

УДК 519.95

В.М. Зюзьков

НЕРАЗРЕШИМЫЕ КОСВЕННО РЕФЛЕКСИВНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Для теории формальной арифметики доказывается обобщение на случай косвенной рефлексии известной леммы о диагонализации (о рефлексии). Изучаются косвенно самоссылочные предложения в формальной арифметике (в предположении, что данная теория ω -непротиворечива), «говорящие» о доказуемости или опровержимости. Рассматриваются некоторые совокупности таких предложений и доказывается, что среди них существуют неразрешимые предложения. Показывается, что если доказуемость и опровержимость заменить истиной и ложью, то существование неразрешимых предложений приводит к парадоксам.

Ключевые слова: *формальная арифметика, диагонализация, косвенная рефлексия, неразрешимые предложения, парадоксы.*

Формула языка теории первого порядка T называется неразрешимой в T , если ни сама формула, ни её отрицание не являются теоремами этой теории. Таким образом, теория T неполна тогда и только тогда, когда существуют неразрешимые формулы в этой теории.

Если предполагать, что теория формальной арифметики S ω -непротиворечива, то можно построить неразрешимое в этой теории предложение. Впервые это сделал К. Гёдель с помощью процедуры, которая в честь него называется гёделизацией.

Гёделизацией теории формальной арифметики S называется функция g , отображающая инъективно множество всех термов, формул и конечных последовательностей формул во множество целых положительных чисел. При этом требуется: (i) чтобы значение функции g можно было вычислить с помощью некоторого алгоритма, (ii) чтобы существовал алгоритм, позволяющий для каждого целого m определить, является ли m значением функции g , и в случае, если является, то построить тот объект x , для которого $m = g(x)$. Значение функции g для терма (формулы, последовательности формул) называется гёделевым номером соответствующего объекта. Функцию g можно определить стандартным образом (см., например, [1, с. 151, 152; 2, с. 229, 230]).

Для каждого $n \in N$ терм $\ulcorner n \urcorner$ определяется как соответствующий нумерал в теории S . Если M является выражением с гёделевым номером n , то определим $\ulcorner M \urcorner$ как нумерал $\ulcorner n \urcorner$.

В данной работе изучаются косвенно самоссылочные предложения в S (в предположении, что данная теория ω -непротиворечива), «говорящие» о доказуемости и/или опровержимости. Рассматриваются некоторые совокупности таких предложений и доказывается, что среди них существуют неразрешимые предложения. Предварительно доказывается обобщение на случай косвенной рефлексии известной леммы о диагонализации (о рефлексии). Кроме того, показывается, как существование неразрешимых предложений приводит к парадоксам, если доказуемость и опровержимость заменить истиной и ложью.

Косвенная рефлексия в формальной арифметике

Пусть m – целое положительное число и $B_1, B_2, \dots, B_m$ – формулы теории S со свободными переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$. Назовем **m -местной диагонализацией** списка формул $B_1, B_2, \dots, B_m$ список формул

$$C_i \equiv \exists x_1, x_2, \dots, x_m (x_1 = \lceil B_1 \rceil \& x_2 = \lceil B_2 \rceil \& \dots \& x_m = \lceil B_m \rceil \& B_i)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Если $m=1$, то получаем известное определение диагонализации формулы.

Лемма 1. Существуют вычислимые функции $d_1(x_1, x_2, \dots, x_m), d_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, d_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$, такие, что если $n_1, n_2, \dots, n_m$ – гёделевы номера формул $B_1, B_2, \dots, B_m$, то $d_1(n_1, n_2, \dots, n_m), d_2(n_1, n_2, \dots, n_m), \dots, d_m(n_1, n_2, \dots, n_m)$ – соответственно гёделевы номера формул $C_1, C_2, \dots, C_m$.

Доказательство. Для произвольных натуральных чисел $n_1, n_2, \dots, n_m$ и для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ определим $d_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ как гёделевый код формулы

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_m (x_1 = n_1 \& x_2 = n_2 \& \dots \& x_m = n_m \& B_i).$$

Функции d_i вычислимы. Действительно, зная $n_1, n_2, \dots, n_m$, можно алгоритмически проверить, являются ли данные числа гёделевыми номерами формул. Если это так, то можно построить соответствующие формулы $B_1, B_2, \dots, B_m$ и алгоритмическим способом отыскать свободные переменные в этих формулах и убедиться, что они суть $x_1, x_2, \dots, x_m$. После этого, в соответствии с имеющейся гёделевой нумерацией можно вычислить код C_i .

Детали используемых алгоритмов зависят от конкретной гёделизации. Функция d_i не определена в тех случаях, когда какое-то n_k не является гёделевым номером формулы со свободными переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$. ■

Так как вычислимые функции $d_1, d_2, \dots, d_m$ представимы в теории S , то существуют формулы $D_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y), D_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y), \dots, D_m(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$, такие, что если для любых i ($1 \leq i \leq m$), $n_1, n_2, \dots, n_m$ и k_i имеем $d_i(n_1, n_2, \dots, n_m) = k_i$, то

$$\vdash \forall y (D_i(n_1, n_2, \dots, n_m, y) \sim y = k_i)$$

в теории S .

