каждой точке которой касательный вектор имеет одно из главных направлений 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода. Она характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения описывают торс [4, с. 108]. Распределения, для которых $K_2 = 0, H \neq 0$, рассматривались в [3] в связи с геометрией векторного поля. В данной работе рассматриваются неголономные распределения, для которых $K_2 = H = 0$.

2. Основные формулы для минимальных неголономных торсов 2-го рода

Заметим, что если распределение Δ – голономно и для него $K_2 = 0$, то пространство $\boldsymbol{E}_3$ (или его область) расслаивается на однопараметрическое семейство торсов. А если, кроме того, средняя кривизна равна нулю, то получим тривиальный случай расслоения трёхмерного пространства на двумерные плоскости. В неголономном же случае имеем другую, более сложную, геометрию, к изучению которой переходим.

Определение. *Минимальным неголономным торсом 2-го рода* (*МНТ-2*) *называется двумерное распределение* Δ *на* $\boldsymbol{E}_3$, *для которого равны нулю средняя кривизна и полная кривизна 2-го рода.*

Так как для МНТ-2 имеем $H = K_2 = 0$, то $k_1^{(2)} = k_2^{(2)} = 0$. Следовательно, корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

равны нулю. И мы имеем в точке M единственное главное направление 2-го рода $\vec{\xi}(\xi^1,\xi^2)$, удовлетворяющее уравнению $A_1^1\xi^1 + A_2^1\xi^2 = 0$. Направив вектор $\vec{e}_1$ по главному направлению 2-го рода, получим $A_1^1 = 0, A_2^1 \neq 0$. Так как

$$H = -\frac{A_1^1 + A_2^2}{2} = 0, \quad K_2 = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

то $A_2^2 = A_1^2 = 0$. Репер становится каноническим а формулы (1.1) принимают вид

$$\omega_3^1 = A_2^1\omega^2 + A_3^1\omega^3,$$
$$\omega_3^2 = A_3^2\omega^3.$$

Функции A_2^1, A_3^1, A_3^2 – инварианты: $A_2^1 = \rho$, $A_3^1 = a$, $A_3^2 = b$. Здесь a и b – проекции вектора кривизны линии тока векторного поля нормалей $\vec{e}_3$ на $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$.

Итак, для МНТ-2 имеем

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \rho\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 &= b\omega^3. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Продолжаем систему (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \rho\omega_2^1 &= -b\rho\omega^1 + (\alpha_{12} - a\rho)\omega^2 + (\alpha_{13} - a^2)\omega^3, \\ d\rho &= \alpha_{12}\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + (\alpha_{23} - ab)\omega^3, \\ da &= (\alpha_{13} + b^2)\omega^1 + (\alpha_{23} - \frac{b\alpha_{12}}{\rho} + ab)\omega^2 + (\alpha_{33} + \frac{b(a^2 - \alpha_{13})}{\rho})\omega^3, \\ db &= (b^2 + \frac{a\alpha_{12}}{\rho} - \alpha_{13})\omega^2 - \beta\omega^3. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Формулы (2.1) и (2.2) являются основными формулами для МНТ-2. Внешние дифференциалы базисных форм $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ при этом выражаются через их внешние произведения следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= b\omega^1 \wedge \omega^2 + \frac{\alpha_{13} - a^2 - \rho^2}{\rho}\omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^2 &= (a - \frac{\alpha_{12}}{\rho})\omega^1 \wedge \omega^2 + \frac{\alpha_{13} - a^2}{\rho}\omega^3 \wedge \omega^1, \\ d\omega^3 &= -\rho\omega^1 \wedge \omega^2 - b\omega^2 \wedge \omega^3 + a\omega^3 \wedge \omega^1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Классификация минимальных неголономных торсов 2-го рода

Для любого распределения $\Delta : M \to \pi$ множество плоских элементов (M, π) представляет собой трёхмерное многообразие. Однако множество плоскостей π может зависеть от меньшего числа параметров. Для любого неголономного торса 2-го рода $(K_2 = 0)$ множество плоскостей π зависит от двух параметров [4, с. 109]. В частности это имеет место и для МНТ-2. Действительно, находим характеристику плоскости π для МНТ-2:

$$\begin{aligned} x^3 &= 0, \\ \rho x^1\omega^2 + (ax^1 + bx^2 - 1)\omega^3 &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

