

УДК 669.86:536.21

С.Г. Мартюшев, М.А. Шеремет

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СОПРЯЖЕННОГО КОНВЕКТИВНО-РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ¹

Проведено математическое моделирование сложного теплопереноса в замкнутой прямоугольной области с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии локального источника тепловыделения. В качестве механизмов переноса тепла в газовой полости рассматривались естественная конвекция и излучение, а в элементах ограждающей твердой оболочки – теплопроводность. Получены поля скорости и температуры, характеризующие основные закономерности исследуемого процесса в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

Ключевые слова: сопряженный теплоперенос, естественная конвекция, излучение, математическое моделирование.

Математическое моделирование сопряженного конвективно-радиационного теплопереноса в газовой полости и теплопроводности в элементах твердого материала имеет достаточно широкие области приложения [1, 2]. С точки зрения теоретического значения большой интерес вызывает наиболее полный анализ возможных режимов взаимодействия термогравитационной конвекции и излучения в газовой полости. Исследование процессов теплопереноса в областях при наличии теплопроводных стенок приобретает существенные связи с практикой (анализ теплового состояния радиоэлектронной аппаратуры; исследование технологических режимов в машиностроении; поиск оптимальных параметров по созданию комфортных условий в жилых помещениях) [1 – 3].

Целью настоящей работы является математическое моделирование нестационарной сопряженной естественной конвекции в замкнутой области при наличии локального источника тепловыделения в условиях радиационного теплопереноса в газовой полости и неоднородного теплообмена с внешней средой.

Постановка задачи

Рассматривается краевая задача нестационарного конвективно-радиационного теплопереноса в прямоугольной области, представленной на рис 1. Область решения представляет собой газовую полость, ограниченную теплопроводными стенками конечной толщины. На внутренней стороне левой стенки находится источник тепловыделения, имеющий постоянную температуру в течение всего процесса. Считается, что в начальный момент времени стенки полости и заполняющая ее несжимаемая жидкость имеют постоянную и одинаковую во всех точках температуру, причем жидкость неподвижна. Горизонтальные стенки $y = 0$, $y = 2h_1 + H$ и вертикальная стенка $x = 2l_1 + L$ предполагаются теплоизолированными с наружной

¹ Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы (ГК № П357).

стороны. На границе $x = 0$ осуществляется конвективно-радиационный теплообмен с окружающей средой. Газ, занимающий внутреннюю полость, считается вязкой, ньютоновской, несжимаемой, излучающей жидкостью, удовлетворяющей приближению Буссинеска.

В такой постановке процесс переноса тепла в анализируемой области решения (рис. 1) описывается системой нестационарных двумерных уравнений конвекции в

приближении Буссинеска в газовой полости [4], где слагаемое в уравнении энергии, характеризующее излучение, описывается на основе приближения Росселанда [5]. Для анализа поля температуры в твердых стенках используется нестационарное двумерное уравнение теплопроводности [2] с нелинейными граничными условиями. Основным в приближении Буссинеска является предположение о том, что рассматривается «слабая» конвекция: вызванные неоднородностью температуры отклонения плотности от среднего значения предполагаются настолько малыми, что ими можно пренебречь во всех уравнениях, кроме уравнения движения, где это отклонение учитывается в члене с подъемной силой. В приближении Росселанда [5]

излучающую среду можно рассматривать, как некоторый континуум фотонов, т.е. можно считать, что на каждый элемент среды, как и в случае молекулярной проводимости, непосредственно влияют только его соседние элементы. В таких условиях перенос энергии излучения в среде можно уподобить диффузионному переносу.

Если пренебрегать вязкой диссипацией энергии, то уравнения неразрывности, движения и энергии в газовой полости для рассматриваемой задачи будут иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right); \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \beta g_y (T_r - T_0); \quad (3)$$

$$\rho_r C_{pr} \left(\frac{\partial T_r}{\partial t} + u \frac{\partial T_r}{\partial x} + v \frac{\partial T_r}{\partial y} \right) = \lambda_r \left(\frac{\partial^2 T_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_r}{\partial y^2} \right) - \operatorname{div} q_r, \quad (4)$$

$$\text{где } \operatorname{div} q_r = \frac{\partial q_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{ry}}{\partial y}.$$