Теорема 1 (о косвенной рефлексии). Пусть m – целое положительное число и $B_1, B_2, \dots, B_m$ – формулы теории S со свободными переменными $x_1, x_2, \dots, x_m$. Тогда существуют такие формулы $G_1, G_2, \dots, G_m$, что

$$\vdash G_1 \sim B_1(\lceil G_1 \rceil, \lceil G_2 \rceil, \dots, \lceil G_m \rceil),$$

$$\vdash G_2 \sim B_2(\lceil G_1 \rceil, \lceil G_2 \rceil, \dots, \lceil G_m \rceil),$$

...

$$\vdash G_m \sim B_m(\lceil G_1 \rceil, \lceil G_2 \rceil, \dots, \lceil G_m \rceil)$$

в теории S .

Доказательство. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ определим формулы

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \equiv \exists y_1, y_2, \dots, y_m (D_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1) \& D_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_2) \& \dots \& D_m(x_1, x_2, \dots, x_m, y_m) \& B_i(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Пусть n_i – гёделев номер формулы F_i соответственно. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ определим формулы

$$G_i \equiv \exists x_1, x_2, \dots, x_m (x_1 = n_1 \& x_2 = n_2 \& \dots \& x_m = n_m \& F_i(x_1, x_2, \dots, x_m)).$$

Так как G_i логически эквивалентно

$$\exists y_1, y_2, \dots, y_m (D_1(n_1, n_2, \dots, n_m, y_1) \& D_2(n_1, n_2, \dots, n_m, y_2) \& \dots \& D_m(n_1, n_2, \dots, n_m, y_m) \& B_i(y_1, y_2, \dots, y_m)),$$

то имеем

$$\vdash G_i \sim \exists y_1, y_2, \dots, y_m (D_1(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m, y_1) \& D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m, y_2) \& \dots \& \\ \& D_m(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m, y_m) \& B_i(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Формулы $G_1, G_2, \dots, G_m$ образуют m -местную диагонализацию формул $F_1, F_2, \dots, F_m$. Пусть k_i – гёделев номер формулы G_i , соответственно. Для всех $i = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$\vdash \forall y (D_i(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m, y) \sim y = k_i).$$

Значит,

$$\vdash G_i \sim \exists y_1, y_2, \dots, y_m (y_1 = k_1 \& y_2 = k_2 \& \dots \& y_m = k_m \& B_i(y_1, y_2, \dots, y_m)).$$

Следовательно,

$$\vdash G_i \sim B_i(k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Т. е. для всех $i = 1, 2, \dots, m$ имеем

$$\vdash G_i \sim B_i(\ulcorner G_1 \urcorner, \ulcorner G_2 \urcorner, \dots, \ulcorner G_m \urcorner). \blacksquare$$

Замечание 1. Если $m = 1$, то получаем известную теорему о диагонализации (о рефлексии). Пусть $B(x)$ произвольная формула формальной арифметики, имеющая единственную свободную переменную x . Тогда можно построить замкнутую формулу G , такую, что $\vdash G \sim B(\ulcorner G \urcorner)$. Формула G «говорит о себе», что она обладает свойством B .

Замечание 2. Некоторые из формул B_i могут не содержать всех переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$. Соответствующее утверждение остается в силе и при этих допущениях. В частности, справедливо следующее утверждение: пусть $B_1(x)$ и $B_2(x)$ – две формулы с единственной свободной переменной x . Тогда существуют формулы G_1 и G_2 , такие, что выполнено $\vdash G_1 \sim B_1(\ulcorner G_2 \urcorner)$ и $\vdash G_2 \sim B_2(\ulcorner G_1 \urcorner)$.

Будем предполагать, что теория $\mathcal{S}$ в стандартной интерпретации непротиворечива. Это означает, что любая замкнутая формула является либо истинной, либо ложной в стандартной интерпретации.

Как известно [1], отношение $Provable(n, m)$: «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в $\mathcal{S}$ и ее доказательство имеет номер m », возможно выразить в $\mathcal{S}$ некоторой формулой $Pr(x, y)$, т.е.

1) если $Provable(n, m)$ истинно, то $\vdash Pr(\mathbf{n}, \mathbf{m})$,

2) если $Provable(n, m)$ ложно, то $\vdash \neg Pr(\mathbf{n}, \mathbf{m})$.

Формула $P(\mathbf{n}) \equiv \exists y Pr(\mathbf{n}, y)$ выражает свойство «формула с гёделевым номером n является выводимой (доказуемой) в $\mathcal{S}$ ».

Замечание 3. Описанную выше гёделеву нумерацию можно провести таким образом, чтобы для любой формулы A элементарной арифметики из $\vdash A$ следовало $\vdash P(\ulcorner A \urcorner)$ [3, с. 27].

Определение ω -непротиворечивости. Говорят, что формальная арифметика является ω -непротиворечивой, если следующие два условия не выполняются вместе ни для какой формулы φ :

(i) $\vdash \exists y \varphi(y)$;

(ii) $\vdash \neg \varphi(0), \vdash \neg \varphi(1), \vdash \neg \varphi(2), \dots$

Лемма 2. Пусть формальная арифметика ω -непротиворечива, тогда для любой формулы A отношения $\vdash P(\ulcorner A \urcorner)$ и $\vdash A$ равносильны.