В формулах (3.1) содержатся лишь две базисных формы, то есть мы имеем двупараметрическое семейство плоскостей распределения. Из (3.1) также следует, что характеристическая точка [5, с. 183] плоскости π – это точка

$$M_0\left(0, \frac{1}{b}, 0\right).$$

Возникают три возможности: 1) плоскости π огибают поверхность, состоящую из точек M_0; 2) плоскости π образуют связку с центром в точке M_0 ; 3) плоскости π параллельны одной прямой. Имеющиеся три возможности и положены в основу классификации МНТ-2: 1) *МНТ-2*, *плоскости которых огибают поверхность*, *назовём МНТ-2 общего вида*; 2) *МНТ-2*, *плоскости которых образуют связку*, *назовём минимальными неголономными конусами*; 3) *МНТ-2*, *плоскости которых параллельны одной прямой*, *назовём минимальными неголономными цилиндрами.*

4. Минимальные неголономные торсы 2-го рода общего вида

Заметим, что существование МНТ-2 каждого из перечисленных видов не очевидно. Переходим к доказательству существования МНТ-2 общего вида.

Теорема 1. *Минимальные неголономные торсы 2-го рода общего вида существуют с произволом двух функций двух аргументов.*

Доказательство. Для доказательства теоремы используем метод Кэлера [3]. Замыкаем систему (2.2), получаем

$$\begin{gathered}
d\alpha_{12}\wedge\omega^2 + d\alpha_{13}\wedge\omega^3 + A_1\omega^1\wedge\omega^2 + B_1\omega^2\wedge\omega^3 + C_1\omega^3\wedge\omega^1 = 0,\\
d\alpha_{12}\wedge\omega^1 + d\alpha_{22}\wedge\omega^2 + d\alpha_{23}\wedge\omega^3 + A_2\omega^1\wedge\omega^2 + B_2\omega^2\wedge\omega^3 + C_2\omega^3\wedge\omega^1 = 0,\\
d\alpha_{13}\wedge\omega^1 + (d\alpha_{23} - \frac{b}{\rho}d\alpha_{12})\wedge\omega^2 + (d\alpha_{33} - \frac{b}{\rho}d\alpha_{13})\wedge\omega^3 + A_3\omega^1\wedge\omega^2 + \\
+B_3\omega^2\wedge\omega^3 + C\omega^3\wedge\omega^1 = 0,\\
\frac{a}{\rho}d\alpha_{12}\wedge\omega^2 - (d\alpha_{13} + d\beta)\wedge\omega^3 + A_4\omega^1\wedge\omega^2 + B_4\omega^2\wedge\omega^3 + C_4\omega^3\wedge\omega^1 = 0,
\end{gathered} \tag{4.1}$$

где A_i, B_i, C_i $(i = 1,\ldots,4)$ – функции от $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{33}, a, b, \rho.$ В частности,

$$\begin{gathered}
A_1 = 3a\alpha_{12} - \frac{2\alpha_{12}^2}{\rho} - 3\rho\alpha_{13} - b^2\rho,\\
B_1 = \rho\alpha_{33} + a^2b - 3b\alpha_{13} - 2a\alpha_{23} + \frac{\alpha_{12}(\alpha_{23}+ab) + \alpha_{22}(a^2-\alpha_{13})}{\rho},\\
C_1 = \frac{2\alpha_{12}(\alpha_{13}-a^2)}{\rho} + 2a\alpha_{13} + \beta\rho + 2ab^2,\\
C_2 = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13}-a^2)}{\rho} + a\alpha_{23} + b(\alpha_{13}+b^2-a^2),\\
A_3 = a\alpha_{23} + \frac{\alpha_{12}(2b\alpha_{12} - \alpha_{23} - 4ab)}{\rho} - \alpha_{33}\rho + 5b\alpha_{13},\\
A_4 = \frac{\alpha_{12}(a^2+2\alpha_{13})}{\rho} - \frac{2a\alpha_{12}^2}{\rho^2} + ab^2 - a\alpha_{13} + \beta\rho.
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Положим

$$
\begin{aligned}
d\alpha_{12} &= \lambda_1\omega^1 + \mu_1\omega^2 + \nu_1\omega^3,\\
d\alpha_{13} &= \lambda_2\omega^1 + \mu_2\omega^2 + \nu_2\omega^3,\\
d\alpha_{22} &= \lambda_3\omega^1 + \mu_3\omega^2 + \nu_3\omega^3,\\
d\alpha_{23} &= \lambda_4\omega^1 + \mu_4\omega^2 + \nu_4\omega^3,\\
d\alpha_{33} &= \lambda_5\omega^1 + \mu_5\omega^2 + \nu_5\omega^3,\\
d\beta &= \lambda_6\omega^1 + \mu_6\omega^2 + \nu_6\omega^3.
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

