ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 2(10)

УДК 512.553+512.541

Е.А. Тимошенко

О ПОРОЖДАЕМОСТИ Т-РАДИКАЛОВ БИМОДУЛЯМИ[1,2]

Ранее автором было установлено, что всякий Т-радикал категории модулей можно представить как порождённый некоторым бимодулем. В настоящей статье получено существенное усиление данного результата.

Ключевые слова: *модуль, радикал, бимодуль, нейтрализатор, тензорное произведение.*

На протяжении всей статьи группы будем предполагать абелевыми, кольца – ассоциативными с единицей, модули – унитарными. Будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы; так, фраза «кольцо S периодическое» означает, что периодической является аддитивная группа S^+ данного кольца. Через $\otimes_S$ и $\otimes$ обозначается тензорное произведение над кольцом S и над кольцом целых чисел соответственно.

Сначала напомним терминологию [1, 2]. Пусть каждому правому S-модулю A сопоставлен подмодуль $\rho(A)$. Будем говорить, что в категории правых S-модулей задан *радикал* ρ, если для всякого S-модульного гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ верно включение $\varphi(\rho(A)) \subseteq \rho(B)$, причём $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого модуля A. Радикал ρ называют *идемпотентным*, если для любого модуля A выполнено $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$. Радикалы можно естественным образом частично упорядочить, полагая $\rho \le \sigma$ в том и только в том случае, когда $\rho(A) \subseteq \sigma(A)$ для любого модуля A.

Пусть (здесь и далее) F есть фиксированный левый S-модуль, A – некоторый правый S-модуль. Сумму всех подмодулей B модуля A, для которых выполнено $B \otimes_S F = 0$, мы будем обозначать через $\mathrm{W}_F(A)$. Заданный таким образом функтор W_F – идемпотентный радикал категории правых S-модулей; будем называть его $\mathrm{T}(F)$-*радикалом*, или Т-*радикалом*, *порождённым модулем* F. В работе [3] было получено полное описание Т-радикалов категории абелевых групп.

В статье [4] ставился вопрос: всегда ли существует S-S-бимодуль V, такой, что идемпотентные радикалы W_F и W_V категории правых S-модулей совпадают? Там же было показано, что ответ на этот вопрос является положительным. Более того, верно следующее утверждение:

$$\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S} \text{ для любых кольца } S \text{ и модуля } {}_SF \tag{1}$$

(S-S-бимодульная структура на $F \otimes S$ вводится естественным образом).

В соответствии с [5] назовём F-*нейтрализатором* модуля A множество $\mathrm{N}_F(A)$ всех его элементов a, таких, что в тензорном произведении $A \otimes_S F$ имеем $a \otimes_S f = 0$ для всякого $f \in F$. Определённый таким образом функтор N_F является радикалом (вообще говоря, не идемпотентным). Отметим (без доказательства) следующее очевидное свойство нейтрализаторов:

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г.

[2] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Лемма 1. Если ${}_SF$ является гомоморфным образом модуля ${}_SH$, то $\mathrm{N}_H \le \mathrm{N}_F$.

В [5] отмечалось, что W_F – наибольший из всех идемпотентных радикалов ρ, удовлетворяющих условию $\rho \le \mathrm{N}_F$. Основной нашей целью будет доказательство утверждения

$$\mathrm{N}_F = \mathrm{N}_{F\otimes S} \text{ для любых кольца } S \text{ и модуля } {}_SF; \tag{2}$$

в силу сказанного выше, (1) будет получаться из (2) как простое следствие.

Предложение 2. Для любых кольца S и модуля ${}_SF$ выполнено $\mathrm{N}_F \le \mathrm{N}_{F\otimes S}$.

Доказательство. Пусть A_S есть некоторый модуль. Известно, что существует изоморфизм абелевых групп

$$\varphi\colon (A\otimes_S F)\otimes S \to A\otimes_S (F\otimes S), \tag{3}$$

переводящий элементы вида $(a\otimes_S f)\otimes s$ в элементы $a\otimes_S(f\otimes s)$. Следовательно, для всякого $a \in \mathrm{N}_F(A)$ имеем равенство $a\otimes_S(f\otimes s) = 0$ при любых $f \in F$ и $s \in S$, откуда сразу следует $a \in \mathrm{N}_{F\otimes S}(A)$. Предложение доказано. ■

Далее нам потребуется ряд вспомогательных результатов. Центр кольца S мы будем обозначать через $Z(S)$. Периодическую часть и p-примарную компоненту произвольной группы G обозначаем соответственно $\mathrm{t}(G)$ и G_p.