Доказательство. В силу замечания 3 осталось доказать только, что для любой формулы A отношение $\vdash P(\ulcorner A \urcorner)$ влечет $\vdash A$. Докажем от противного. Пусть имеем $\vdash P(\ulcorner A \urcorner)$ и не выполнено $\vdash A$. Положим $\varphi(y) \equiv Pr(\ulcorner A \urcorner, y)$. Так как $P(\ulcorner A \urcorner) \equiv \exists y \varphi(y)$,

то имеем $\vdash \exists y \varphi(y)$. Так как не выполнено $\vdash A$, то ни для какого натурального числа m доказательство с номером m не является доказательством формулы A . Поэтому для любого m имеем $\vdash \neg Pr(\ulcorner A \urcorner, m)$, или в других обозначениях $\vdash \neg \varphi(m)$. Таким образом, одновременно выполнено

$$\begin{aligned} &\vdash \exists y \varphi(y); \\ &\vdash \neg \varphi(0), \vdash \neg \varphi(1), \vdash \neg \varphi(2), \dots, \end{aligned}$$

что означает ω -противоречивость формальной арифметики. ■

Отметим, что из леммы 2 не следует $\vdash A \sim P(\ulcorner A \urcorner)$.

В дальнейшем будем использовать символ « $\Leftrightarrow$ » как обозначение слов «тогда и только тогда, когда», в частности, лемма 2 утверждает, что $\vdash P(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \vdash A$.

Свойство $\vdash \neg A$ будем обозначать словами «формула A опровержима». Поэтому для любой формулы A её доказуемость логически равносильна опровержимости $\neg A$. Далее, соответствие $\ulcorner A \urcorner \leftrightarrow \ulcorner \neg A \urcorner$ очевидным образом является взаимно-однозначным и вычислимым. Следовательно, обозначение $R(\ulcorner A \urcorner)$ для формулы $P(\ulcorner \neg A \urcorner)$ не является двусмысленным.

Поэтому, если теория формальной арифметики $\mathcal{S}$ является ω -непротиворечивой, то в силу леммы 2 выражение « A доказуема» одновременно означает $\vdash A$ и $\vdash P(\ulcorner A \urcorner)$, а выражение « A опровержима» одновременно означает как $\vdash \neg A$, так и $R(\ulcorner A \urcorner)$.

Далее в статье рассматриваются формулы вида $C(x)$, где формула C совпадает с одной из формул P , R , $\neg P$ и $\neg R$. В зависимости от выбора C замкнутая формула $C(\ulcorner A \urcorner)$ «утверждает» доказуемость (опровержимость, недоказуемость, неопровержимость) формулы A .

Утверждения, аналогичные лемме 2, но относящиеся к формулам $\neg P$ и $\neg R$, не имеют места. Точнее, логические равносильности $\vdash \neg P(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow \vdash \neg A$, $\vdash \neg P(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow$ «не $\vdash A$ » и $\vdash \neg R(\ulcorner A \urcorner) \Leftrightarrow$ «не $\vdash \neg A$ » не выполняются в общем случае. Поэтому употреблять такие выражения, как «формула A недоказуема» и «формула A неопровержима», следует с осторожностью. Например, «формула A недоказуема» означает $\vdash \neg P(\ulcorner A \urcorner)$ или «не $\vdash A$ »? Условимся о следующем: когда предложение A_1 , «говорит» о другом предложении A_2 , что оно недоказуемо или неопровержимо, то всегда подразумевается соответственно $\vdash A_1 \sim \neg P(\ulcorner A_2 \urcorner)$ или $\vdash A_1 \sim R(\ulcorner A_2 \urcorner)$. В остальных случаях слова «формула A недоказуема» означает ложность $\vdash A$ (истинность «не $\vdash A$ »).

Существование неразрешимых предложений

Далее всюду предполагается, что теория формальной арифметики $\mathcal{S}$ является ω -непротиворечивой.

Будем рассматривать различные группы предложений, «косвенно говорящих» о своей доказуемости или опровержимости. Теорема о косвенной рефлексии утверждает, что такие предложения выразимы соответствующими формулами в теории $\mathcal{S}$.

Нам понадобится в дальнейшем ряд лемм.

Лемма 3. Если формулы α и β таковы, что выполнено $\vdash \alpha \sim \beta$ и формула α неразрешима, то формула β также неразрешима.

Доказательство. Если $\vdash \beta$, то из $\vdash \alpha \sim \beta$ следует $\vdash \alpha$. Кроме того, из $\vdash \alpha \sim \beta$ следует $\vdash \neg \alpha \sim \neg \beta$, поэтому из $\vdash \neg \beta$ получаем $\vdash \neg \alpha$. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Лемма 4. *А.* Если формулы α и β таковы, что выполнено $\vdash \alpha \sim P(\ulcorner \beta \urcorner)$, то $\vdash \alpha \Leftrightarrow \vdash \beta$.

В. Если формулы α и β таковы, что выполнено $\vdash \alpha \sim \neg P(\ulcorner \beta \urcorner)$, то $\vdash \neg \alpha \Leftrightarrow \vdash \beta$.

Доказательство. *А.* Пусть $\vdash \alpha$, тогда $\vdash P(\ulcorner \beta \urcorner)$, и по лемме 2 имеем $\vdash \beta$. Если же формула α недоказуема, то недоказуема формула $P(\ulcorner \beta \urcorner)$ и снова по лемме 2 недоказуема формула β .

В. Из $\vdash \alpha \sim \neg P(\ulcorner \beta \urcorner)$ следует $\vdash \neg \alpha \sim P(\ulcorner \beta \urcorner)$ и поэтому по первой части леммы получаем $\vdash \neg \alpha \Leftrightarrow \vdash \beta$. ■

Лемма 5. *А.* Если формулы α и β таковы, что выполнено $\vdash \alpha \sim R(\ulcorner \beta \urcorner)$, то $\vdash \alpha \Leftrightarrow \vdash \neg \beta$.

В. Если формулы α и β таковы, что выполнено $\vdash \alpha \sim \neg R(\ulcorner \beta \urcorner)$, то $\vdash \neg \alpha \Leftrightarrow \vdash \neg \beta$.