Строим цепь интегральных элементов $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Для E_1 положим $\omega^1 = \omega^2 = 0,$ тогда параметры $\nu_i (i = 1,...,6)$ останутся свободными, то есть на них не наложены никакие условия. Следовательно, $r_1 = 6$ (обозначения соответствуют принятым в [3]). Для E_2 положим $\omega^1 = 0$ и подставим (4.3) в (4.1). В результате получим

$$
\mu_2 = \nu_1 - B_1,\ \mu_4 = \nu_3 - B_2,
$$
$$
\mu_5 = \nu_4 - \frac{b}{\rho}B_1 - B_3,\ \mu_6 = -\frac{a}{\rho}\nu_1 + \nu_2 + B_4.
$$

Остаются свободными μ_1 и μ_3, то есть $r_2 = 2,$ а характер $S_1 = r_1 - r_2 = 4.$ И, наконец, подставим (4.3) в (4.1). Получим

$$
\lambda_1 = -A_1,\ \lambda_2 = C_1,\ \lambda_3 = \mu_1 - A_2,
$$
$$
\lambda_4 = \nu_1 + C_2,\ \lambda_5 = \nu_2 + \frac{b}{\rho}C_1 + C_3,\ \lambda_6 = -C_4,
$$

то есть $r_3 = 0.$ Кроме того, имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{b}{\rho}A_1 + A_3 + C_2 + B_1 = 0,\\
&\frac{a}{\rho}A_1 + C_1 - A_4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Значения $A_1, A_3, A_4, B_1, C_1, C_2$ из (4.2) подставляем в (4.4), получаем тождественные равенства. Таким образом, для E_3 все параметры λ_i определены. При этом на μ_i, ν_i не возникают связи. Это значит, что построенная цепь $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ – правильная. Характер $S_2 = r_2 - r_3 = 2.$ А так как характеры не возрастают и сумма их равна количеству неизвестных системы $(S_1 + S_2 + S_3 = 6),$ то $S_3 = 0.$ И, согласно достаточному признаку Кэлера, система внешних дифференциальных уравнений (4.1) в инволюции. А так как $S_2 = r_2 - r_3 = 2$, то решение существует и определяется с произволом двух функций двух аргументов. ■

Переходим к исследованию геометрических свойств МНТ-2 общего вида. Прежде всего заметим, что так как для неголономного торса 2-го рода $K_2 = 0,$ то из формулы $K_2 = K_1 + \frac{\rho^2}{4},$ где K_1 – полная кривизна первого рода [4, с.109], следует $K_1 < 0$. А это значит, что для всякого неголономного торса 2-го рода все точки M являются точками гиперболического типа. Таким образом, через каждую точку M проходят две асимптотические линии неголономного торса 2-го рода.

Находим уравнения асимптотических линий для МНТ-2. Из определения асимптотических линий имеем

$$\left\langle d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \right\rangle = 0.$$

Отсюда, используя формулы (2.1), получаем

$$\omega^1\omega^2 = 0,$$
$$\omega^3 = 0.$$

Одна из асимптотических линий $(\omega^2 = \omega^3 = 0)$ совпадает с линией кривизны 2-го рода и, кроме того, представляет собой эквидирекционную линию [6, с. 32] – линию, вдоль которой нормали распределения описывают цилиндр. Вторая асимптотическая линия $(\omega^1 = \omega^3 = 0)$ ортогональна первой, её касательная проходит через характеристическую точку M_0 плоскости π. Первая асимптотическая линия лежит в плоскости π. Касательная ко второй является общей характеристикой плоскости π, полученной при смещении её вдоль всякой кривой МНТ-2.