Предложение 3. Если кольцо S периодическое, то для любого ${}_SF$ выполнено неравенство $\mathrm{N}_{F\otimes S} \le \mathrm{N}_F$.

Доказательство. Так как S содержит единичный элемент, оно разлагается в конечное прямое произведение колец S_p, соответствующих различным простым числам p. Тогда всякий левый модуль ${}_SF$ есть прямое произведение модулей F_p, являющихся левыми модулями, каждый над своим кольцом S_p. Покажем теперь, что модуль F есть гомоморфный образ модуля $F\otimes S$.

В силу сказанного, достаточно доказать данный факт в предположении, что S есть некоторое p-кольцо. Элемент 1 имеет в p-группе S^+ максимальный порядок, т.е. циклическая подгруппа $\langle 1\rangle$ – прямое слагаемое этой группы [6, лемма 15.1]; пусть $\pi\colon S^+ \to \langle 1\rangle$ есть соответствующая проекция абелевых групп. Аддитивный гомоморфизм $\varphi\colon F\otimes S \to F$ определим при помощи равенства $\varphi(f\otimes s) = \pi(s)f$. Из равенства $\pi(1) = 1$ следует сюръективность φ. Далее, образ π содержится в $Z(S)$, поэтому φ – эпиморфизм левых S-модулей. Применяя теперь лемму 1, получаем неравенство $\mathrm{N}_{F\otimes S} \le \mathrm{N}_F$, что завершает доказательство. ■

Лемма 4. Пусть S – непериодическое кольцо, такое, что S/S_p есть p-делимая группа. Тогда:

1) Кольцо S разлагается в прямую сумму

$$S = K \oplus S_p \tag{4}$$

своих идеалов, причём группа K является p-делимой, а группа S_p – ограниченной.

2) Для кольца $Z(S)$ справедливо прямое разложение

$$Z(S) = Z(K) \oplus Z(S_p), \tag{5}$$

обладающее теми же свойствами.

Доказательство. 1) Очевидно, что S_p – идеал кольца S. По условию леммы имеем равенство $1 + S_p = p(s + S_p)$ для некоторого $s \in S$. Тогда элемент $1 - ps \in S$ имеет порядок p^k для некоторого целого $k \ge 0$; в этом случае p-высота элемента $p^k{\cdot}1 \in S$ бесконечна. Отсюда уже сразу получаем $p^kS_p = 0$.

S_p – ограниченная сервантная подгруппа группы S^+; следовательно, найдётся подгруппа K группы S^+, такая, что имеет место групповое прямое разложение (4). Тогда из изоморфизма $K \cong S/S_p$ следует p-делимость группы K. И наоборот, все элементы кольца S, имеющие бесконечную p-высоту, должны лежать в K в силу ограниченности S_p. Отсюда получаем, что K является идеалом в S.

2) Ясно, что выполнено условие (5), причём $Z(S_p)$ совпадает с p-компонентой группы $Z(S)$. Поэтому остаётся проверить p-делимость группы $Z(K)$. Для всякого $a \in Z(K)$ и всякого натурального числа k найдётся элемент b идеала K, такой, что $p^k b = a$. Для произвольного $c \in K$ имеем $p^k(bc - cb) = ac - ca = 0$. В идеале K, нет элементов порядка p, так что $b \in Z(K)$. Поэтому группа $Z(K)$ является p-делимой, что и требовалось. ■

Теперь мы готовы доказать основной результат статьи.

Теорема 5. Для любых кольца S и модуля ${}_SF$ выполнено $\mathrm{N}_F = \mathrm{N}_{F\otimes S}$.

Доказательство. Благодаря предложениям 2 и 3, нам достаточно убедиться, что неравенство $\mathrm{N}_{F\otimes S} \le \mathrm{N}_F$ выполнено, если кольцо S является непериодическим. Предположим противное: пусть для некоторого модуля A_S существует элемент $a \in A$, такой, что $a \in \mathrm{N}_{F\otimes S}(A)$ и $a \notin \mathrm{N}_F(A)$.