Доказательство. *А.* Формула $R(\ulcorner \beta \urcorner)$ по определению означает $P(\ulcorner \neg \beta \urcorner)$, и поэтому утверждение данной леммы следует из леммы 4(А).

В. Если $\vdash \alpha \sim \neg R(\ulcorner \beta \urcorner)$, то отсюда следует $\vdash \neg \alpha \sim R(\ulcorner \beta \urcorner)$, и теперь по первой части леммы имеем $\vdash \neg \alpha$ тогда и только тогда, когда $\vdash \neg \beta$. ■

Лемма 6. Пусть формулы α , β и γ таковы, что выполнено $\vdash \alpha \Leftrightarrow \vdash \neg \beta$ и $\vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \neg \gamma$. Тогда 1) β или γ неразрешима или 2) $\vdash \alpha \Leftrightarrow \vdash \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим два случая: формула α доказуема и недоказуема. Пусть выполнено $\vdash \alpha$, тогда $\vdash \neg \beta$, следовательно, β недоказуема, и поэтому $\neg \gamma$ также недоказуема. Если $\vdash \gamma$, то формулы α и γ доказуемы вместе. Если же формула γ недоказуема, то формулы $\neg \gamma$ и γ недоказуемы вместе, т.е. в этом случае формула γ неразрешима.

Пусть теперь α недоказуема, тогда и формула $\neg \beta$ недоказуема. Если же формула β недоказуема, то он разрешима. Поэтому пусть β доказуема, тогда $\vdash \neg \gamma$ и, следовательно, γ недоказуема. Таким образом, в этом случае формулы α и γ недоказуемы вместе. ■

Лемма 7. Пусть формулы α , β и γ таковы, что выполнено $\vdash \neg \alpha \Leftrightarrow \vdash \beta$ и $\vdash \neg \beta \Leftrightarrow \vdash \gamma$. Тогда 1) α или β неразрешима или 2) $\vdash \alpha \Leftrightarrow \vdash \gamma$.

Доказательство. Перепишем условие леммы в другом порядке $\vdash \gamma \Leftrightarrow \vdash \neg \beta$ и $\vdash \beta \Leftrightarrow \vdash \neg \alpha$. Теперь видим, с точностью до замены обозначений, что выполняется условие леммы 6, откуда и следует требуемое заключение. ■

Первое неразрешимое предложение появилось в знаменитой теореме Курта Гёделя о неполноте (см., например, [4]).

Теорема 2а (по Гёделю). Если формула G такова, что $\vdash G \sim \neg P(\ulcorner G \urcorner)$, то формулы G и $P(\ulcorner G \urcorner)$ неразрешимы.

Доказательство. Лемма 4(В) говорит, что $\vdash \neg G$ тогда и только тогда, когда $\vdash G$. Это не будет противоречием, если формула G неразрешима. Неразрешимость формулы $P(\ulcorner G \urcorner)$ тогда следует из неразрешимости G по лемме 3. ■

Известно также [4], что для существования неразрешимого предложения вместо свойства недоказуемости можно взять свойство опровержимости. Рассмотрение вопроса о связи неразрешимости и опровержимости достаточно полно проведено в книге Раймонда Смаллиана [5].

Теорема 2б (по Смаллиану). Если формула L такова, что $\vdash L \sim R(\ulcorner L \urcorner)$, то формулы L и $R(\ulcorner L \urcorner)$ неразрешимы.

Доказательство. Лемма 5(А) говорит, что $\vdash L$ тогда и только тогда, когда $\vdash \neg L$. Это не будет противоречием, если формула L неразрешима. Неразрешимость формулы $R(\ulcorner L \urcorner)$ следует из неразрешимости L по лемме 3. ■

Теперь перейдем к косвенной рефлексии.

Теорема 3а. Пусть даны предложения ($n > 1$) со косвенной самоссылочностью:

A_1 : «Предложение A_2 доказуемо»;

A_2 : «Предложение A_3 доказуемо»;

A_3 : «Предложение A_4 доказуемо»;

...

A_{n-1} : «Предложение A_n доказуемо»;

A_n : «Предложение A_1 опровержимо».

Тогда предложение A_1 неразрешимо.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ обладает следующими свойствами:

$\vdash A_1 \sim P(\ulcorner A_2 \urcorner)$,

$\vdash A_2 \sim P(\ulcorner A_3 \urcorner)$,

...

$\vdash A_{n-1} \sim P(\ulcorner A_n \urcorner)$,

$\vdash A_n \sim R(\ulcorner A_1 \urcorner)$.

По леммам 4(A) и 5(A) получаем логическую эквивалентность утверждений:

$\vdash \neg A_1 \Leftrightarrow \vdash A_2$,

$\vdash \neg A_2 \Leftrightarrow \vdash A_3$,

...

$\vdash \neg A_{n-1} \Leftrightarrow \vdash A_n$,

$\vdash A_n \Leftrightarrow \vdash \neg A_1$.

Получаем цепь утверждений $\vdash A_1 \Leftrightarrow \vdash A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash A_n$. Имеем отношения: одновременно выполняются $\vdash A_1 \Leftrightarrow \vdash A_n$ и $\vdash A_n \Leftrightarrow \vdash \neg A_1$. Полученный результат не будет противоречием, если формула A_1 неразрешима. ■

Теорема 3б. Пусть даны предложения с косвенной самоссылочностью:

B_1 : «Предложение B_2 неопровержимо»;

B_2 : «Предложение B_3 неопровержимо»;

...