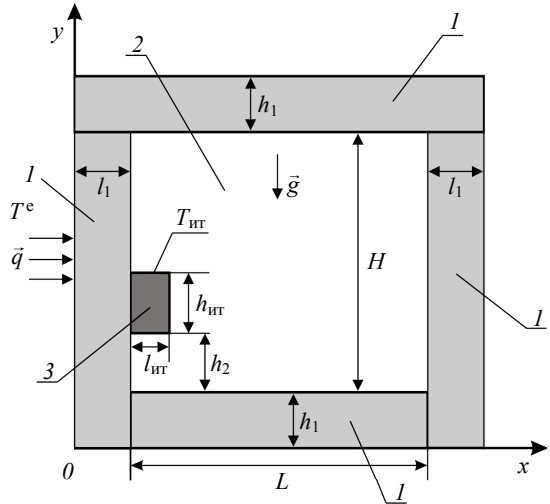


Рис. 1. Область решения: 1 – твердые стенки, 2 – газовая полость, 3 – источник тепла $\vec{g}$

На основе приближения Росселанда [5] тепловые потоки можно переписать следующим образом:

$$q_{rx} = -\frac{4\varepsilon\sigma}{3\beta_r} \frac{\partial T_r^4}{\partial x}, \quad q_{ry} = -\frac{4\varepsilon\sigma}{3\beta_r} \frac{\partial T_r^4}{\partial y}.$$

Подставляя эти соотношения в уравнение энергии (4), получим выражение

$$\begin{aligned} \rho_r C_{pr} \left(\frac{\partial T_r}{\partial t} + u \frac{\partial T_r}{\partial x} + v \frac{\partial T_r}{\partial y} \right) = \lambda_r \left(\frac{\partial^2 T_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_r}{\partial y^2} \right) + \\ + \frac{4\varepsilon\sigma}{3\beta_r} \left(12T_r^2 \left[\left(\frac{\partial T_r}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_r}{\partial y} \right)^2 \right] + 4T_r^3 \left[\frac{\partial^2 T_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_r}{\partial y^2} \right] \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Область изменения независимых переменных для системы уравнений (1) – (3), (5) в газовой полости (рис. 1):

$$h_1 < y < h_1 + h_2, \quad l_1 < x < l_1 + L; \quad h_1 + h_2 \leq y \leq h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}, \quad l_1 + l_{\text{ит}} < x < l_1 + L;$$

$$h_1 + h_2 + h_{\text{ит}} < y < h_1 + H, \quad l_1 < x < l_1 + L; \quad 0 < t < t_{\text{кон}}.$$

Для элементов твердой стенки уравнение теплопроводности:

$$\rho_{\text{ст}} C_{p\text{ст}} \frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial t} = \lambda_{\text{ст}} \left(\frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial y^2} \right). \quad (6)$$

Область изменения независимых переменных для уравнения теплопроводности в элементах твердой стенки (рис. 1):

$$0 < y \leq h_1, \quad 0 < x < 2l_1 + L; \quad h_1 \leq y \leq h_1 + H, \quad 0 < x \leq l_1, \quad l_1 + L \leq x < 2l_1 + L;$$

$$h_1 + H \leq y < 2h_1 + H, \quad 0 < x < 2l_1 + L; \quad 0 < t < t_{\text{кон}}.$$

В этой системе уравнений (1) – (3), (5), (6) искомыми функциями являются компоненты вектора скорости u , v , давление p , температура T_r и $T_{\text{ст}}$, которые зависят от пространственных координат x , y и времени t . Параметрами будут плотность газа и стенки ρ_r и $\rho_{\text{ст}}$, коэффициент динамической вязкости μ , приведенная степень черноты ε , постоянная Стефана – Больцмана σ , средний интегральный коэффициент ослабления по Росселанду β_r , радиационный поток q_r , температурный коэффициент объемного расширения β , составляющая ускорения силы тяжести в проекции на ось y ($g_x = 0$), начальная температура области решения T_0 , удельная теплоемкость при постоянном давлении газа и материала стенки C_{pr} и $C_{p\text{ст}}$, коэффициент теплопроводности газа и материала стенки λ_r и $\lambda_{\text{ст}}$.

Поскольку целью настоящей работы является анализ теплового состояния системы в условиях взаимного влияния естественной конвекции в ячейке, заполненной газом, и кондуктивного теплообмена в элементах твердой стенки, то наиболее целесообразным представляется преобразование сформулированной системы дифференциальных уравнений (1) – (3), (5), (6) к виду, исключающему непосредственный поиск поля давления. Для этого введем в рассмотрение функцию тока ψ и вектор вихря скорости ω , которые задаются следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \omega = \text{rot}_z \vec{V} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (7)$$