Введём обозначения: k и κ – кривизна и кручение линии тока нормалей; k_1 и κ_1 – кривизна и кручение асимптотической, совпадающей с линией кривизны 2-го рода; k_2 и κ_2 – кривизна и кручение второй асимптотической. В результате проведённых вычислений имеем

$$\begin{gathered} k = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0, \;\; \kappa = -\frac{b\alpha_{33}}{a^2 + b^2} \neq 0, \\ k_1 = b \neq 0, \;\; \kappa_1 = 0, \\ k_2 = \frac{\alpha_{12}}{\rho} - a \neq 0, \;\; \kappa_2 = \rho \neq 0. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда для МНТ-2 общего вида следует: 1) *линия тока векторного поля нормалей не может быть плоской*; 2) *асимптотическая линия*, *совпадающая с линией кривизны 2-го рода*, *лежит в плоскости* π, *но не может быть прямой*; 3) *вторая асимптотическая линия*, *ортогональная первой*, *не может быть плоской.*

5. Минимальные неголономные конусы

Напомним, что минимальным неголономным конусом называется МНТ-2, плоскости которого образуют связку. Обозначим радиус-вектор точки M_0 (центра связки) $\vec{R}_{M_0}$. Для него

$$\vec{R}_{M_0} = \vec{r} + \frac{1}{b}\vec{e}_2 \tag{5.1}$$

и

$$d\vec{R}_{M_0} = \vec{0}. \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2), используя соответствующие формулы, находим

$$\alpha_{12} = a\rho, \;\; \alpha_{13} = a^2, \;\; \beta = 0. \tag{5.3}$$

И тогда основные формулы для неголономных конусов принимают вид

$$\begin{aligned}
\omega_3^1 &= \rho\omega^2 + a\omega^3,\\
\omega_3^2 &= b\omega^3,\\
\omega_2^1 &= -b\omega^1,\\
d\rho &= a\rho\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + (\alpha_{23} - ab)\omega^3,\\
da &= (a^2 + b^2)\omega^1 + \alpha_{23}\omega^2 + \alpha_{33}\omega^3,\\
db &= b^2\omega^2.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Формулы для внешних дифференциалов базисных форм в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned}
d\omega^1 &= b\omega^1 \wedge \omega^2 - \rho\omega^2 \wedge \omega^3,\\
d\omega^2 &= 0,\\
d\omega^3 &= -\rho\omega^1 \wedge \omega^2 - b\omega^2 \wedge \omega^3 + a\omega^3 \wedge \omega^1.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Теорема 2. *Минимальные неголономные конусы существуют с произволом одной функции двух аргументов.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. При этом используются формулы (5.4) и (5.5) ■

Выясним отличия геометрии инвариантных кривых минимального неголономного конуса от геометрии инвариантных кривых МНТ-2 общего вида. Прежде всего заметим, что из (5.4) для асимптотической, совпадающей с линией кривизны 2-го рода, инвариант $b = \text{const} \neq 0$, а следовательно, и кривизна $k_1 = \text{const} \neq 0$ (см.(4.5)). То есть эта асимптотическая является окружностью с центром в точке M_0. Для второй асимптотической кривизна $k_2 = 0$, следовательно, она представляет собой прямую, проходящую через точку M_0.

Со всяким МНТ-2 инвариантно связаны два распределения – $\Delta_1 : M \to \pi_1$ и $\Delta_2 : M \to \pi_2$, где π_1, π_2 – плоскости, ортогональные π и проходящие через касательные к асимптотическим линиям распределения Δ. При этом π_2 проходит через касательную к той асимптотической, которая совпадает с линией кривизны 2-го рода. Рассмотрим распределения Δ_2 и Δ_1 для минимального неголономного конуса.

Теорема 3. *Распределение Δ_2 голономно и определяет на $\boldsymbol{E}_3$ слоение* [1, с. 683], *слоями которого являются сферы с центром в точке M_0.*

Доказательство. Распределению Δ_2 соответствует уравнение Пфаффа $\omega^2 = 0$, которое в силу (5.5) вполне интегрируемо. Следовательно, Δ_2 голономно. Докажем, что интегральные поверхности уравнения $\omega^2 = 0$ представляют собой сферы с центром в точке $M_0(0, \frac{1}{b}, 0)$. Находим соприкасающуюся сферу интегральной поверхности уравнения $\omega^2 = 0$, проходящую через точку M. Уравнение поверхности 2-го порядка $a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0$ запишем в векторном виде

$$(\vec{R}, \vec{R}) + 2(\vec{N}, \vec{R}) + a_{00} = 0. \tag{5.6}$$

Требуем, чтобы точка M принадлежала поверхности (5.6):

$$(\vec{r},\vec{r})+2(\vec{N},\vec{r})+a_{00}=0. \tag{5.7}$$

Находим условие совпадения в точке M касательных плоскостей поверхностей (5.6) и интегральной поверхности. После соответствующих вычислений получим