B_{n-1} : «Предложение B_n неопровержимо»;

B_n : «Предложение B_1 опровержимо».

Тогда предложение B_n неразрешимо.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ обладает следующими свойствами:

$\vdash B_1 \sim \neg R(\ulcorner B_2 \urcorner)$,

$\vdash B_2 \sim \neg R(\ulcorner B_3 \urcorner)$,

...

$\vdash B_{n-1} \sim \neg R(\ulcorner B_n \urcorner)$,

$\vdash B_n \sim R(\ulcorner B_1 \urcorner)$.

По лемме 5 получаем логическую эквивалентность утверждений:

$\vdash \neg B_1 \Leftrightarrow \vdash \neg B_2$,

$\vdash \neg B_2 \Leftrightarrow \vdash \neg B_3$,

...

$\vdash \neg B_{n-1} \Leftrightarrow \vdash \neg B_n$,

$\vdash B_n \Leftrightarrow \vdash \neg B_1$.

Получаем цепь утверждений $\vdash \neg B_1 \Leftrightarrow \vdash \neg B_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash \neg B_n$. Получили отношения: одновременно имеем $\vdash \neg B_1 \Leftrightarrow \vdash \neg B_n$ и $\vdash B_n \Leftrightarrow \vdash \neg B_1$. Полученный результат не будет противоречием, если формула B_n неразрешима. ■

Теорема 4а. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

C_1 : «Предложение C_2 недоказуемо»,

C_2 : «Предложение C_3 недоказуемо»,

...

C_n : «Предложение C_1 недоказуемо».

Если n нечетно, то среди предложений $C_1, C_3, C_4, \dots, C_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash C_1 \sim \neg P(\ulcorner C_2 \urcorner),$$

$$\vdash C_2 \sim \neg P(\ulcorner C_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash C_n \sim \neg P(\ulcorner C_1 \urcorner).$$

Случай $n = 1$ доказан в теореме 2а, в этом случае неразрешимой является формула C_1 . Поэтому будем предполагать, что $n \geq 3$. По лемме 4(В) имеем логическую эквивалентность утверждений:

$$\vdash \neg C_1 \Leftrightarrow \vdash C_2,$$

$$\vdash \neg C_2 \Leftrightarrow \vdash C_3,$$

...

$$\vdash \neg C_n \Leftrightarrow \vdash C_1,$$

Множество всех эквивалентностей, за исключением первой, разобьем на подряд идущие пары вида

$$\vdash \neg C_i \Leftrightarrow \vdash C_{i+1},$$

$$\vdash \neg C_{i+1} \Leftrightarrow \vdash C_k,$$

где i пробегает множество $2, 4, \dots, n-2$ и для всех пар, за исключением последней, k обозначает $i+2$, а для последней пары k есть 1. Пусть в каждой такой паре формулы C_{i+1} и C_{i+2} разрешимы, тогда по лемме 7 имеем $\vdash C_i \Leftrightarrow \vdash C_k$. Когда i пробегает четные значения $2, 4, \dots, n-2$, получаем цепь $\vdash C_2 \Leftrightarrow \vdash C_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash C_n$. Отсюда следует $\vdash C_2 \Leftrightarrow \vdash C_n \Leftrightarrow \vdash C_1$. Получили отношения: одновременно имеем $\vdash C_2 \Leftrightarrow \vdash C_1$ и $\vdash \neg C_1 \Leftrightarrow \vdash C_2$. Полученный результат не будет противоречием, если формула C_1 неразрешима. А если это не так, то среди формул $C_3, C_4, \dots, C_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 4б. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

D_1 : «Предложение D_2 опровержимо»;

D_2 : «Предложение D_3 опровержимо»;

...

D_n : «Предложение D_1 опровержимо».

Если n нечетно, то среди предложений $D_2, D_3, D_4, \dots, D_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash D_1 \sim R(\ulcorner D_2 \urcorner),$$

$$\vdash D_2 \sim R(\ulcorner D_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash D_n \sim R(\ulcorner D_1 \urcorner).$$

Случай $n = 1$ доказан в теореме 2б, в этом случае неразрешимой является формула D_n . Поэтому будем предполагать, что $n \geq 3$. По лемме 5(А) имеем логическую эквивалентность утверждений:

$$\vdash D_1 \Leftrightarrow \vdash \neg D_2,$$

$$\vdash D_2 \Leftrightarrow \vdash \neg D_3,$$

...

$$\vdash D_n \Leftrightarrow \vdash \neg D_1.$$

Множество всех эквивалентностей, за исключением первой, разобьем на подряд идущие пары вида

$$\vdash D_i \Leftrightarrow \vdash \neg D_{i+1},$$

$$\vdash D_{i+1} \Leftrightarrow \vdash \neg D_k,$$

где i пробегает множество $2, 4, \dots, n-2$ и для всех пар, за исключением последней, k обозначает $i+2$, а для последней пары k есть 1 . Пусть в каждой такой паре формулы D_{i+1} и D_k разрешимы, тогда по лемме 6 имеем $\vdash D_i \Leftrightarrow \vdash D_k$. Когда i пробегает четные значения $2, 4, \dots, n-2$, получаем цепь $\vdash D_2 \Leftrightarrow \vdash D_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash D_n$. Отсюда следует $\vdash D_2 \Leftrightarrow \vdash D_n \Leftrightarrow \vdash D_1$. Получили отношения: одновременно имеем $\vdash D_2 \Leftrightarrow \vdash D_1$ и $\vdash D_1 \Leftrightarrow \vdash \neg D_2$. Полученный результат не будет противоречием, если формула D_2 неразрешима. А если это не так, то среди формул $D_3, D_4, \dots, D_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 5a. Пусть даны предложения ($n > 1$) с косвенной самоссылочностью:

E_1 : «Предложение E_2 доказуемо»;

E_2 : «Предложение E_3 доказуемо»;

...