Тогда с учетом (7) уравнения (1) – (3), (5), (6) примут вид

- в газовой полости

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = \mu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + \rho \beta g_y \frac{\partial T_\Gamma}{\partial x}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\omega; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \rho_\Gamma C_{\text{пр}} \left(\frac{\partial T_\Gamma}{\partial t} + u \frac{\partial T_\Gamma}{\partial x} + v \frac{\partial T_\Gamma}{\partial y} \right) &= \lambda_\Gamma \left(\frac{\partial^2 T_\Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_\Gamma}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{4\varepsilon\sigma}{3\beta_R} \left(12T_\Gamma^2 \left[\left(\frac{\partial T_\Gamma}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T_\Gamma}{\partial y} \right)^2 \right] + 4T_\Gamma^3 \left[\frac{\partial^2 T_\Gamma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_\Gamma}{\partial y^2} \right] \right); \end{aligned} \quad (10)$$

- в элементах твердой стенки

$$\rho_{\text{ст}} C_{\text{пст}} \frac{\partial T_{\text{ст}}}{\partial t} = \lambda_{\text{ст}} \left(\frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_{\text{ст}}}{\partial y^2} \right). \quad (11)$$

В новых переменных уравнение неразрывности удовлетворяется тождественно. Связь вектора завихренности с функцией тока (9) следует из определения вектора завихренности (7). Уравнение диффузии вихря (8) можно получить из уравнений (2) и (3), воспользовавшись методикой перекрестного дифференцирования.

Вследствие большого разнообразия геометрических параметров и теплофизических характеристик рассматриваемого объекта воспользуемся безразмерной формой записи исходных уравнений. При этом использование безразмерной системы преследует две цели: приведение значений вычисляемых величин к соответствующей шкале, а также расчет и обработка результатов в общей критериальной форме, содержащей минимальное число параметров. Эти цели могут достигаться соответствующим выбором масштабов.

В качестве масштабов расстояния, времени, скорости, температуры, функции тока и завихренности были выбраны L , $\sqrt{L/g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)}$, $\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)L}$, $(T_{\text{ит}}-T_0)$, $\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)L^3}$, $\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)/L}$. Безразмерные переменные примут следующий вид:

$$\begin{aligned} X &= x/L, \quad Y = y/L, \quad \tau = t\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)}/L, \quad \Theta = (T-T_0)/(T_{\text{ит}}-T_0), \\ U &= u/\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)L}, \quad V = v/\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)L}, \\ \Psi &= \Psi/\sqrt{g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)L^3}, \quad \Omega = \omega\sqrt{L/g_y\beta(T_{\text{ит}}-T_0)}, \end{aligned}$$

где X, Y – безразмерные координаты, соответствующие координатам x, y ; L – длина газовой полости рассматриваемой области решения по оси x ; τ – безразмерное время; U, V – безразмерные скорости, соответствующие скоростям u, v ; Θ – безразмерная температура; $T_{\text{ит}}$ – температура источника тепловыделения; Ψ – безразмерный аналог функции тока; Ω – безразмерный аналог вектора вихря.

Безразмерные уравнения Буссинеска в переменных «вихрь скорости – функция тока – температура» для рассматриваемой задачи:

- в газовой полости (2 на рис. 1):

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Omega}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \sqrt{\frac{\text{Pr}}{\text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial X}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial \tau} + \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial X} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial Y} = \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \left(\frac{\partial^2 \Theta_\Gamma}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_\Gamma}{\partial Y^2} \right) + \frac{16\text{Sk}}{3\tau_\lambda} \frac{1}{\sqrt{\text{Pr} \cdot \text{Ra}}} \times \\ \times \left\{ 3 \left(\Theta_\Gamma + \frac{T_0}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial Y} \right)^2 \right] + \left(\Theta_\Gamma + \frac{T_0}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^3 \left(\frac{\partial^2 \Theta_\Gamma}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_\Gamma}{\partial Y^2} \right) \right\}, \quad (14)$$

- в элементах твердой стенки (1 на рис. 1):

$$\frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial \text{Fo}_{\text{ст}}} = \frac{\partial^2 \Theta_{\text{ст}}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{\text{ст}}}{\partial Y^2}. \quad (15)$$

Здесь $\text{Ra} = g_y \beta (T_{\text{ит}} - T_0) L^3 / \nu a_\Gamma$ – число Рэлея; ν – кинематический коэффициент вязкости; $\text{Sk}_\Gamma = \varepsilon \sigma L (T_{\text{ит}} - T_0)^3 / \lambda_\Gamma$ – число Старка в газовой полости; $\text{Pr} = \nu / a_\Gamma$ – число Прандтля; τ_λ – монохроматическая оптическая толщина среды; a_Γ – коэффициент температуропроводности газа; $a_{\text{ст}}$ – коэффициент температуропроводности материала стенки; $\text{Fo}_{\text{ст}} = \sqrt{a_{\text{ст}}^2 / g_y \beta (T_{\text{ит}} - T_0) L^3}$ – число Фурье, соответствующее материалу твердой стенки.

