

УДК 515.12

В.Р. Лазарев

О НЕКОТОРЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ КОЛЬЦА МНОГОЧЛЕНОВ В $C_p C_p(X)$

В настоящей статье устанавливаются основные топологические свойства наименьшего подкольца в $C_p C_p(X)$, содержащего пространство X , а также некоторые связи этих свойств со свойствами самого пространства X .

Ключевые слова: *пространство непрерывных функций, топология поточечной сходимости, топологическое кольцо многочленов.*

Под пространствами в данной статье понимаются тихоновские (то есть вполне регулярные T_1) топологические пространства. Для пространства X через $C_p(X)$ обозначается пространство непрерывных вещественнозначных функций, определённых на X , снабжённое топологией поточечной сходимости. Через $C_p C_p(X)$ обозначается пространство $C_p(C_p(X))$. Пространства вида $C_p(X)$ являются топологическими кольцами относительно обычных алгебраических операций над функциями. В кольце $C_p C_p(X)$ бывает удобно выделять подкольцо $C_p^0 C_p(X)$, состоящее из функций, обращающихся в ноль на нулевом элементе 0^X пространства $C_p(X)$. Элементы $C_p^0 C_p(X)$ мы называем функционалами (на $C_p(X)$).

Как известно [1, глава 0], пространство X канонически вкладывается в $C_p C_p(X)$ (а следовательно, и в $C_p^0 C_p(X)$) как замкнутое подпространство. При этом точки X образуют алгебраически независимую систему в $C_p C_p(X)$ (тем более, в $C_p^0 C_p(X)$). Через $R_p(X)$ обозначим алгебраическую оболочку X в кольце $C_p^0 C_p(X)$, то есть его наименьшее подкольцо, содержащее X . Кольцо $R_p(X)$ можно явно описать следующим образом.

Определение. Пусть $\xi \in X^n$ – упорядоченный набор $(x_1, \dots, x_n)$ точек пространства X , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, отличный от нуля, где $\alpha_k \in \cup \{0\}$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\xi^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ функционал, заданный правилом $\xi^\alpha(\varphi) = \varphi(x_1)^{\alpha_1} \dots \varphi(x_n)^{\alpha_n}$, где $\varphi \in C_p(X)$. Многочленами будем называть всевозможные линейные комбинации функционалов вида ξ^α (называемых мономами). Множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ назовём носителем монома ξ^α , а объединение носителей всех мономов, входящих в данный многочлен, – носителем этого многочлена. Многочлены образуют подкольцо в $C_p^0 C_p(X)$, обозначаемое $R_p(X)$.

Замечание 1. Ясно, что если функция $\varphi \in C_p(X)$ равна нулю во всех точках носителя многочлена $p \in R_p(X)$, то $p(\varphi) = 0$.

Предложение 1. Число Суслина $R_p(X)$ счётно.

Доказательство. В силу предложения 0.3.7. из [1], число Суслина пространства $C_p C_p(X)$ счётно. Пространство $C_p^0 C_p(X)$ является непрерывным (и открытым)

образом пространства $C_p C_p(X)$ при естественном отображении $f \rightarrow f - f(0^X)$, $f \in C_p C_p(X)$. Поэтому число Суслина пространства $C_p^0 C_p(X)$ также счётно. Так как число Суслина не возрастает при переходе ко всюду плотному подпространству, то достаточно теперь показать, что $R_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$.

Пусть $f \in C_p^0 C_p(X)$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_p(X)$, $f(\varphi_k) = r_k$. Пусть

$$W = \{g \in C_p^0 C_p(X) : |r_k - g(\varphi_k)| < \delta, k = 1, \dots, n\}$$

– стандартная окрестность точки f . Не теряя общности, можно считать, что $\varphi_n = 0^X$, и, следовательно, $r_n = 0$. Существует линейный непрерывный функционал u на $C_p(X)$, различающий точки множества $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, то есть $u(\varphi_k) = t_k \neq t_j = u(\varphi_j)$ при $k \neq j$. Заметим, что $u(\varphi_n) = 0$. Найдется далее числовой многочлен $p(t)$, такой, что $p(t_k) = r_k$. Положив теперь $g = p \circ u$, получим, что $g(\varphi_k) = r_k$, и потому $g \in W$. С другой стороны, напрямую легко проверяется, что g – многочлен, то есть $g \in R_p(X)$. Итак, $R_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$. ■

Лемма. Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывная сюръекция, τ – (пре)калибр пространства X . Тогда τ – (пре)калибр пространства Y .

