

УДК 515.122.532

Я.С. Гриншпон

ТОПОЛОГИИ ЛИНЕЙНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

На вещественной плоскости вводятся топологии линейной непрерывности, т.е. такие топологии, непрерывность функции относительно которых равносильна непрерывности всех сужений этой функции вдоль любой прямой на плоскости. Исследуются регулярность и нормальность данных топологий.

Ключевые слова: *линейная непрерывность, топологии произведения пространств.*

При рассмотрении функции двух переменных $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ обычно рассматривают два понятия непрерывности: непрерывность по каждой из переменных в отдельности (раздельная непрерывность) и непрерывность по совокупности переменных (совместная непрерывность). При этом совместная непрерывность оказывается равносильной непрерывности относительно стандартной топологии произведения пространства $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, а раздельная непрерывность равносильна непрерывности относительно введенных в [1] и [2] топологий $\mathbf{R}_{sr}^2 = \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$ и $\mathbf{R}_{sr}^2 = \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}$.

Естественным обобщением понятия раздельной непрерывности является понятие линейной непрерывности: в [3] функцию двух переменных называют линейно непрерывной, если она непрерывна относительно любой прямой. Более строго, $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ линейно непрерывно, если для любых действительных a и b функции $f_{a,b}(x) = f(x; ax + b)$ и $f_a(x) = f(a; x)$ непрерывны как функции одной переменной. Примеры линейно непрерывных, но не совместно непрерывных функций можно найти, например, в [4].

Аналогично топологиям $\mathbf{R}_s^2$ и $\mathbf{R}_{sr}^2$ определим топологии $\mathbf{R}_l^2$ и $\mathbf{R}_{lr}^2$, непрерывность относительно которых равносильна линейной непрерывности. Множество G будем считать открытым в $\mathbf{R}_l^2$, если для любых a и b сечения $G_{a,b} = \{x: (x; ax + b) \in G\}$ и $G_a = \{x: (a; x) \in G\}$ открыты в $\mathbf{R}$ (или что то же самое: множество F замкнуто в $\mathbf{R}_l^2$, если для любых a и b сечения $F_{a,b} = \{x: (x; ax + b) \in F\}$ и $F_a = \{x: (a; x) \in F\}$ замкнуты в $\mathbf{R}$). Рассмотрим семейство всех вполне регулярных на $\mathbf{R}^2$ топологий, которые слабее топологии пространства $\mathbf{R}_l^2$. Тогда $\mathbf{R}_{lr}^2$ – это множество $\mathbf{R}^2$, наделенное слабой топологией, которая сильнее всех топологий из данного семейства.

Очевидно, что $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ линейно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: \mathbf{R}_l^2 \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывно. Покажем, что аналогичное утверждение верно и для пространства $\mathbf{R}_{lr}^2$.

Теорема 1. $\mathbf{R}_{lr}^2$ – вполне регулярное пространство и $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ линейно непрерывно тогда и только тогда, когда $f: \mathbf{R}_{lr}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывно.

Доказательство. Пусть F – замкнутое в $\mathbf{R}_{lr}^2$ множество и $z \in \mathbf{R}^2 \setminus F$. Тогда $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$, где $F_1, F_2, \dots, F_n$ – замкнутые множества в некоторых вполне регулярных топологиях, более слабых, чем топология пространства $\mathbf{R}_{lr}^2$. В ка-

ждой из этих топологий существует непрерывное отображение $f_k: \mathbf{R}^2 \rightarrow [0; 1]$, такое, что $f_k(z) = 0$ и $f_k(F_k) = \{1\}$. Функция $f = \max \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ доказывает вполне регулярность пространства $\mathbf{R}_{lr}^2$.

Пусть теперь $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ – линейно непрерывное отображение. Тогда топология, образованная прообразами всех открытых в $\mathbf{R}$ множеств, является вполне регулярной и более слабой, чем топология $\mathbf{R}_l^2$. Следовательно, эта топология слабее и топологии пространства $\mathbf{R}_{lr}^2$, а значит, $f: \mathbf{R}_{lr}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывно.