Начальные условия для системы уравнений (12) – (15):

$$\begin{cases} \Psi(X, Y, 0) = \Omega(X, Y, 0) = 0; \\ \Theta(X, Y, 0) = 0; \\ \Theta(X, Y, 0) = 1 \text{ при } \frac{h_1 + h_2}{L} \leq Y \leq \frac{h_1 + h_2 + h_{\text{ит}}}{L}, \quad \frac{l_1}{L} \leq X \leq \frac{l_1 + l_{\text{ит}}}{L}. \end{cases} \quad (16)$$

Граничные условия:

- на внешних границах области решения:

$$\frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial X} = \text{Bi} \cdot \Theta_{\text{ст}} - \text{Bi} \cdot \Theta_\Gamma + \text{Sk}_{\text{ст}} \cdot \left[\left(\Theta_{\text{ст}} + \frac{T_0}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 - \left(\frac{T_\Gamma}{T_{\text{ит}} - T_0} \right)^4 \right] \\ \text{при } X = 0, \quad 0 \leq Y \leq (2h_1 + H)/L, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial X} = 0 \text{ при } X = 2l_1/L + 1, \quad 0 \leq Y \leq (2h_1 + H)/L, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial Y} = 0 \begin{cases} \text{при } Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 2l_1/L + 1, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0, \\ \text{при } Y = (2h_1 + H)/L, \quad 0 \leq X \leq 2l_1/L + 1, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0; \end{cases} \quad (19)$$

- на внутренних границах области решения:

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0; \quad \Theta_{\text{ст}} = \Theta_\Gamma, \quad \frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial X} = \bar{\lambda} \frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial X} \\ \text{при } \begin{cases} X = l_1/L, \quad h_1/L \leq Y \leq (h_1 + h_2)/L, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0, \\ X = l_1/L, \quad (h_1 + h_2 + h_{\text{ит}})/L \leq Y \leq (h_1 + H)/L, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0, \\ X = l_1/L + 1, \quad h_1/L \leq Y \leq (h_1 + H)/L, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0; \end{cases} \quad (20)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0; \quad \Theta_{\text{ст}} = \Theta_\Gamma, \quad \frac{\partial \Theta_{\text{ст}}}{\partial Y} = \bar{\lambda} \frac{\partial \Theta_\Gamma}{\partial Y} \\ \text{при } \begin{cases} Y = h_1/L, \quad l_1/L \leq X \leq l_1/L + 1, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0, \\ Y = (h_1 + H)/L, \quad l_1/L \leq X \leq l_1/L + 1, \quad 0 \leq \tau \leq t_{\text{коп}}/t_0; \end{cases} \quad (21)$$

$$\Theta = 1$$

$$\text{при } X = l_1/L, (h_1 + h_2)/L \leq Y \leq (h_1 + h_2 + h_{\text{ит}})/L, 0 \leq \tau \leq t_{\text{кон}}/t_0; \quad (22)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Theta = 1$$

$$\text{при } \begin{cases} Y = (h_1 + h_2)/L, l_1/L \leq X \leq (l_1 + l_{\text{ит}})/L, 0 \leq \tau \leq t_{\text{кон}}/t_0, \\ Y = (h_1 + h_2 + h_{\text{ит}})/L, l_1/L \leq X \leq (l_1 + l_{\text{ит}})/L, 0 \leq \tau \leq t_{\text{кон}}/t_0; \end{cases} \quad (23)$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0, \Theta = 1$$

$$\text{при } X = (l_1 + l_{\text{ит}})/L, (h_1 + h_2)/L \leq Y \leq (h_1 + h_2 + h_{\text{ит}})/L, 0 \leq \tau \leq t_{\text{кон}}/t_0. \quad (24)$$

Особенность постановки граничных условий для системы (12) – (15) состоит в том, что они заданы лишь для функции тока и формально не заданы для вихря непосредственно на границе области.

Краевая задача (12) – (24) решена методом конечных разностей [7] на равномерной сетке.

Для аппроксимации конвективных слагаемых в эволюционных уравнениях применялась схема с донорными ячейками [8], обладающая свойствами консервативности и транспортности и сохраняющая некоторые свойства схемы второго порядка точности. Значения вектора завихренности на поверхностях стенок определялись по формуле Вудса второго порядка точности [7, 9]. Уравнения параболического типа (12), (14), (15) решались с использованием локально одномерной схемы А.А. Самарского [10], т.е. совершался переход на промежуточный временной слой. Полученная таким образом система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей разрешалась методом прогонки. Для дискретизации уравнения Пуассона (13) применялся пятиточечный шаблон «крест» на основе формул симметричной аппроксимации вторых производных. При этом полученная СЛАУ разрешалась методом последовательной верхней релаксации [6]. Оптимальное значение параметра релаксации подбиралось на основе вычислительных экспериментов.