E_{n-1} : «Предложение E_n доказуемо»;

E_n : «Предложение E_1 недоказуемо».

Тогда предложение E_n неразрешимо.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash E_1 \sim P(\ulcorner E_2 \urcorner),$$

$$\vdash E_2 \sim P(\ulcorner E_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash E_{n-1} \sim P(\ulcorner E_n \urcorner),$$

$$\vdash E_n \sim \neg P(\ulcorner E_1 \urcorner).$$

Первые $n-1$ отношения по лемме 4(A) дают $\vdash E_1 \Leftrightarrow \vdash E_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash E_n$. Из последнего отношения по лемме 4(B) получаем $\vdash E_1 \Leftrightarrow \vdash \neg E_n$. Полученный результат не будет противоречием, если формула E_n неразрешима. ■

Теорема 5b. Пусть даны предложения с косвенной самоссылочностью:

F_1 : «Предложение F_2 неопровержимо»;

F_2 : «Предложение F_3 неопровержимо»;

...

F_{n-1} : «Предложение F_n неопровержимо»;

F_n : «Предложение F_1 недоказуемо».

Тогда предложение F_n неразрешимо.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash F_1 \sim \neg R(\ulcorner F_2 \urcorner),$$

$$\vdash F_2 \sim \neg R(\ulcorner F_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash F_{n-1} \sim \neg R(\ulcorner F_n \urcorner),$$

$$\vdash F_n \sim \neg P(\ulcorner F_1 \urcorner).$$

По леммам 4 и 5 получаем логическую эквивалентность утверждений:

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg F_1 \Leftrightarrow \vdash \neg F_2, \\
&\vdash \neg F_2 \Leftrightarrow \vdash \neg F_3, \\
&\dots \\
&\vdash \neg F_{n-1} \Leftrightarrow \vdash \neg F_n, \\
&\vdash \neg F_n \Leftrightarrow \vdash F_1.
\end{aligned}$$

Получаем цепь утверждений $\vdash \neg F_1 \Leftrightarrow \vdash \neg F_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash F_1$. Получили отношение $\vdash \neg F_1 \Leftrightarrow \vdash F_1$. Полученный результат не будет противоречием, если формула F_1 неразрешима. ■

Теорема 6а. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

H_1 : «Предложение H_2 недоказуемо»,

H_2 : «Предложение H_3 недоказуемо»,

...

H_{n-1} : «Предложение H_n недоказуемо»,

H_n : «Предложение H_1 доказуемо».

Если n чётно, то среди предложений $H_2, H_3, \dots, H_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Точно также как при доказательствах предыдущих теорем, получаем логическую эквивалентность утверждений:

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg H_1 \Leftrightarrow \vdash H_2, \\
&\vdash \neg H_2 \Leftrightarrow \vdash H_3, \\
&\dots \\
&\vdash \neg H_{n-1} \Leftrightarrow \vdash H_n, \\
&\vdash H_n \Leftrightarrow \vdash H_1.
\end{aligned}$$

Случай $n = 2$ доказан в теореме 5а, при этом формула H_2 неразрешима.

При $n > 2$ разбиваем эти эквивалентности, за исключением первой и последней, на подряд идущие пары. Предполагаем, что все формулы $H_3, H_4, \dots, H_n$ разрешимы, тогда получаем цепь $\vdash H_2 \Leftrightarrow \vdash H_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash H_n$. Отсюда следует $\vdash H_2 \Leftrightarrow \vdash H_n \Leftrightarrow \vdash H_1$. Получили отношения: одновременно имеем $\vdash H_2 \Leftrightarrow \vdash H_1$ и $\vdash H_1 \Leftrightarrow \vdash \neg H_2$. Полученный результат не будет противоречием, если формула H_2 неразрешима. А если это не так, то среди формул $H_3, H_4, \dots, H_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 6б. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

J_1 : «Предложение J_2 недоказуемо»,

J_2 : «Предложение J_3 недоказуемо»,

...

J_{n-1} : «Предложение J_n недоказуемо»,

J_n : «Предложение J_1 неопровержимо».

Если n чётно, то среди предложений $J_2, J_3, \dots, J_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Случай $n = 2$ доказан в теореме 5б. При этом неразрешимым предложением будет J_2 .

При $n > 2$ по лемме 4(В) получаем логическую эквивалентность утверждений:

$$\begin{aligned}
&\vdash \neg J_1 \Leftrightarrow \vdash J_2, \\
&\vdash \neg J_2 \Leftrightarrow \vdash J_3, \\
&\dots \\
&\vdash \neg J_{n-1} \Leftrightarrow \vdash J_n,
\end{aligned}$$