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1,\vec{r})+(\vec{N},\vec{e}_1)=0,\\ (\vec{e}_3,\vec{r})+(\vec{N},\vec{e}_3)=0.\end{aligned} \tag{5.8}$$

И, наконец, получаем условия, определяющие вместе с (5.7) и (5.8) коэффициенты соприкасающейся поверхности 2-го порядка:

$$\begin{gathered}(\vec{e}_1,\vec{e}_1)+b(\vec{N},\vec{e}_2)=0,\\ (\vec{e}_1,\vec{e}_3)-a(\vec{N},\vec{e}_3)=0,\\ (\vec{e}_1,\vec{e}_3)=0,\\ (\vec{e}_3,\vec{e}_3)+a(\vec{N},\vec{e}_1)+b(\vec{N},\vec{e}_2)=0.\end{gathered} \tag{5.9}$$

Из (5.7) – (5.9) следует

$$a_{00}=a_{01}=a_{03}=a_{13}=0, a_{11}=a_{33}=-ba_{02}.$$

Положив $a_{02}=-1$, получим следующее уравнение соприкасающейся сферы интегральной поверхности уравнения $\omega^2=0$ в точке M:

$$(x^1)^2+(x^2-\frac{1}{b})^2+(x^3)^2=\frac{1}{b^2}. \tag{5.10}$$

Легко убедиться, что сфера (5.10) остаётся стационарной во всех точках интегральной поверхности уравнения $\omega^3=0$. Это значит, что сама интегральная поверхность, проходящая через точку M, представляет собой сферу с центром в точке M_0.

Итак, распределение Δ_2 голономно, а пространство $\boldsymbol{E}_3$ расслаивается на однопараметрическое семейство сфер с центром в точке M_0. ■

Заметим, что линии кривизны 2-го рода минимального неголономного конуса совпадают с окружностями больших кругов тех сфер, на которые расслаивается $\boldsymbol{E}_3$. А линии тока нормалей этого конуса – пространственные кривые, лежащие на сферах. Кривизна линии тока равна $\sqrt{a^2+b^2}$, а кручение $\kappa=-\dfrac{b\alpha_{33}}{a^2+b^2}$.

Теорема 4. *Распределение* Δ_1 *представляет собой неголономный конус, не являющийся минимальным.*

Доказательство. Распределению Δ_1 соответствует уравнение Пфаффа $\omega^1=0$. Так как

$$d\omega^1\wedge\omega^1=\rho\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\neq 0,$$

то это значит, что Δ_1 – неголономное распределение. Его главные кривизны 2-го рода $k_1^{(2)}=0$, $k_2^{(2)}=a\neq 0$. Полная кривизна 2-го рода $K_2=0$, а средняя $H=\dfrac{a}{2}\neq 0$. Плоскость π_1 проходит через неподвижную точку M_0. Всё это характеризует неголономный неминимальный конус. ■

Асимптотические линии распределения Δ_1 определяются уравнениями

$$\begin{gathered} \omega^3(\rho\omega^2 + a\omega^3) = 0, \\ \omega^1 = 0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Асимптотические линии $\rho\omega^2 + a\omega^3 = 0, \omega^1 = 0$ совпадают с линиями кривизны 2-го рода. Это плоские линии с кривизной, равной $\sqrt{\rho^2 + a^2}$. Асимптотические линии $\omega^3 = \omega^1 = 0$ – прямые, проходящие через точку M_0. Линии тока нормалей $(\vec{e}_1)$ распределения Δ_1 являются окружностями с центром в точке M_0 и совпадают с линиями кривизны 2-го рода распределения Δ.