Разработанный метод решения был протестирован на задаче естественной конвекции в замкнутой квадратной полости [11]. В таблице представлено сравнение значений среднего числа Нуссельта на вертикальной стенке при различных Ra, полученных на основе разработанного алгоритма, с результатами других авторов.

Значения среднего числа Нуссельта при различных числах Рэлея

Ra	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	Полученные результаты
10^3	1,118	–	–	–	–	–	1,121
10^4	2,243	2,244	2,245	2,418	2,244	2,254	2,247
10^5	4,519	4,521	4,522	4,715	4,536	4,561	4,536
10^6	8,800	8,825	8,829	9,194	8,860	8,923	8,981

Из представленной таблицы видно, что полученные результаты согласуются с данными других работ. Максимальная относительная погрешность соответствует $Ra = 10^6$ и равна 2 %.

Результаты численного моделирования

Численные исследования краевой задачи (12) – (24) проведены при следующих значениях безразмерных комплексов:

$$10^4 \leq Ra \leq 10^6, \text{Pr} = 0,7, \bar{\lambda} = \lambda_r / \lambda_{ct} = 3,7 \cdot 10^{-2}, 5,7 \cdot 10^{-4}, 6,8 \cdot 10^{-5}.$$

Безразмерные определяющие температуры принимали значения: $\Theta_e = -1$, $\Theta_{ит} = 1$, $\Theta_0 = 0$. Особое внимание было уделено анализу влияния числа Рэлея, фактора нестационарности, теплофизических характеристик материала твердой стенки, а также оптической толщины среды на формирование термогидродинамических режимов.

Влияние числа Рэлея

На рис. 2 представлены линии тока и поля температуры, соответствующие различным режимам естественной конвекции $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$, при $\tau = 600$, $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\tau_\lambda = 50$.

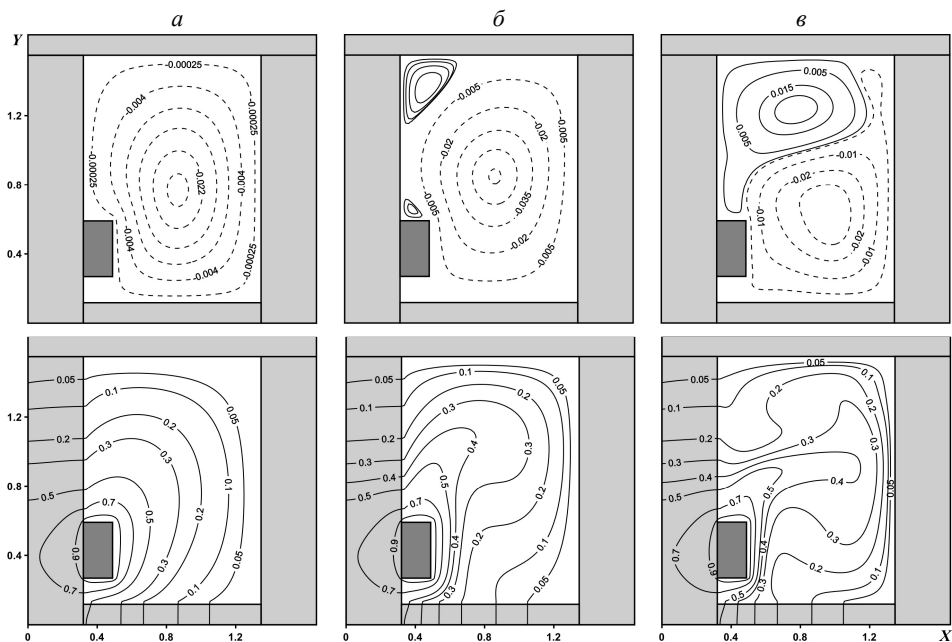


Рис. 2. Линии тока и поля температуры при $\tau = 600$, $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$, $\tau_\lambda = 50$:
а – $Ra = 10^4$; б – $Ra = 10^5$; в – $Ra = 10^6$

Увеличение числа Рэлея, обусловленное ростом температурного напора в полости, приводит к появлению вторичных циркуляций в зоне левого верхнего угла, а также отражается на росте скорости движения жидкости в полости. Необходимо отметить, что переход от $Ra = 10^5$ к $Ra = 10^6$ проявляется в существенной модификации линий тока – значительно увеличивается вихрь, располагавшийся в зоне верхнего левого угла, что приводит к деформации основной конвективной ячейки, обусловленной воздействием источника тепла. Причиной такого изменения в гидродинамике процесса, по всей видимости, является распространение возмущений от левого элемента твердой стенки вследствие опосредованного воздействия низкой температуры окружающей среды. На границе $X = 0$ моделируется конвектив-

но-радиационный теплообмен с внешней средой, что отражается на проникновении пониженной температуры вглубь левой стенки и приводит к формированию некоторого поля возмущений вблизи внутренней поверхности этой стенки. Увеличение числа Рэлея в свою очередь способствует зарождению неустойчивого термического факела над источником тепла, который, изменяя свою ориентацию, вследствие продвижения фронта пониженной температуры от границы $X = 0$, приводит к увеличению масштабов вторичной циркуляции.