Обозначим $X = A \otimes_S F$, тогда, в силу нашего предположения, найдётся элемент $f \in F$, для которого $x = a \otimes_S f$ есть ненулевой элемент группы X. Изоморфизм (3) показывает, что справедливо включение $x \in \mathrm{N}_S(X)$, где N_S обозначает T-радикал категории абелевых групп, порождённый группой S^+.

Введём обозначение $\Lambda = S/\mathrm{t}(S)$. Применяя к радикалу N_Λ категории абелевых групп лемму 1, приходим к включению $x \in \mathrm{N}_\Lambda(X)$. Далее, группа Λ есть плоский модуль над кольцом целых чисел, а значит, $\mathrm{N}_\Lambda = \mathrm{W}_\Lambda$ [5].

Из описания $\mathrm{T}(F)$-радикалов категории абелевых групп, приведённого в [3], непосредственно получаем, что содержащая элемент x группа $Y = \mathrm{N}_\Lambda(X) = \mathrm{W}_\Lambda(X)$ совпадает с прямой суммой всех p-компонент X_p, для которых $p\Lambda = \Lambda$. Далее, из сервантности подгруппы Y в группе X и включения $x \in \mathrm{N}_S(X)$ нетрудно вывести, что $x \in \mathrm{N}_S(Y)$. Поскольку $x \ne 0$, мы можем найти такое простое число p, что для проекции $\pi\colon Y \to X_p$ будет выполнено $y = \pi(x) \ne 0$. Из $x \in \mathrm{N}_S(Y)$ теперь следует $y \in \mathrm{N}_S(X_p)$.

Напомним, что $p\Lambda = \Lambda$. Возможны два случая.

а) Пусть $pS = S$. Это означает, что элемент $p\cdot 1$ обратим в кольце S. Поэтому S содержит подкольцо R, которое изоморфно кольцу всех рациональных чисел, чьи знаменатели являются степенями числа p. В этом случае A и F (а значит, и X) – модули над кольцом R, что противоречит неравенству $X_p \ne 0$.

б) Пусть $pS \ne S$. Группы Λ и $\mathrm{t}(S)/S_p$ являются p-делимыми; следовательно, тем же свойством обладает и аддитивная группа кольца S/S_p. Это означает, что $S_p \ne 0$. Применяя лемму 4, приходим к разложению (4); пусть характеристика кольца S_p равна p^k, а g есть единичный элемент кольца S_p. Как мы знаем из доказательства предложения 3, циклическая группа $G = \langle g\rangle$ порядка p^k есть гомоморфный образ группы S_p и, значит, гомоморфный образ группы S^+. Применяя теперь лемму 1, приходим к включению $y \in \mathrm{N}_G(X_p)$, где N_G – радикал категории абелевых групп.

Заметим, что A и F (а значит, X и, далее, X_p) суть модули над $Z(S)$. Применяя лемму 4, приходим к разложению (5). Из p-делимости идеала $Z(K)$ мы получаем равенство $X_p \cdot Z(K) = 0$, т.е. X_p является $Z(S_p)$-модулем и, значит, $p^k X_p = 0$. Отсюда следует, что эпиморфизм $X_p \to X_p \otimes G$, переводящий всякий элемент b в элемент $b \otimes g$, будет изоморфизмом [6, § 59]. Тогда из $y \in \mathrm{N}_G(X_p)$ сразу получаем $y = 0$ – противоречие.

Теорема доказана. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.
2. *Мишина А.П.*, *Скорняков Л.А.* Абелевы группы и модули. М.: Наука, 1969.
3. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы в категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13. № 3. С. 193 – 208.
4. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы, порождаемые бимодулями // Вестник СамГУ. Естественно-научная серия. 2009. № 8(74). С. 88 – 93.
5. *Тимошенко Е.А.* Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. № 1. С. 201 – 210.
6. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

ТИМОШЕНКО Егор Александрович – доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: tea471@mail.tsu.ru

Статья принята в печать 26.04.2010 г.