6. Минимальные неголономные цилиндры

Все плоскости минимального неголономного цилиндра параллельны одной прямой. Для него инвариант $b = 0$, а основные формулы имеют вид

$$\begin{gathered} \omega_3^1 = \rho\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 = 0, \\ \omega_2^1 = 0, \\ d\rho = a\rho\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + \alpha_{23}\omega^3, \\ da = a^2\omega^1 + \alpha_{23}\omega^2 + \alpha_{33}\omega^3. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} d\omega^1 = -\rho\omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^2 = 0, \\ d\omega^3 = -\rho\omega^1 \wedge \omega^2 + a\omega^3 \wedge \omega^1. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Теорема 5. *Минимальные неголономные цилиндры существуют с произволом одной функции двух аргументов.*

Доказывается данное предложение аналогично доказательству теоремы 1. ■

Обе асимптотические линии минимального неголономного цилиндра, проходящие через точку M, являются прямыми линиями. Одна из них совпадает с линией кривизны 2-го рода и с эквидирекционной линией. Вторая совпадает с характеристикой плоскости π, полученной при её смещении по любой кривой распределения Δ. Линия тока нормалей – кривая, лежащая в плоскости π_2 и имеющая кривизну, равную a.

Для минимального неголономного цилиндра инвариантное распределение Δ_2 – голономно и определяет слоение, слоями которого являются плоскости.

Распределение Δ_1 неголономно, если $a \neq 0$. Его полная кривизна 2-го рода равна нулю, а средняя равна $\frac{a}{2} \neq 0$. Плоскости π_1 параллельны одной прямой. Таким образом, распределение Δ_1 представляет собой неголономный неминимальный цилиндр. Асимптотические линии распределения Δ_1 определяются уравнениями

$$\omega^3(\rho\omega^2 + a\omega^3) = 0,$$
$$\omega^1 = 0.$$

Одна из них $(\omega^1 = \omega^3 = 0)$ – прямая, являющаяся характеристикой плоскости π, полученной при смещении по кривым распределения Δ. Вторая $(\rho\omega^2 + a\omega^3 = 0, \omega^1 = 0)$ – плоская линия, лежащая в плоскости π_1. Угол α между асимптотическими линиями определяется формулой $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + \rho^2}}$.

Теорема 6. *Существует единственный минимальный неголономный цилиндр с постоянным скаляром неголономности.*

Доказательство. При $\rho = \mathrm{const} \neq 0$ из (6.1) и (6.2) получаем $a = \alpha_{22} = \alpha_{23} = \alpha_{33} = 0$,

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \rho\omega^2, \\ \omega_3^2 &= 0, \\ \omega_2^1 &= 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= -\rho\omega^2 \wedge \omega^3, \\ d\omega^2 &= 0, \\ d\omega^3 &= -\rho\omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Система (6.3), а следовательно, и система

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2 + \omega^3\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_1 &= -\rho\omega^2\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= \vec{0}, \\ d\vec{e}_3 &= \rho\omega^2\vec{e}_1 \end{aligned} \tag{6.5}$$

вполне интегрируема и при заданном $\rho = \mathrm{const}$ имеет единственное решение. Проинтегрируем систему (6.5). Так как $d\omega^2 = 0$, то можно положить $\omega^2 = du$. Покажем, что формы ω^1, ω^3 можно представить в виде $\omega^1 = dv + t_1 du$, $\omega^3 = dw + t_2 du$. Используя (6.4), получим

$$dt_1 \wedge du = -\rho du \wedge dw, dt_2 \wedge du = -\rho dv \wedge du.$$

При $t_1 = \rho w, t_2 = -\rho v$ последние равенства становятся тождествами. Следовательно, можно положить

$$\omega^1 = dv + \rho w du, \omega^3 = dw - \rho v du,$$

где u, v, w – некоторые переменные (параметры). Система (6.5) после этого принимает вид

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dv + \rho w du)\vec{e}_1 + du\vec{e}_2 + (dw - \rho v du)\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_1 &= -\rho du\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= \vec{0}, \\ d\vec{e}_3 &= \rho du\vec{e}_1. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Отсюда видим, что $\vec{e}_2$ – постоянный вектор. Обозначим $\vec{e}_2 = \vec{\varepsilon}_3$. Так как

$$\frac{d\vec{e}_1}{du} = -\rho\vec{e}_3, \frac{d^2\vec{e}_1}{du^2} = -\rho^2\vec{e}_1,$$

то

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{\varepsilon}_1 \cos(\rho u) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\rho u), \\ \vec{e}_3 &= \vec{\varepsilon}_1 \sin(\rho u) - \vec{\varepsilon}_2 \cos(\rho u). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Векторы $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ образуют постоянный ортонормированный базис. Из (6.6), (6.7) имеем