Таким образом, увеличение роли подъемной силы отражается на смещении теплового факела в сторону правой стенки, что сказывается на смене гидродинамической картины: из одномасштабной конвективной ячейки формируются две вихревые структуры.

Влияние фактора нестационарности

Рассматриваемая задача является нестационарной, что обусловлено наличием зоны существенной температурной неоднородности, а также теплообменом с окружающей средой. Следует отметить, что для сложных технических устройств нестационарные процессы конвективного теплообмена практически всегда возникают при запуске и прекращении работы. В ходе таких процессов могут возникать опасные режимы. Характерным примером служит рабочий объем ядерного реактора, в котором перепады температуры при переходных процессах могут стать критическими для элементов конструкции. Те же соображения важны и для электрического оборудования и электронных приборов, охлаждаемых естественной конвекцией.

На рис. 3 показаны линии тока и поля температуры, отражающие динамику формирования режимов течения и теплообмена с течением времени при $Ra = 10^5$, $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ и $\tau_\lambda = 50$.

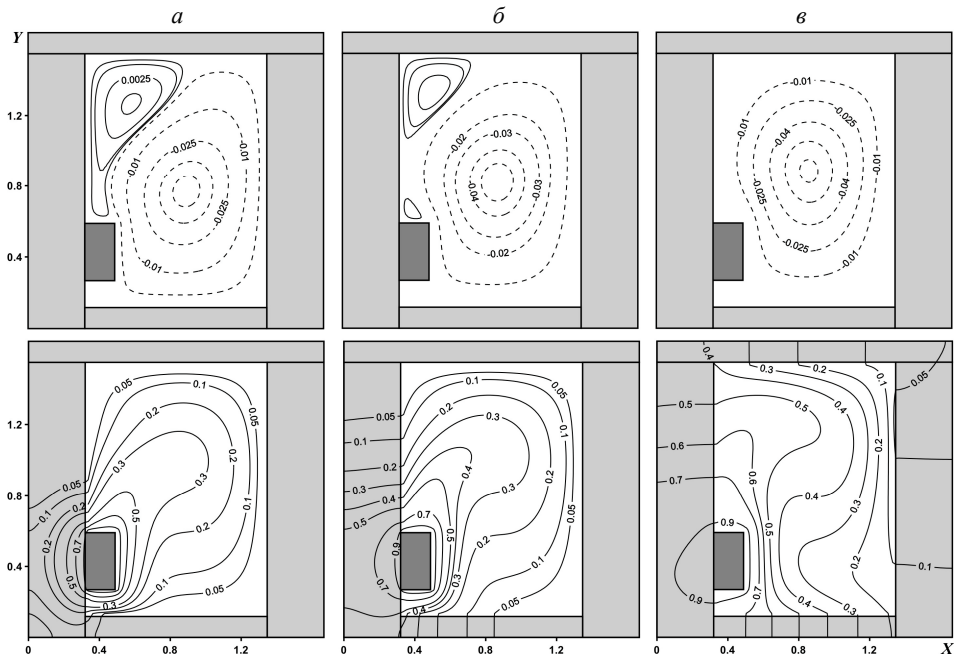


Рис. 3. Линии тока и поля температуры при $Ra = 10^5$, $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ и $\tau_\lambda = 50$:

$a - \tau = 100$; $б - \tau = 300$; $в - \tau = 800$

Увеличение безразмерного времени приводит к росту температуры как в газовой полости, так и в элементах твердой стенки. При $\tau = 100$ (рис. 3, а) в полости над источником тепла формируется вторичный вихрь, обусловленный влиянием внешней среды. С ростом τ (рис. 3, б) заметно значительное увеличение температуры в левой стенке, что приводит к уменьшению степени влияния распространения поля пониженной температуры от границы $X = 0$ и, следовательно, наблюдается уменьшение размеров вторичной циркуляции. Поле температуры при этом в газовой полости также изменяется – тепловой факел незначительно смещается к левой стенке. Дальнейший рост временного параметра (рис. 3, в) приводит к значительному прогреву области решения. Вторичное течение в левом верхнем углу полости диссипирует, наблюдается также увеличение скорости циркуляции газа в конвективной ячейке. Тепловой факел полностью присоединяется к левой стенке вследствие повышения температуры в этом элементе.