Если же $f: \mathbf{R}_{lr}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывно, то $f: \mathbf{R}_l^2 \rightarrow \mathbf{R}$ также непрерывно, так как топология $\mathbf{R}_l^2$ сильнее топологии $\mathbf{R}_{lr}^2$, а значит, и $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ линейно непрерывно. $\square$

Необходимость введения вполне регулярной топологии $\mathbf{R}_{lr}^2$ оправдывает следующая теорема:

Теорема 2. Пространство $\mathbf{R}_l^2$ не является регулярным.

Доказательство. Покажем, что на множестве рациональных чисел $\mathcal{Q}$ можно ввести нумерацию $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ так, чтобы на любой прямой лежало только конечное число точек вида $\left(\frac{1}{n}; r_n\right)$.

Пусть $\mathcal{Q} = \{q_n\}_{n=1}^\infty$ и $\mathcal{Q}^2 = \{(a_n; b_n)\}_{n=1}^\infty$ – занумерованные произвольным образом множество рациональных чисел и декартов квадрат этого множества. Тогда положим $r_1 = q_1$, если $q_1 \neq a_1 + b_1$, и $r_1 = q_2$, если $q_1 = a_1 + b_1$. Далее, методом математической индукции для каждого натурального k выберем число r_k следующим образом: найдем наименьший из номеров m , таких, что $q_m \in \mathcal{Q} \setminus \{r_1; r_2; \dots; r_{k-1}\}$ и $q_m \neq \frac{a_1}{k} + b_1, q_m \neq \frac{a_2}{k} + b_2, \dots, q_m \neq \frac{a_k}{k} + b_k$, и положим $r_k = q_m$.

Из данного построения видно, что множество $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ совпадает со множеством $\mathcal{Q}$ всех рациональных чисел.

Рассмотрим теперь равенство $r_n = \frac{a}{n} + b$. Если $a = a_k$ и $b = b_k$ – рациональные числа, то данное равенство может быть верным лишь при $n < k$. Если же хотя бы одно из чисел a или b иррационально, то данное равенство выполняется не более чем для одного номера n . Действительно, если предположить, что $r_n = \frac{a}{n} + b$ и

$$r_m = \frac{a}{m} + b, \text{ где } n \neq m, \text{ то } r_n - r_m = a \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right), \text{ и значит, числа } a \text{ и } b \text{ рациональны.}$$

Итак, в любом случае, $r_n = \frac{a}{n} + b$ только для конечного числа индексов n .

Множество $F = \left\{ \left(\frac{1}{n}; r_n \right) \right\}_{n=1}^\infty$ замкнуто в $\mathbf{R}_l^2$, так как все его сечения $F_{a,b}$ и F_a конечны. Покажем, что F и точку $(0; 0)$ нельзя отделить окрестностями в пространстве $\mathbf{R}_l^2$.

Пусть U – произвольная окрестность множества F , а V – окрестность точки $(0; 0)$. Сечения $U_{\frac{1}{n}}$ и V_0 открыты в $\mathbf{R}$, причем $r_n \in U_{\frac{1}{n}}$ и $0 \in V_0$. Так как $\mathcal{Q}$ всюду

плотно в $\mathbf{R}$, то найдется номер n_1 и окрестность V_1 , такие, что $r_{n_1} \in V_1 \subset \bar{V}_1 \subset V_0 \cap U_{\frac{1}{n_1}}$. Аналогично, $r_{n_2} \in V_2 \subset \bar{V}_2 \subset V_1 \cap U_{\frac{1}{n_2}}$. Продолжая данное

построение по индукции, получим убывающую последовательность компактов

$\{\bar{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ и точку c , такую, что $c \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{V}_k \subset V_0 \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\frac{1}{n_k}} \right)$. Так как сечение $V_{0,c}$

открыто в $\mathbf{R}$ и $0 \in V_{0,c}$, то, начиная с некоторого номера, $\left(\frac{1}{n}; c\right) \in V$. Следовательно

но, существует номер n_k , такой, что $\left(\frac{1}{n_k}; c\right) \in V \cap U$, и значит, пространство $\mathbf{R}_l^2$ не

является регулярным. ■

Итак, топологии пространств $\mathbf{R}_l^2$ и $\mathbf{R}_{lr}^2$ существенно различны: одна из них не-регулярна, а другая – вполне регулярна. Приведем пример множества, различающего эти топологии. А именно, покажем, что множество $F = \left\{ \left(\frac{1}{n}; r_n \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ из дока-

зательства теоремы 2 замкнуто в $\mathbf{R}_l^2$, но не замкнуто в $\mathbf{R}_{lr}^2$.