Доказательство. Пусть $\{U_a : a \in A\}$ – система непустых открытых подмножеств в Y , $\{V_a : a \in A\}$ – система их полных прообразов при отображении f , причём мощность индексного множества A равна τ . Пользуясь тем, что τ – прекалибр X , выберем центрированную подсистему $\{V_a : a \in B \subset A\}$ той же мощности (если τ – калибр X , то соответственно подсистему $\{V_a : a \in B \subset A\}$ той же мощности, с непустым пересечением). Легко убедиться, что система $\{U_a : a \in B\}$ также центрированная (соответственно, имеет непустое пересечение), что означает, что лемма доказана. ■

Следствие 1. Если τ – (пре)калибр $C_p C_p(X)$, то τ – (пре)калибр $C_p^0 C_p(X)$.

Предложение 2. Каждый несчётный регулярный кардинал является прекалибром пространства $R_p(X)$.

Доказательство. Пусть τ – несчётный регулярный кардинал. Тогда, как известно [1, следствие 0.3.14], τ является прекалибром пространства $C_p C_p(X)$. По предыдущему следствию, τ – прекалибр $C_p^0 C_p(X)$. Но $R_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$ (см. доказательство предложения 1). Согласно предложению 0.3.9 из [1], некоторый кардинал является прекалибром для всюду плотного подпространства тогда и только тогда, когда он является таковым для всего пространства. Заключаем отсюда, что τ – прекалибр $R_p(X)$. ■

Предложение 3. Замыкание каждого открытого множества в $R_p(X)$ является нуль-множеством некоторой непрерывной вещественной функции на $R_p(X)$.

Доказательство. По предложению 0.3.15. в [1], каково бы ни было множество Z , замыкание каждого открытого множества в $\mathbb{R}^Z$ является нуль-множеством некоторой непрерывной вещественной функции на $\mathbb{R}^Z$, причём это свойство наследуется всюду плотными подпространствами. Обозначим через Z множество $C_p(X) \setminus \{0^X\}$. Рассмотрим отображение сужения $\pi_Z : C_p^0 C_p(X) \rightarrow \mathbb{R}^Z$. Проверим, что отображение π_Z гомеоморфно вкладывает $C_p^0 C_p(X)$ в $\mathbb{R}^Z$ как всюду плотное

подмножество. Поскольку $C_p(X) \setminus \{0^X\}$ всюду плотно в $C_p(X)$, то π_Z непрерывно и инъективно. Непрерывность обратного к π_Z отображения вытекает из того, что все функционалы обращаются в ноль в точке 0^X .

Рассмотрим теперь стандартное открытое множество $V = V(\varphi_1, \dots, \varphi_m; I_1, \dots, I_m)$ в пространстве $\mathbb{R}^Z$. Мы имеем $\varphi_j \neq 0^X$ при всех $j = 1, \dots, m$. Поэтому существует $g \in C_p C_p(X)$ такое, что $g(0^X) = 0$, $g(\varphi_j) \in I_j$ при всех $j = 1, \dots, m$. Но тогда $g \in C_p^0 C_p(X)$ и $\pi_Z(g) \in V$. Таким образом, $\pi_Z(C_p^0 C_p(X))$ всюду плотно в $\mathbb{R}^Z$.

Учитывая ещё, что $R_p(X)$ всюду плотно в $C_p^0 C_p(X)$, получаем требуемое утверждение. ■

Предложение 4. Каждая непрерывная вещественная функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ однозначно продолжается до непрерывной линейной мультипликативной функции $Ef: R_p(X) \rightarrow \mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $f \in C_p(X)$. Рассмотрим каноническое отображение вычисления $\psi: C_p(X) \rightarrow C_p C_p C_p(X)$, $\psi(f)(\varphi) = \varphi(f)$, где $\varphi \in C_p C_p(X)$. Отображение ψ непрерывно (0.5.2. в [1]) Известно (и легко проверить), что $\psi(f)$ – непрерывное линейное мультипликативное отображение, определённое на $C_p C_p(X)$. Пусть $\pi: C_p C_p C_p(X) \rightarrow C_p(R_p(X))$ – отображение сужения. Тогда $\pi(\psi(f)) = Ef$ – искомое продолжение. Его единственность следует из линейности и мультипликативности Ef и того, что каждый элемент из $R_p(X)$ записывается в виде линейной комбинации мономов вида $\xi^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. ■

Замечание 2. Фактически, в предыдущем предложении определён оператор продолжения $E: C_p(X) \rightarrow C_p(R_p(X))$, $E = \pi \circ \psi$, который непрерывен, как композиция непрерывных отображений (однако E – не линеен и не мультипликативен).