Был проведен также анализ влияния безразмерного времени на среднее число

Нуссельта на внутренней поверхности правой стенки
$$Nu_{avg} = \frac{1}{1,4} \int_{0,12}^{1,52} \left| \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=1,34} dY.$$

В сопряженных задачах теплообмена локальное и среднее числа Нуссельта зависят не только от свойств жидкости и характеристик течения в полости, но от взаимодействия кондуктивного теплопереноса в стенках с конвекцией в полости.

С ростом τ заметно формирование трех переходных нестационарных режимов теплопереноса в области решения, судя по рис. 4. При $0 < \tau < 300$ ($Ra = 10^5, 10^6$) наблюдается уменьшение Nu_{avg} , что соответствует прогреву газовой полости. При $300 < \tau < 700$ график среднего числа Нуссельта выходит на площадку, что определяет формирование квазистационарного режима, а далее при $700 < \tau < 900$ наблюдается увеличение градиента температуры, что связано с перестройкой поля температуры как в полости, так и в правой стенке. Дальнейшее увеличение τ не приводит к существенным изменениям в распределении среднего числа Нуссельта. При $Ra = 10^4$ выход на стационар происходит при $\tau = 400$.

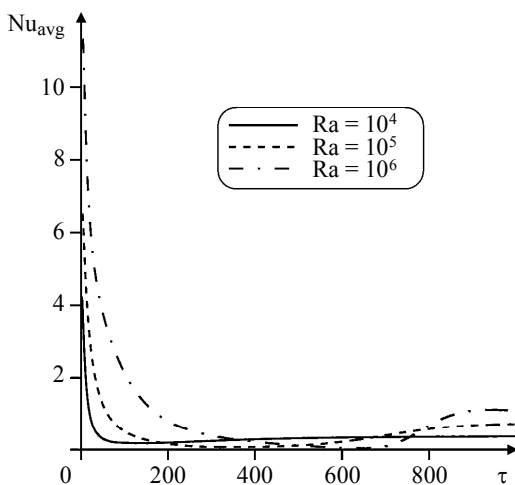


Рис. 4. Зависимость Nu_{avg} от τ и Ra

Влияние относительного коэффициента теплопроводности

На рис. 5 представлены линии тока и поля температуры, характеризующие влияние относительного коэффициента теплопроводности на термогидродинамические параметры системы при $Ra = 10^5$, $\tau = 600$ и $\tau_\lambda = 50$.

Уменьшение относительного коэффициента теплопроводности $\bar{\lambda}$ связано с ростом коэффициента теплопроводности материала твердых стенок, что отража-

ется и на картине течения, и на поле температуры. В случае, когда материал стенки является теплоизолятором (рис. 5, а), заметно влияние внешней среды – в левой стенке присутствуют изотермы пониженной температуры, а в газовой полости формируется вторичный вихрь в зоне верхнего левого угла. При $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$ (рис. 5, б) источник тепла полностью ослабляет влияние окружающей среды, что приводит к уменьшению размеров вторичной циркуляции, а также к увеличению скорости движения газа в конвективной ячейке. Дальнейшее увеличение $\lambda_{\text{ст}}$