Замкнутость множества F в топологии пространства $\mathbf{R}_l^2$ была показана выше. Предположим теперь, что F замкнуто и в $\mathbf{R}_{lr}^2$. Тогда найдется непрерывная функция $f: \mathbf{R}_{lr}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, для которой $f(0; 0) = 0$ и $f(F) = \{1\}$. Функция f линейно непрерывна, поэтому существует такое число $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(0; x)| < \frac{1}{3}$.

Множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbf{R}$, поэтому для некоторого натурального числа n_1 верно включение $r_{n_1} \in (-\varepsilon; \varepsilon)$. Так как $f\left(\frac{1}{n_1}; r_{n_1}\right) = 1$, то

существует число $\varepsilon_1 < \varepsilon$, такое, что $(r_{n_1} - \varepsilon_1; r_{n_1} + \varepsilon_1) \subset (-\varepsilon; \varepsilon)$ и для всех $x \in (r_{n_1} - \varepsilon_1; r_{n_1} + \varepsilon_1)$ выполняется $f\left(\frac{1}{n_1}; x\right) > \frac{2}{3}$. Обозначим теперь через $n_2 > n_1$

номер рационального числа, принадлежащего интервалу $(r_{n_1} - \varepsilon_1; r_{n_1} + \varepsilon_1)$, а через $\varepsilon_2 < \frac{\varepsilon_1}{2}$ – такое положительное число, что $(r_{n_2} - \varepsilon_2; r_{n_2} + \varepsilon_2) \subset (r_{n_1} - \varepsilon_1; r_{n_1} + \varepsilon_1)$ и

для всех $x \in (r_{n_2} - \varepsilon_2; r_{n_2} + \varepsilon_2)$ выполняется $f\left(\frac{1}{n_2}; x\right) > \frac{2}{3}$. Продолжая это по-

строение по индукции, получим фундаментальную последовательность $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Пусть r_0 – предел этой последовательности. Так как $r_0 \in (-\varepsilon; \varepsilon)$, то $f(0; r_0) < \frac{1}{3}$. С

другой стороны, $f\left(\frac{1}{n_k}; r_0\right) > \frac{2}{3}$, а значит, и $f(0; r_0) > \frac{2}{3}$. Противоречие.

Теорема 3. Пространство $\mathbf{R}^2_{lr}$ не является нормальным.

Доказательство. Вначале покажем, что множество $D = \{(x; y) : x^2 + y^2 = 1\}$ дискретно в $\mathbf{R}^2_{lr}$. Зафиксируем $(x_0; y_0) \in D$, и для каждой точки $(x; y) \in \mathbf{R}^2$ обозначим через ρ и φ – полярные координаты с центром в нуле, а через ρ' и φ' – полярные координаты с центром в $(2x_0; 2y_0)$, т.е.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \rho' = \sqrt{(x - 2x_0)^2 + (y - 2y_0)^2},$$

$$\cos \varphi' = \frac{x - 2x_0}{\sqrt{(x - 2x_0)^2 + (y - 2y_0)^2}}, \quad \sin \varphi' = \frac{y - 2y_0}{\sqrt{(x - 2x_0)^2 + (y - 2y_0)^2}}$$

(для точек $(0; 0)$ и $(2x_0; 2y_0)$ углы φ и φ' соответственно не определены). Зададим функцию $f(x; y)$ в полосе $0 \leq \rho \cos(\varphi - \varphi_0) \leq 2$ (или что тоже самое $0 \leq \rho' \cos(\varphi' - \varphi'_0) \leq 2$) без точки $(x_0; y_0)$ следующим образом:

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{1 - \rho^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)}, & \text{если } \rho \leq 1, 0 \leq \rho \cos(\varphi - \varphi_0) \leq 1, (x; y) \neq (x_0; y_0); \\ \frac{\rho'^2 \sin^2(\varphi' - \varphi'_0)}{1 - \rho'^2 \cos^2(\varphi' - \varphi'_0)}, & \text{если } \rho' \leq 1, 0 \leq \rho' \cos(\varphi' - \varphi'_0) \leq 1, (x; y) \neq (x_0; y_0); \\ \frac{1 - \rho^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)}{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}, & \text{если } \rho \geq 1, 0 \leq \rho \cos(\varphi - \varphi_0) \leq 1, (x; y) \neq (x_0; y_0); \\ \frac{1 - \rho'^2 \cos^2(\varphi' - \varphi'_0)}{\rho'^2 \sin^2(\varphi' - \varphi'_0)}, & \text{если } \rho' \geq 1, 0 \leq \rho' \cos(\varphi' - \varphi'_0) \leq 1, (x; y) \neq (x_0; y_0). \end{cases}$$

Заметим, что при $(x; y) \neq (x_0; y_0)$, т.е. при $\varphi \neq \varphi_0$ и $\varphi' \neq \varphi'_0$, выполняются равенства

$$\lim_{\rho \rightarrow 1-0} \frac{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{1 - \rho^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{1 - \rho^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)}{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)} = 1$$

и

$$\lim_{\rho' \rightarrow 1-0} \frac{\rho'^2 \sin^2(\varphi' - \varphi'_0)}{1 - \rho'^2 \cos^2(\varphi' - \varphi'_0)} = \lim_{\rho' \rightarrow 1+0} \frac{1 - \rho'^2 \cos^2(\varphi' - \varphi'_0)}{\rho'^2 \sin^2(\varphi' - \varphi'_0)} = 1.$$

Кроме того, уравнения $\rho \cos(\varphi - \varphi_0) = 1$ и $\rho' \cos(\varphi' - \varphi'_0) = 1$ задают одну и ту же прямую, являющуюся общей касательной окружностей $\rho = 1$ и $\rho' = 1$, и на этой прямой функция тождественно равна нулю. Значит, функция $f(x; y)$ определена корректно и непрерывна во всей области определения. Продолжим ее непрерывным образом на множество $\mathbf{R}^2 \setminus \{(x_0; y_0)\}$, доопределим $f(x_0; y_0) = 0$ и покажем, что получившаяся функция будет линейно непрерывной в точке $(x_0; y_0)$. Действительно, любая прямая, проходящая через точку $(x_0; y_0)$ (кроме общей касательной $\rho \cos(\varphi - \varphi_0) = 1$), делится в окрестности этой точки на две части: одна из них лежит в круге $\rho < 1$, а вторая – в круге $\rho' < 1$. Общее уравнение прямой, проходящей через $(x_0; y_0)$, можно записать в виде $\rho \sin(\varphi - \varphi_0) = a \rho \cos(\varphi - \varphi_0) - a$. При $\rho < 1$ для сужения функции $f(x; y)$ на данную прямую получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{\rho^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{1 - \rho^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{a^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{(a \cos(\varphi - \varphi_0) - \sin(\varphi - \varphi_0))^2 - a^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)} = \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} \frac{a^2 \sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin(\varphi - \varphi_0) - 2a \cos(\varphi - \varphi_0)} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, для той части прямой, где $\rho' < 1$, также получаем, что предел равен нулю, т.е. совпадает со значением функции в точке $(x_0; y_0)$.

Итак, $f: \mathbf{R}^2_{lr} \rightarrow \mathbf{R}$ непрерывно и

$$\{(x_0; y_0)\} = D \cap f^{-1}((-0,5; 0,5)) \cap \left\{ (x; y) : -\frac{\pi}{2} < \varphi - \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Следовательно, точка $(x_0; y_0)$ изолирована в пространстве D с топологией, наследуемой из $\mathbf{R}^2_{lr}$.

Обозначим $F_1 = \{(\cos \varphi; \sin \varphi)\}_{\varphi \in [0; 2\pi) \cap Q}$ и $F_2 = \{(\cos \varphi; \sin \varphi)\}_{\varphi \in [0; 2\pi) \setminus Q}$, где Q – множество рациональных чисел. Из замкнутости и дискретности D следует замкнутость множеств F_1 и F_2 . Пусть G_1 и G_2 – произвольные окрестности множеств F_1 и F_2 соответственно в пространстве $\mathbf{R}^2_{lr}$. Для каждого $\varphi \in [0; 2\pi)$ определим число

$$r(\varphi) = \sup \{ \varepsilon > 0 : \{ \cos \varphi \} \times (\sin \varphi - \varepsilon; \sin \varphi + \varepsilon) \cup (\cos \varphi - \varepsilon; \cos \varphi + \varepsilon) \times \{ \sin \varphi \} \subset G_i \},$$

где $i = 1$ или $i = 2$. Так как функции $f_{0, \sin \varphi}(x) = f(x, \sin \varphi)$ и $f_{\cos \varphi}(x) = f(\cos \varphi; x)$ непрерывны, то $r(\varphi) > 0$.