к которым добавляется (по лемме 5(В)) ещё одна эквивалентность

$$\vdash \neg J_n \Leftrightarrow \vdash \neg J_1.$$

Далее, разбиваем эти эквивалентности, за исключением первой и последней, на подряд идущие пары. Предполагаем, что все формулы $J_3, J_4, \dots, J_n$ разрешимы, тогда по лемме 6 получаем цепь $\vdash J_2 \Leftrightarrow \vdash J_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash J_n$. Отсюда следует $\vdash J_2 \Leftrightarrow \vdash J_n$. Применим лемму 7 к данной и последней эквивалентности $\vdash \neg J_n \Leftrightarrow \vdash \neg J_1$. Если J_2 неразрешима, то доказывать нечего. Поэтому остается вариант, когда J_2 разрешима, тогда по лемме 7 получаем $\vdash \neg J_2 \Leftrightarrow \vdash \neg J_1$. Учитывая первую эквивалентность $\vdash \neg J_1 \Leftrightarrow \vdash J_2$, получаем $\vdash \neg J_2 \Leftrightarrow \vdash J_2$, что противоречит разрешимости J_2 . Следовательно, J_2 неразрешима. А если это не так, то среди формул $J_3, J_4, \dots, J_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 7а. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

K_1 : «Предложение K_2 опровержимо»;

K_2 : «Предложение K_3 опровержимо»;

K_3 : «Предложение K_4 опровержимо»;

...

K_{n-1} : «Предложение K_n опровержимо»;

K_n : «Предложение K_1 доказуемо».

Если n четно, то среди предложений $K_1, K_2, \dots, K_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Случай $n = 2$ доказан в теореме 3а. При $n > 2$ по лемме 5 получаем логическую эквивалентность утверждений:

$\vdash K_1 \Leftrightarrow \vdash \neg K_2$,

$\vdash K_2 \Leftrightarrow \vdash \neg K_3$,

...

$\vdash K_{n-1} \Leftrightarrow \vdash \neg K_n$,

$\vdash K_n \Leftrightarrow \vdash K_1$.

И так же, как и ранее, разбиваем эти эквивалентности, за исключением первой и последней, на подряд идущие пары. Предполагаем, что все формулы $K_3, K_4, \dots, K_n$ разрешимы, тогда получаем цепь

$\vdash K_2 \Leftrightarrow \vdash K_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash K_n$.

Отсюда следует $\vdash K_2 \Leftrightarrow \vdash K_n \Leftrightarrow \vdash K_1$. Получили отношения: одновременно имеем $\vdash K_2 \Leftrightarrow \vdash K_1$ и $\vdash K_1 \Leftrightarrow \vdash \neg K_2$. Полученный результат не будет противоречием, если формула K_2 неразрешима. А если это не так, то среди формул $K_3, K_4, \dots, K_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 7б. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

M_1 : «Предложение M_2 опровержимо»;

M_2 : «Предложение M_3 опровержимо»;

...

M_{n-1} : «Предложение M_n опровержимо»;

M_n : «Предложение M_1 неопровержимо».

Если n четно, то среди предложений $M_1, M_2, \dots, M_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Случай $n = 2$ доказан в теореме 3б. При этом неразрешимым предложением будет M_1 .

При $n > 2$ по лемме 5 получаем логическую эквивалентность утверждений:

$\vdash M_1 \Leftrightarrow \vdash \neg M_2$,

$\vdash M_2 \Leftrightarrow \vdash \neg M_3$,

...

$\vdash M_{n-1} \Leftrightarrow \vdash \neg M_n$,

$$\vdash \neg M_n \Leftrightarrow \vdash \neg M_1.$$

Разбиваем эти эквивалентности, за исключением первой и последней, на подряд идущие пары. Предполагая, что все формулы $M_3, M_4, \dots, M_n$ разрешимы, получаем цепь $\vdash M_2 \Leftrightarrow \vdash M_4 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash M_n$. Отсюда следует $\vdash M_2 \Leftrightarrow \vdash M_n$. Применим лемму 7 к данной и последней эквивалентности $\vdash \neg M_n \Leftrightarrow \vdash \neg M_1$. Предполагая, что формулы M_2 и M_n разрешимы, получаем $\vdash \neg M_2 \Leftrightarrow \vdash \neg M_1$.

Полученный результат вместе с первой эквивалентностью $\vdash M_1 \Leftrightarrow \vdash \neg M_2$ не будет противоречием, если формула M_1 неразрешима. А если это не так, то среди формул $M_2, M_3, \dots, M_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 8а. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

N_1 : «Предложение N_2 недоказуемо»;

N_2 : «Предложение N_3 недоказуемо»;

...

N_{n-1} : «Предложение N_n недоказуемо»;

N_n : «Предложение N_1 опровержимо».

Если n нечетно, то среди предложений $N_1, N_2, \dots, N_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{N_1, N_2, \dots, N_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash N_1 \sim \neg P(\ulcorner N_2 \urcorner),$$

$$\vdash N_2 \sim \neg P(\ulcorner N_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash N_{n-1} \sim \neg P(\ulcorner N_n \urcorner),$$

$$\vdash N_n \sim R(\ulcorner N_1 \urcorner).$$

Случай $n = 1$ доказан в теореме 2b, в этом случае неразрешимой является формула N_1 . Поэтому будем предполагать, что $n \geq 3$. По леммам 4(B) и 5(A) имеем логическую эквивалентность утверждений:

$$\vdash \neg N_1 \Leftrightarrow \vdash N_2,$$

$$\vdash \neg N_2 \Leftrightarrow \vdash N_3,$$

...