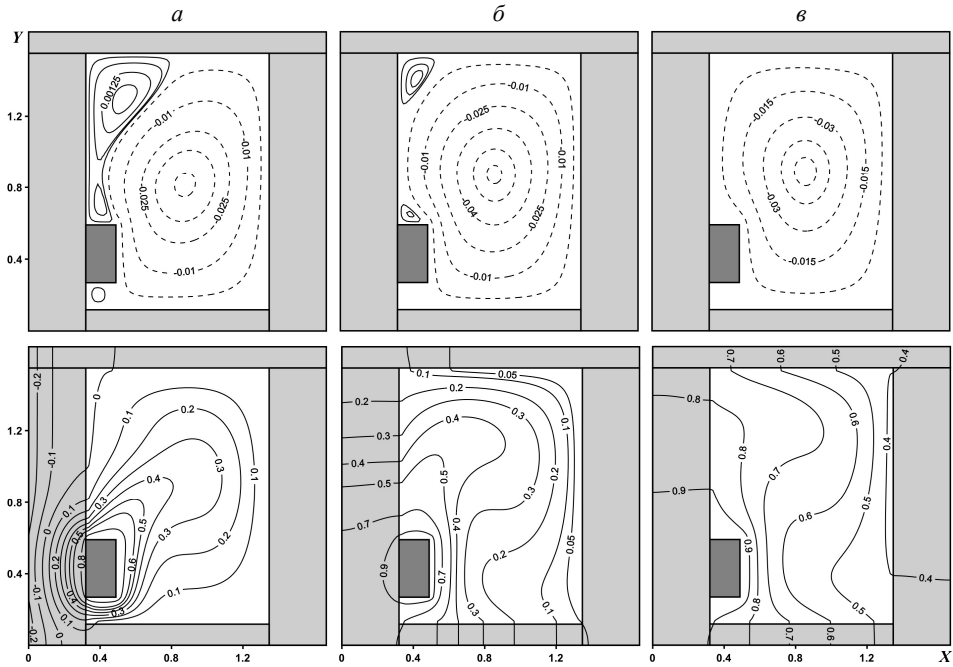


Рис. 5. Линии тока и поля температуры при $Ra = 10^5$, $\tau = 600$:

а – $\bar{\lambda} = 3,7 \cdot 10^{-2}$; б – $\bar{\lambda} = 5,7 \cdot 10^{-4}$; в – $\bar{\lambda} = 6,8 \cdot 10^{-5}$

(рис. 5, в) сказывается на значительном прогреве полости, что отражается на понижении градиента температуры в газе, и соответственно заметно уменьшение скорости циркуляции в конвективной ячейке. Последнее указывает на существование оптимального набора теплофизических характеристик материала стенок, который позволил бы интенсифицировать конвективный теплоперенос в полости и увеличить отвод тепла от нагреваемых элементов.

Заключение

Проведено математическое моделирование нестационарного конвективно-радиационного теплопереноса в замкнутой области с теплопроводными стенками конечной толщины при наличии источника тепла в условиях неоднородного теплообмена с внешней средой. Сопряженная задача численно проанализирована в широком диапазоне изменения определяющих параметров: $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$, $Pr = 0,71$, $\tau = 100 - 1000$, $\bar{\lambda} = 6,8 \cdot 10^{-5}, 5,7 \cdot 10^{-4}, 3,7 \cdot 10^{-2}$. В результате получены ти-

пичные распределения линий тока и поля температуры. Исследовано влияние числа Рэлея, фактора нестационарности и относительного коэффициента теплопроводности на формирование термогидродинамических режимов. Установлено, что учет механизма излучения приводит к повышению температуры в газовой полости. Определены масштабы нелинейного влияния внешней среды, вследствие кондуктивного теплопереноса в твердых стенках, ограничивающих газовую полость. Установлено, что уменьшение относительного коэффициента теплопроводности приводит к уменьшению среднего числа Нуссельта на характерных границах раздела. Показано, что при уменьшении $\bar{\lambda}$ прослеживается гидродинамический переход от двухмасштабной вихревой структуры к одномасштабной. Установлено, что с течением времени в результате прогресса стенок замкнутой области вторичная циркуляция, расположенная в зоне верхнего левого угла, уменьшается и начинает преобладать одномасштабная вихревая структура.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982. 472 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Андрижневский А.А., Лукашевич А.Г., Трифонов А.Г. Пространственное моделирование тепловых сборов в водные системы // V Минский Международный форум по тепло- и массообмену (электронная версия докладов). Минск: Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова, 2004.
4. Соколов Ю.А., Мартыненко О.Г. Введение в теорию свободно-конвективного теплообмена. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. 224 с.
5. Спэрроу Э.М., Сесс Р.Д. Теплообмен излучением. Л.: Энергия, 1971. 296 с.
6. Вержбицкий Г.В. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.
7. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло и массообмена. М.: Наука, 1984. 288 с.
8. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
9. Тарунин Е.Л. Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990. 225 с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
11. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1983. V. 3. P. 249 – 264.
12. Hortmann M., Peric M., Sheuerer G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: benchmark solutions // Int. J. Numer. Methods Fluids. 1990. V. 11. P. 189 – 207.
13. Kalita J.C., Dalal D.C., Dass A.K. Fully compact higherorder computation of steady-state natural convection in a square cavity // Phys. Rev. E64. 2001. P. 1 – 13.
14. Bejan A. Convection Heat Transfer. John Wiley & Sons Inc., 1995.
15. Merrikh A.A., Lage J.L. Natural convection in an enclosure with disconnected and conducting solid blocks // Int. J. Heat and Mass Transfer. 2004. V. 46. P. 995 – 1008.
16. House J.M., Beckermann C., Smith T.F. Effect of a centered conducting body on natural convection heat transfer in an enclosure // Numer. Heat Transfer. Part A. 1990. V. 18. P. 213 – 225.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

МАРТЮШЕВ Семен Григорьевич – аспирант кафедры теоретической механики Томского государственного университета.

ШЕРЕМЕТ Михаил Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: sheremet@math.tsu.ru

Статья принята в печать 15.12.2009 г.