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \vec{\varepsilon}_1 \cos(\rho u) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\rho u),$$

$$\vec{r} = (\vec{\varepsilon}_1 \cos(\rho u) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\rho u))v + \overrightarrow{f(u,w)}.$$

Отсюда и из (6.6) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \vec{\varepsilon}_1 \sin(\rho u) - \vec{\varepsilon}_2 \cos(\rho u).$$

Тогда

$$\overrightarrow{f(u,w)} = (\vec{\varepsilon}_1 \sin(\rho u) - \vec{\varepsilon}_2 \cos(\rho u))w + \overrightarrow{\varphi(u)}$$

и

$$\vec{r} = (\vec{\varepsilon}_1 \cos(\rho u) + \vec{\varepsilon}_2 \sin(\rho u))v + (\vec{\varepsilon}_1 \sin(\rho u) - \vec{\varepsilon}_2 \cos(\rho u))w + \overrightarrow{\varphi(u)}.$$

Используя (6.6) и (6.7), находим

$$\overrightarrow{\varphi(u)} = u\vec{\varepsilon}_3 + \vec{r}_0, \vec{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{const}}.$$

Примем векторы $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$ за базис неподвижной системы координат, а начало координат поместим в точку $A(\vec{r}_0)$, тогда

$$\vec{r} = (v\cos(\rho u) + w\sin(\rho u))\vec{\varepsilon}_1 + (v\sin(\rho u) - w\cos(\rho u))\vec{\varepsilon}_2 + u\vec{\varepsilon}_3.$$

Таким образом, декартовы координаты (x,y,z) точки M относительно выбранной неподвижной системы координат определяются формулами

$$\begin{aligned} x &= v\cos(\rho u) + w\sin(\rho u), \\ y &= v\sin(\rho u) - w\cos(\rho u), \\ z &= u. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Так как $u = z$, то из (6.7) следует, что с постоянным скаляром неголономности $\rho \neq 0$ существует единственное векторное поле

$$\vec{e}_3(\sin(\rho z), -\cos(\rho z), 0),$$

ортогональное распределению, удовлетворяющему условиям теоремы. То есть существует единственный минимальный неголономный цилиндр с постоянным скаляром неголономности. Уравнение Пфаффа, ему соответствующее, имеет вид

$$\sin(\rho z)dx - \cos(\rho z)dy = 0. \ \blacksquare \tag{6.9}$$

Получим уравнения инвариантных кривых и поверхностей в той неподвижной системе координат, в которой записано уравнение (6.9).

Линии тока векторного поля $\vec{e}_3$ – прямые

$$z = c,$$
$$x\cos(\rho c) + y\sin(\rho c) = c_1.$$

Эквидирекционные поверхности – плоскости $z = c$. Асимптотические линии, совпадающие с линиями кривизны 2-го рода, определяются уравнениями

$$z = c,$$
$$x\sin(\rho c) - y\cos(\rho c) = c_2,$$

а асимптотические линии, ортогональные им, – уравнениями

$$x = a,$$
$$y = b.$$

Линии кривизны 1-го рода состоят из интегральных кривых системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}(\cos(\rho z)dx + \sin(\rho z)dy)^2 - (dz)^2 = 0,\\ \sin(\rho z)dx - \cos(\rho z)dy = 0.\end{gathered} \tag{6.10}$$

Проинтегрировав систему (6.10), получим уравнения линий кривизны 1-го рода:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{\rho}\sin t + c_1,\\ y &= -\frac{1}{\rho}\cos t + c_2,\\ z &= -\frac{1}{\rho}t \end{aligned} \tag{6.11}$$

и

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\rho}\sin t + a_1,\\ y &= \frac{1}{\rho}\cos t + a_2,\\ z &= -\frac{1}{\rho}t. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Из (6.11) и (6.12) видим, что линиями кривизны 1-го рода являются винтовые линии, имеющие одинаковое кручение и векторы кривизны, отличающиеся лишь знаком. Линии кривизны 1-го рода, проходящие через точку (x_0, y_0, z_0), лежат на двух цилиндрах

$$(x - x_0 + \frac{1}{\rho}\sin(\rho z_0))^2 + (y - y_0 - \frac{1}{\rho}\cos(\rho z))^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

и

$$(x - x_0 - \frac{1}{\rho}\sin(\rho z))^2 + (y - y_0 + \frac{1}{\rho}\cos(\rho z_0))^2 = \frac{1}{\rho^2}$$

одинакового радиуса с общей образующей, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0). Плоскость π – это общая касательная плоскость цилиндров. Эквидирекционная плоскость ортогональна общей образующей цилиндров (см. рис. 1 и 2).