$$\vdash N_{n-1} \Leftrightarrow \vdash N_n,$$

$$\vdash N_n \Leftrightarrow \vdash \neg N_1.$$

Множество первых $n-1$ эквивалентностей разобьем на подряд идущие пары вида

$$\vdash \neg N_i \Leftrightarrow \vdash N_{i+1},$$

$$\vdash \neg N_{i+1} \Leftrightarrow \vdash N_{i+2}.$$

Пусть в каждой такой паре формулы N_{i+1} и N_{i+2} разрешимы, тогда по лемме 7 имеем $\vdash N_i \Leftrightarrow \vdash N_{i+2}$. Когда i пробегает нечетные значения $1, 3, \dots, n-2$, получаем цепь $\vdash N_1 \Leftrightarrow \vdash N_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash N_n$. Учитывая последнюю эквивалентность, получаем $\vdash N_1 \Leftrightarrow \vdash N_n \Leftrightarrow \vdash \neg N_1$. Полученный результат не будет противоречием, если формула N_1 неразрешима. А если это не так, то среди формул $N_2, N_3, \dots, N_n$ имеется неразрешимая формула. ■

Теорема 8б. Рассмотрим предложения с косвенной самоссылочностью:

O_1 : «Предложение O_2 опровержимо»;

O_2 : «Предложение O_3 опровержимо»;

...

O_{n-1} : «Предложение O_n опровержимо»;

O_n : «Предложение O_1 недоказуемо».

Если n нечетно, то среди предложений $O_1, O_2, \dots, O_n$ имеется неразрешимое предложение.

Доказательство. Условие теоремы означает, что множество формул $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$ обладает следующими свойствами:

$$\vdash O_1 \sim R(\ulcorner O_2 \urcorner),$$

$$\vdash O_2 \sim R(\ulcorner O_3 \urcorner),$$

...

$$\vdash O_{n-1} \sim R(\ulcorner O_n \urcorner),$$

$$\vdash O_n \sim \neg P(\ulcorner O_1 \urcorner).$$

Случай $n = 1$ доказан в теореме 2а, в этом случае неразрешимой является формула O_1 . Поэтому будем предполагать, что $n \geq 3$. По леммам 5(А) и 4(В) имеем логическую эквивалентность утверждений:

$$\vdash O_1 \Leftrightarrow \vdash \neg O_2,$$

$$\vdash O_2 \Leftrightarrow \vdash \neg O_3,$$

...

$$\vdash O_{n-1} \Leftrightarrow \vdash \neg O_n,$$

$$\vdash \neg O_n \Leftrightarrow \vdash O_1.$$

Множество первых $n-1$ эквивалентностей разобьем на подряд идущие пары вида

$$\vdash O_i \Leftrightarrow \vdash \neg O_{i+1},$$

$$\vdash O_{i+1} \Leftrightarrow \vdash \neg O_{i+2}.$$

Пусть в каждой такой паре формулы O_{i+1} и O_{i+2} разрешимы, тогда по лемме 6 имеем $\vdash O_i \Leftrightarrow \vdash O_{i+2}$. Когда i пробегает нечетные значения $1, 3, \dots, n-2$, получаем цепь $\vdash O_1 \Leftrightarrow \vdash O_3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \vdash O_n$. Учитывая последнюю эквивалентность, получаем $\vdash O_n \Leftrightarrow \vdash O_1 \Leftrightarrow \vdash \neg O_n$. Полученный результат не будет противоречием, если формула O_n неразрешима. А если это не так, то среди формул $O_2, O_3, \dots, O_{n-1}$ имеется неразрешимая формула. ■

Рассмотрим теперь связь неразрешимых предложений с парадоксами. Доказанные теоремы при нумерации разбиты на пары. Теоремы с одинаковыми номерами, но отличающиеся буквами a или b , аналогичны по доказательству. Но у них есть и аналогия в формулировках теорем. Переформулируем все теоремы от 2а до 8b следующим образом. Заменяем в условиях теорем слова *доказуемо* и *неопровержимо* словом *истинно*, а слова *опровержимо* и *недоказуемо* словом *ложно*. Заключение теорем теперь при прежних ограничениях на количество предложений n будет утверждение, что соответствующие предложения образуют парадокс. То, что при такой замене действительно получаются парадоксы, легко проверить (конечно, теперь мы не проводим рассуждение в рамках какой-либо формальной системы).

Так, теоремы 2а и 2b дают парадокс лжеца:

А: «Предложение А ложно».

Теоремы 3а и 3b при $n = 2$ приводят к парадоксу о Сократе и Платоне:

Сократ: «То, что сказал Платон, есть ложь»,

Платон: «Сократ говорит только правду».

Теоремы 4а и 4b при $n = 3$ приводят к парадоксу Альберта Саксонского:

Q_1 : «Предложение Q_2 ложно»;

Q_2 : «Предложение Q_3 ложно»;

Q_3 : «Предложение Q_1 ложно».

Таким образом, теоремы из каждой пары при указанной выше нумерации дают один и тот же парадокс. Но всего получаем 4 различных парадокса. При $n = 1$ имеем парадокс лжеца. А при $n > 1$ оставшиеся 6 пар теорем приводят только к трем различным парадоксам (пары 3 и 5 дают одинаковый парадокс, пары 4 и 8 дают одинаковый парадокс и, наконец, пары 6 и 7 дают одинаковый парадокс).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976. 320 с.
2. Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994. 396 с.
3. Справочная книга по математической логике: в 4-х частях / под ред. Дж. Барвайса. Ч. IV. Теория доказательств и конструктивная математика. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. Клини С.К. Введение в метаматематику. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 528 с.
5. Smullyan R.M. Gödel's Incompleteness Theorem. Oxford: Oxford University Press, 1992.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЗЮЗЬКОВ Валентин Михайлович – старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и компьютерного моделирования механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vmz@math.tsu.ru

Статья принята в печать 18.10.2009 г.