По теореме Ю. Нагаты [1, теорема 0.6.1], из изоморфизма топологических колец $C_p C_p(X)$ и $C_p C_p(Y)$ следует гомеоморфизм пространств $C_p(X)$, $C_p(Y)$. Оказывается, то же утверждение справедливо и по отношению к кольцам $R_p(X)$, $R_p(Y)$.

Предложение 5. Если топологические кольца $R_p(X)$, $R_p(Y)$ топологически изоморфны, то пространства $C_p(X)$, $C_p(Y)$ гомеоморфны.

Доказательство. Пусть $\Phi: R_p(X) \rightarrow R_p(Y)$ – изоморфизм топологических колец $R_p(X)$, $R_p(Y)$, $E_1: C_p(X) \rightarrow C_p(R_p(X))$, $E_2: C_p(Y) \rightarrow C_p(R_p(Y))$ – операторы продолжения, $\pi_1: C_p(R_p(X)) \rightarrow C_p(X)$, $\pi_2: C_p(R_p(Y)) \rightarrow C_p(Y)$ – операторы сужения. Положим $h: C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$, $h(\varphi) = \pi_1(E_2(\varphi) \circ \Phi)$. Так как отображения E_2 , $a \rightarrow a \circ \Phi$, π_1 непрерывны, то и h непрерывно. Обратное к h отображение h^{-1} определяется равенством $h^{-1}(\psi) = \pi_2(E_1(\psi) \circ \Phi^{-1})$. Действительно,

$$\begin{aligned} h(h^{-1}(\psi)) &= \pi_1(E_2(\pi_2(E_1(\psi) \circ \Phi^{-1})) \circ \Phi) = \pi_1((E_1(\psi) \circ \Phi^{-1}) \circ \Phi) = \\ &= \pi_1(E_1(\psi) \circ \Phi^{-1} \circ \Phi) = \pi_1(E_1(\psi)) = \psi. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $h^{-1}(h(\varphi)) = \varphi$. Непрерывность h^{-1} имеет место по той же причине, что и для h . Итак, пространства $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ гомеоморфны. ■

Вопрос. Можно ли обратить последнее предложение? Другими словами, следует ли из топологического изоморфизма колец $R_p(X)$, $R_p(Y)$ топологический изоморфизм колец $C_p C_p(X)$, $C_p C_p(Y)$?

Ниже мы останавливаемся на том, какие свойства пространств X , Y , имеющих гомеоморфные кольца $R_p(X)$, $R_p(Y)$, обязаны быть для них общими.

Предложение 6. Пусть P – класс топологических пространств, содержащий вещественную прямую $\mathbb{R}$ и замкнутый относительно следующих операций:

- 1) переход к образу элемента класса P при непрерывном отображении;
- 2) объединение счётного семейства элементов класса P ;
- 3) декартово произведение конечного семейства элементов класса P .

Тогда, если X принадлежит P , то и $R_p(X)$ принадлежит P .

Доказательство. Следующая конструкция почерпнута из [2]. Зафиксируем натуральное число n . Положим

$$J(n) = \{j = (i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1, \dots, n\}^n : i_1^2 + \dots + i_n^2 > 0\}, \quad Y_n = \left(\prod_{j \in J(n)} \mathbb{R}_j \right) \times X^n,$$

где каждое $\mathbb{R}_j$ есть экземпляр вещественной прямой $\mathbb{R}$. Понятно, что $Y_n \in P$. Далее, рассмотрим отображение $T_n : Y_n \rightarrow C_p^0 C_p(X)$,

$$T_n \left((a_j)_{j \in J(n)}, x_1, \dots, x_n \right) = \sum_{j \in J(n)} a_j \cdot x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

и обозначим $R_n = T_n(Y_n)$. Отображение T_n непрерывно, поскольку сложение и умножение в топологическом кольце $C_p^0 C_p(X)$ непрерывны. Стало быть, $R_n \in P$.

Наконец, легко убедиться, что $R_p(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$, и поэтому $R_p(X) \in P$. ■

Следствие 2. Пусть пространство X обладает одним из следующих свойств:

- 1) X σ -компактно;
- 2) X линделёфово Σ -пространство;
- 3) X^n линделёфово для каждого натурального n ;
- 4) X сепарабельно.

Тогда и пространство $R_p(X)$ обладает тем же свойством.

Доказательство. Достаточно заметить, что перечисленные в формулировке классы топологических пространств содержат вещественную прямую $\mathbb{R}$ и удовлетворяют свойствам 1), 2), 3) предложения 6. ■

Замечание 3. Очевидно, свойство 4) в предыдущем следствии можно заменить на такое: плотность пространства X не превышает τ , где τ – некоторый бесконечный кардинал.