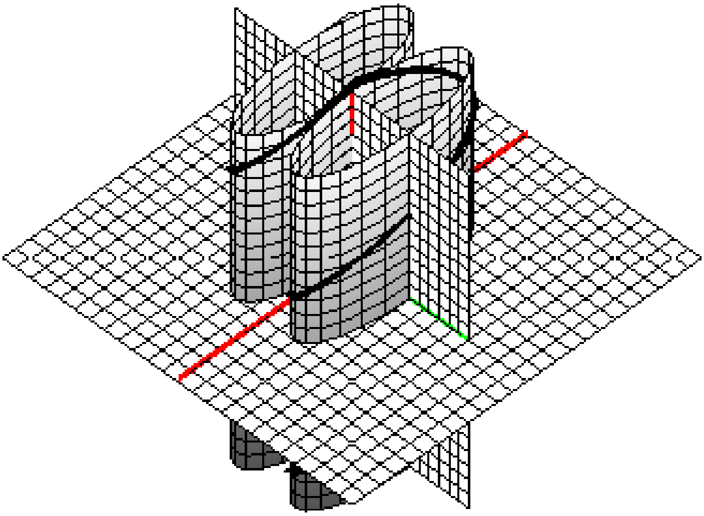

Рис. 1

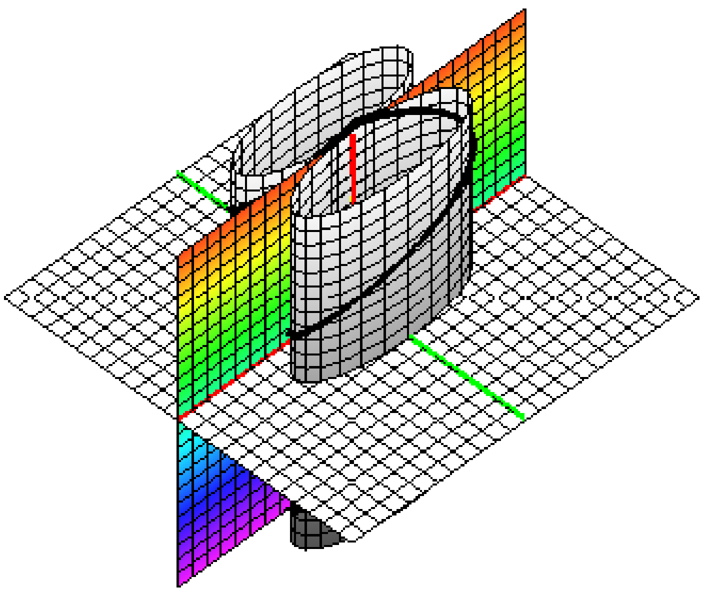

Рис. 2

Линии кривизны 1-го рода (винтовые линии) в точке (x_0, y_0, z_0) имеют общую главную нормаль, совпадающую с линией тока векторного поля. Та асимптотическая линия, которая является линией кривизны 2-го рода, ортогональна общей образующей цилиндров и вектору поля. Вторая асимптотическая линия совпадает с общей образующей цилиндров.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А.*, *Новиков С.П.*, *Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
2. *Вершик А.М.*, *Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. Том 16. М.: ВИНИТИ, 1987. С. 7 – 85.
3. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
4. *Онищук Н.М.* Векторные поля с нулевой полной кривизной 2-го рода. Исследования по математическому анализу и алгебре // Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998. С. 107 – 112.
5. *Бюшгенс С.С.* Дифференциальная геометрия. М.; Л.: ГИТТЛ, 1940.
6. *Слухаев В.В.* Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ОНИЩУК Надежда Максимовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Томского госуниверситета. E-mail: sengulie@yandex.ru

ЦОКОЛОВА Ольга Вячеславовна – студентка механико-математического факультета Томского госуниверситета. E-mail: tov234@mail.ru

Статья принята в печать 19.05.2009 г.