

УДК 531.351

М.А. Бубенчиков**ДВИЖЕНИЕ УЛЬТРАДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ
В ЗАКРУЧЕННОЙ СЕКЦИИ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА¹**

В работе исследуется процесс центрифугирования ультрадисперсных частиц в кольцевом канале с вращающейся секцией. При математическом моделировании их движения в модели стоксовского сопротивления учтена поправка Каннингема на конечность числа Кнудсена. Построена явно-неявная схема, позволяющая вести расчеты в широком диапазоне изменения шагов по времени. Для проверки точности вычислений дано также аналитическое решение задачи об определении поперечного смещения частицы. Получено хорошее согласование численного и аналитического решений.

Ключевые слова: ультрадисперсные частицы, кольцевой канал, центрифугирование, поправка Каннингема, число Кнудсена, явно-неявная схема.

Центробежные аппараты широко и успешно используются для разделения компонент полифракционных газовых смесей, а также для выделения из газовой фазы взвешенных в ней фракций редкоземельных элементов, в частности, газовое центрифугирование является основным способом выделения радиоактивных изотопов. Если речь идет о частицах, размер которых порядка микрона и выше, то для описания их движения в газе применимы методы механики сплошной среды, и в частности методы классической аэромеханики. В этом направлении активно работали и работают представители томской школы аэромехаников В.А. Шваб, А.В. Шваб, М.И. Шиляев, И.М. Васенин, А.А. Глазунов, А.Д. Рычков, В.А. Архипов, А.В. Старченко, О.В. Матвиенко и другие. Однако при описании движения мелкодисперсных частиц из-за нарушения гипотезы сплошности среды и наличия броуновского движения возникают проблемы при определении силы аэродинамического сопротивления частицы. При выполнении расчетов в настоящей работе принята технология вычисления сопротивления, широко используемая при газовом центрифугировании радиоактивных изотопов.

Физическая постановка задачи

Будем рассматривать стационарное осесимметричное изотермическое закрученное течение газа, содержащего незначительное по массе количество примеси в виде ультрадисперсных либо даже наночастиц. Движение газа осуществляется в кольцевом канале постоянного сечения, имеющем вращающуюся секцию.

Пусть a и b – внутренний и внешний радиусы кольцевого канала, а $L = L_1 + L_2 + L_3$ – его длина, причем $L \gg b - a$. Изначально прямоочное движение газа, поступающего на вход в кольцевой канал еще на участке L_1 трансформируется в автомодельное распределение (см. ниже). В секции L_2 , где осуществляется вращение стенок канала, на это движение накладывается окружное пере-

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант РФФИ № 08-01-00484-а).

мещение среды, в результате траекториями движения частиц на этом участке оказываются линии, схожие с винтовыми. В секции L_3 окружное движение под действием сил вязкости постепенно затухает. Безусловно, в начале секции L_2 существует участок перестройки движения. Его длина будет определяться отношением интенсивностей конвективного и диффузионного механизмов в переносе окружной скорости. Как только распределение компоненты W будет соответствовать закону вращения твердого тела, этот участок закончится. Имея в виду относительно небольшой поперечный размер области течения и модельный характер настоящих расчетов, ниже мы не будем рассматривать участок перестройки движения.

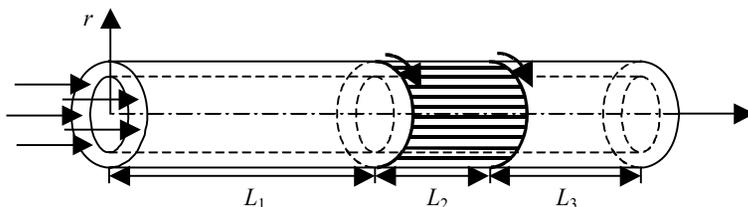


Рис. 1. Физическая область движения газа и частиц:

L_1 – предвключенный участок, L_2 – вращающаяся секция, L_3 – участок последействия

Автомодельные распределения в газовой фазе

Стационарные уравнения осесимметричного изотермического дозвукового течения воздуха в центробежном аппарате можно записать как осесимметричные уравнения Навье – Стокса для несжимаемой жидкости [1]:

$$U \frac{\partial U}{\partial z} + V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 U ; \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial z} + V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{W^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 V - \frac{V}{r^2} \right); \quad (2)$$

$$U \frac{\partial W}{\partial z} + V \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{VW}{r} = \nu \left(\nabla^2 W - \frac{W}{r^2} \right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (Vr)}{\partial r} = 0 . \quad (4)$$

Здесь z, r – цилиндрические координаты; U, V, W – компоненты вектора скорости в выбранной системе координат; ρ, p – плотность и давление газа (жидкости);

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ – плоский оператор Лапласа.