Поскольку X является замкнутым подпространством в $C_p C_p(X)$ [1, предложение 0.5.9], а следовательно и в $R_p(X)$, следующее утверждение непосредственно вытекает из предложения 6 и следствия 2.

Предложение 7. Пусть P – класс топологических пространств как в предложении 6, обладающий ещё тем свойством, что замкнутое подпространство элемента класса P само принадлежит P . Пусть, далее, $X \in P$ и $R_p(X)$ гомеоморфно $R_p(Y)$. Тогда $Y \in P$.

Следствие 3. Пусть пространство X обладает одним из свойств 1), 2), 3), перечисленных в следствии 2, и пусть $R_p(X)$ гомеоморфно $R_p(Y)$. Тогда Y обладает тем же свойством.

Замечание 4. Равенство плотностей $d(X)$ и $d(Y)$ пространств X и Y , имеющих гомеоморфные $R_p(X)$, $R_p(Y)$ нельзя вывести из предложения 7, поскольку при переходе к замкнутому подпространству плотность может увеличиваться. Тем не менее, справедливо

Предложение 8. Если $d(R_p(X)) \leq \tau$, то и $d(X) \leq \tau$.

Доказательство. Возьмём всюду плотное в $R_p(X)$ подмножество B , мощность которого не превосходит τ . Образует подмножество A в X как объединение носителей всех элементов $b \in B$. Так как все эти носители конечны, то мощность A также не превосходит τ . Если замыкание $\bar{A}$ множества A не совпадает с X , то, выбрав точку x в непустом открытом множестве $X \setminus \bar{A}$, можем найти функцию $\varphi \in C_p(X)$, тождественно равную 0 на $\bar{A}$ и 1 в точке x . Тогда единственное линейное мультипликативное непрерывное продолжение $\hat{\varphi}$ функции φ (предложение 4) на всё $R_p(X)$ обязано равняться 1 в точке x и 0 на всюду плотном в $R_p(X)$ множестве B . Противоречие. ■

Следствие 4. Если $R_p(X)$ гомеоморфно $R_p(Y)$, то $d(X) = d(Y)$.

Предложение 9. $nw(X) = nw(R_p(X))$, $iw(X) = iw(R_p(X))$.

Доказательство. Как следует из предложений I.1.3., I.1.4., I.1.5. в [1], $nw(X) = nw(C_p C_p(X))$, $iw(X) = iw(C_p C_p(X))$. Учитывая, что сетевой вес и i -вес не возрастают при переходе к произвольному подпространству, и принимая во внимание включения $X \subset R_p(X) \subset C_p C_p(X)$, получаем требуемый вывод. ■

Следствие 5. Если $R_p(X)$ гомеоморфно $R_p(Y)$, то $nw(X) = nw(Y)$, $iw(X) = iw(Y)$.

Замечание 5. Следствие 5 можно обобщить. А именно, если некоторые топологические пространства T_X , T_Y гомеоморфны и при этом $X \subset T_X \subset C_p C_p(X)$, $Y \subset T_Y \subset C_p C_p(Y)$, то $nw(X) = nw(Y)$, $iw(X) = iw(Y)$.

Аналогичные соображения можно высказать относительно каждого топологического свойства, общего для данного пространства X и его «двукратного» пространства функций $C_p C_p(X)$ и наследуемого произвольными подпространствами. В качестве примера можно сформулировать

Предложение 10. Пространство X τ -монолитно тогда и только тогда, когда τ -монолитно кольцо $R_p(X)$.

Доказательство. Теоремы II.6.8., II.6.9. из [1] устанавливают, что наличие каждого из свойств τ -монолитности и τ -устойчивости у пространства X равносильно наличию другого из них у $C_p(X)$. Отсюда следует, что пространство X τ -монолитно одновременно с пространством $C_p C_p(X)$. Далее, по предложению II.6.5.(а) из [1], свойство τ -монолитности наследуется произвольными подпространствами. Так как $X \subset R_p(X) \subset C_p C_p(X)$, то X τ -монолитно одновременно с кольцом $R_p(X)$. ■

Следствие 6. Если $R_p(X)$ гомеоморфно $R_p(Y)$ и X τ -монолитно, то и Y τ -монолитно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский А.В. Топологические пространства функций. М. Изд-во МГУ, 1989.
2. Ткачук В.В. Наименьшее подкольцо кольца $C_p(C_p(X))$, содержащее $X \cup \{1\}$, всюду плотно в $C_p(C_p(X))$ // Вестн. МГУ. Сер. Математика, механика. 1987. № 1. С. 20 – 22.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ЛАЗАРЕВ Вадим Ремирович – старший преподаватель кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: lazarev@math.tsu.ru

Статья принята в печать 16.02.2010 г.