Для каждого натурального n обозначим $\Phi_n = \left\{ \varphi : r(\varphi) \geq \frac{1}{n} \right\}$. Тогда

$[0; 2\pi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ и по теореме Бэра о категориях получаем, что при некотором n_0 множество Φ_{n_0} не является нигде не плотным, т.е. существуют φ_0 и ε_0 , такие, что

$$(\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \subset \bar{\Phi}_{n_0}, \text{ причем можно считать, что } \varepsilon_0 < \frac{1}{2n_0}.$$

Пусть множество $(\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap \Phi_{n_0}$ не содержит рациональных чисел. Тогда выберем числа

$$\varphi_1 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap Q$$

и $\varphi_2 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap (\varphi_1 - r(\varphi_1); \varphi_1 + r(\varphi_1)) \cap \Phi_{n_0}$.

Видно, что $(\cos \varphi_1; \sin \varphi_1) \in F_1$, а $(\cos \varphi_2; \sin \varphi_2) \in F_2$. Более того, так как по формуле конечных приращений Лагранжа $|\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1| \leq |\varphi_2 - \varphi_1| < r(\varphi_1)$, то из определения числа $r(\varphi_1)$ получаем, что $(\cos \varphi_1; \sin \varphi_2) \in G_1$. С другой стороны, $|\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2| \leq |\varphi_1 - \varphi_2| < 2\varepsilon_0 < \frac{1}{n_0}$ и $\varphi_2 \in \Phi_{n_0}$, т.е. $r(\varphi_2) \geq \frac{1}{n_0}$, а значит, $(\cos \varphi_1; \sin \varphi_2) \in G_2$. Итак, в этом случае, $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Пусть теперь множество $(\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap \Phi_{n_0}$ не содержит иррациональных чисел. Выберем числа

$$\varphi_2 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \setminus Q$$

и $\varphi_1 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap (\varphi_2 - r(\varphi_2); \varphi_2 + r(\varphi_2)) \cap \Phi_{n_0}$

и аналогично предыдущему случаю покажем, что $(\cos \varphi_1; \sin \varphi_2) \in G_1 \cap G_2$.

Осталось рассмотреть случай, когда множество $(\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap \Phi_{n_0}$ содержит как рациональные, так и иррациональные числа. Тогда

$$\varphi_1 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap \Phi_{n_0} \cap Q \quad \text{и} \quad \varphi_2 \in (\varphi_0 - \varepsilon_0; \varphi_0 + \varepsilon_0) \cap \Phi_{n_0} \setminus Q.$$

Так как $|\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2| < \frac{1}{n_0}$ и $|\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2| < \frac{1}{n_0}$, а $r(\varphi_1) \geq \frac{1}{n_0}$ и $r(\varphi_2) \geq \frac{1}{n_0}$, то и

в этом случае $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Knight C.J., Moran W., Pym J.S. The topologies of separate continuity. I // Proc. of Cambridge Philosophy Society. 1970. No. 68. P. 663 – 671.
2. Knight C.J., Moran W., Pym J.S. The topologies of separate continuity. II // Proc. of Cambridge Philosophy Society. 1972. No. 71. P. 307 – 319.
3. Piotrowski Z., Valin R.W. Separately continuous functions: approximations, extensions, and restrictions // Int. J. Mathematics and Mathematical Sciences. 2003. V. 54. P. 3469 – 3477
4. Young W.H., Young G.C. Discontinuous functions continuous with respect to every straight line // Quarter Journal of Mathematics. Oxford. 1910. No. 41. P. 87 – 93.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ГРИНШПОН Яков Самуилович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. E-mail: grinchpon@mail.ru

Статья принята в печать 07.02.2010 г.