Для случая прямоточного течения несжимаемой жидкости в [1] приведено автомодельное распределение для продольной компоненты скорости в кольцевом канале:

$$u(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L_1} \left[a^2 - r^2 + \frac{b^2 - a^2}{\ln(b/a)} \ln(r/a) \right], \quad (5)$$

где a, b – внутренний и внешний радиусы кольцевого канала; Δp – перепад давления на длине L_1 ; μ – коэффициент динамической вязкости среды.

Существует простейшее автомодельное (все распределения которого зависят только от одной координаты) решение задачи о закрученном течении в кольцевом канале:

$$\begin{aligned} U(r) &= u(r), \quad V(r) \equiv 0, \quad W(r) = \omega r, \\ p(z, r) &= p_a(z) + \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - a^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь ω – постоянная по величине угловая скорость, $p_a(z)$ – линейная функция z , так что $\frac{\partial p}{\partial z}$ уже не зависит от z .

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эти распределения удовлетворяют уравнениям (1) – (3).

Уравнение поперечного перемещения отдельной частицы

Примем, что сила сопротивления F_D движению частицы пропорциональна первой степени скорости поперечного смещения:

$$F_D = 2M\beta\dot{r}, \quad (7)$$

где M – масса частицы, β – пока еще неопределенный коэффициент сопротивления, $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$, $r(t)$ – поперечная координата отдельной частицы.

Далее в настоящей работе мы пренебрегаем скольжением частиц при их перемещении в продольном направлении, считая, что в этом направлении они движутся со скоростью, равной скорости основного потока. Запишем основное уравнение динамики частицы, спроецированное на радиальное направление, в котором будут учтены лишь центробежная сила инерции и сила сопротивления среды:

$$M \cdot \ddot{r} = M \frac{W^2}{r} - 2M\beta\dot{r}. \quad (8)$$

Заменяя W с использованием (6) и сокращая на M , найдем:

$$\ddot{r} = \omega^2 r - 2\beta\dot{r}. \quad (9)$$

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое будем интегрировать численно. Однако в дальнейшем для проверки точности вычислений построим и аналитическое решение этого уравнения.

Расчет силы сопротивления

В дальнейшем будем использовать обозначения $V = \dot{r}$, $\vec{V} = \dot{r}\vec{e}_r$, где \vec{e}_r – орт оси Or .

Сила сопротивления через коэффициент сопротивления может быть определена следующим образом:

$$\vec{F}_D = -\frac{C_D \pi d^2}{8} \rho V \vec{V}. \quad (10)$$

Здесь d – диаметр частицы; \vec{V} – ее относительная скорость; ρ – плотность окружающей среды.

Для C_D будем использовать простейшую формулу Стокса

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}. \quad (11)$$

с коррекцией Каннингема [2, 3] на конечность числа Кнудсена для частицы наноразмера. Поэтому здесь

$$\text{Re} = \rho V d / \mu', \quad (12)$$

$\mu' = \mu / C$, $C = 1 + Kn(A_1 + A_2 \exp(-A_3 / Kn))$, $Kn = l / d$, μ' – величина скорректированного по Каннингему коэффициента динамической вязкости среды, l – длина свободного пробега молекул окружающей частицу среды, Kn – число Кнудсена, A_i ($i = \overline{1,3}$) – коэффициенты модели.

Подставляя (11), (12) в (10), получим

$$F_D = 3\pi d V \mu'. \quad (13)$$

С другой стороны, принимая для F_D зависимость

$$F_D = 2M\beta V,$$

из сопоставления этих формул найдем

$$\beta = \frac{3\pi d}{2M} \mu'. \quad (14)$$

Численное решение задачи

Уравнение второго порядка (9) запишем в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dr}{dt} = V(r); \quad (15)$$

$$\frac{dV}{dt} = \omega^2 r - 2\beta V. \quad (16)$$

Добавляя к уравнениям (15), (16) кинематическое условие, определяющее продольную скорость частицы, получим замкнутую систему, полностью определяющую движение частицы в потоке:

$$\frac{dz}{dt} = U(r). \quad (17)$$

Численное интегрирование полученной системы будем проводить с использованием для уравнений (15), (17) схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности и неявной схемы для уравнения (16). Согласно подходу Рунге-Кутта, использующему идею пересчета для того, чтобы вычислить значение искомой величины на новом слое по времени (в момент t^{n+1}), необходимо предварительно вычислить правые части указанных уравнений в четырех точках интервала $t \in [t^n, t^{n+1}]$:

$$r_1 = r^n, \quad V_1 = V^n, \quad U_1 = U(r_1); \quad (18)$$

$$r_2 = r^n + \frac{h}{2}V_1, \quad V_2 = \frac{\left(V^n + \frac{h}{2}\omega^2 r_1\right)}{(1+\beta h)}, \quad U_2 = U(r_2); \quad (19)$$

$$r_3 = r^n + \frac{h}{2}V_2, \quad V_3 = \frac{\left(V^n + \frac{h}{2}\omega^2 r_2\right)}{(1+\beta h)}, \quad U_3 = U(r_3); \quad (20)$$

$$r_4 = r^n + hV_3, \quad V_4 = \frac{\left(V^n + h\omega^2 r_3\right)}{(1+2\beta h)}, \quad U_4 = U(r_4). \quad (21)$$

Тогда значения искомым величин на новом слое по времени найдутся по формулам

$$r^{n+1} = r^n + \frac{h}{6}(V_1 + 2V_2 + 2V_3 + V_4); \quad (22)$$

$$z^{n+1} = z^n + \frac{h}{6}(U_1 + 2U_2 + 2U_3 + U_4); \quad (23)$$

$$V^{n+1} = \frac{\left(V^n + h\omega^2 r^{n+1}\right)}{(1+2\beta h)}. \quad (24)$$

Соотношения (22), (23) представляют собой формулы явного определения цилиндрических координат частицы по технологии Рунге-Кутты, а (24) – формула неявного вычисления скорости частицы на новом слое по времени.

Проводя последовательно расчеты по формулам (18) – (24), находим численное решение задачи о движении частицы в закрученном потоке, полученное с использованием явно-неявной схемы.

Аналитическое решение

Исходное уравнение динамики одиночной частицы

$$\ddot{r} = \omega^2 r - 2\beta \dot{r} \quad (25)$$

есть однородное линейное уравнение второго порядка.

Решение ищем в виде

$$r = e^{\alpha t}. \quad (26)$$

Подставляя в (25), находим

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\beta \alpha e^{\alpha t} - \omega^2 e^{\alpha t} = 0.$$

Сокращая на $e^{\alpha t}$, получаем характеристическое уравнение

$$\alpha^2 + 2\beta \alpha - \omega^2 = 0. \quad (27)$$

Его корнями будут действительные числа

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \omega^2}. \quad (28)$$

Поэтому общим решением будет распределение

$$r(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}, \quad (a)$$

где C_1, C_2 – константы интегрирования, которые найдутся из начальных условий:

$$t = 0, \quad r = r_0, \quad \dot{r} = 0,$$

из которых при наличии (a) следует

$$\begin{cases} C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 = 0, \\ C_1 + C_2 = r_0. \end{cases}$$

Отсюда с учетом (28) получим

$$\begin{cases} C_1 = \frac{r_0}{2} \cdot \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}, \\ C_2 = -\frac{r_0}{2} \cdot \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + \omega^2}}{\sqrt{\beta^2 + \omega^2}}. \end{cases} \quad (29)$$

Принимая во внимание введенное ранее обозначение $\dot{r} = V$, для поперечной скорости частицы найдем

$$V = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}. \quad (30)$$

Результаты расчетов

Ниже представлены результаты расчетов движения газа и частиц в кольцевом канале с поперечными размерами: $a = 0,3$ м, $b = 0,35$ м, длиной вращающейся секции $L_2 = 1,4$ м и угловой скоростью вращения барабанов $\omega = 300$ с⁻¹. На рис. 2 показан профиль продольной скорости газа. Цифровка на всех графиках соответствует значениям в системе СИ. Как видим, уровень скоростей, представленный на этом рисунке, отвечает ламинарному режиму течения газа.

В качестве частиц были выбраны углеродные шарики диаметром $d = 10^{-7}$ м, $M = 1,2 \cdot 10^{-20}$ кг, а в качестве окружающей среды – атмосферный воздух, для которого $l = 2 \cdot 10^{-7}$ м. Поэтому число Кнудсена было равно $Kn = 2$. Поправка вязкости в этом случае определялась следующими значениями коэффициентов [2]: $A_1 = 0,99, A_2 = A_3 = 0$ (см. соотношение (12)). При этом коэффициент β , входящий в (16), получился равным $\beta = 2,44 \cdot 10^6$ с⁻¹, а корни характеристического уравнения, входящие в решение (a), имели следующие значения: $\alpha_1 = 2,2 \cdot 10^{-2}$ с⁻¹, $\alpha_2 = -4,09 \cdot 10^6$ с⁻¹. Как видим из рис. 3, скорость центрифугирования V оказалась в этом случае практически постоянной величиной и приближенно равной 8 мм/с.

Кривые $l - 5$ на рис. 3 – 5 отвечают различным начальным положениям частиц в поперечном сечении канала. Эти положения отмечены цифрами на вертикальной оси рис. 3. В представленной математической модели процесса мы не рассматривали эффект отражения частиц от стенки канала. Попадая на нее, они останавливаются, что и следует из рис. 4, 5. Зона пребывания частиц в аппарате ограничена справа поверхностью вращения с образующей в виде траектории частицы, сошедшей с малого барабана (см. кривая l на рис. 5).

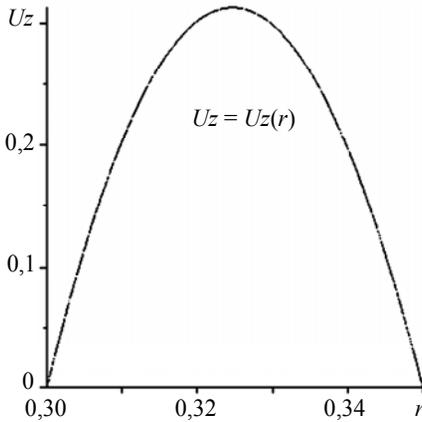


Рис. 2. Автоподобный профиль продольной скорости (5)

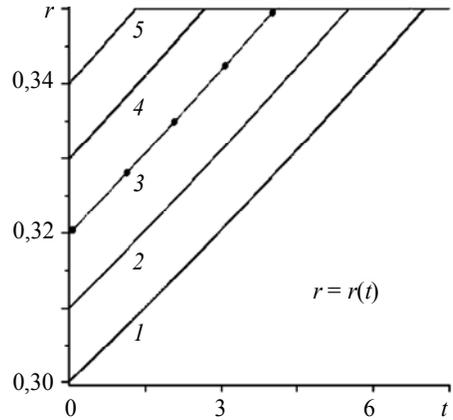


Рис. 3. Изменение радиальной координаты частиц со временем. Кружки на прямой 3 – аналитическое решение (а)

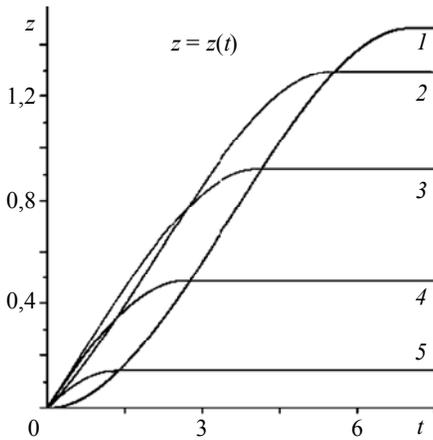


Рис. 4. Изменение продольной координаты частиц со временем

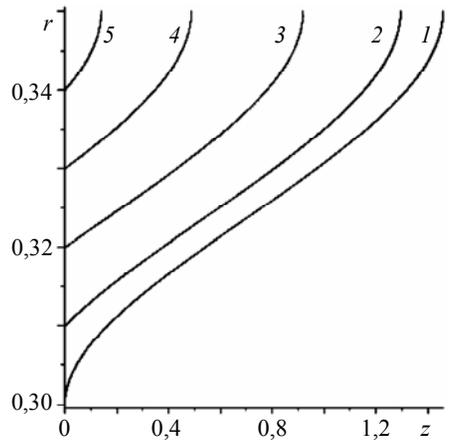


Рис. 5. Траектории движения частиц в плоскости (z, r)

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М. : Наука, 1973. 848 с.
2. Хэппель Дж., Бренер Л. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 464 с.
3. Смирнов Н.Н. и др. Моделирование поведения наночастиц в газе // Rusnanotech'09. Томск, 2009. С. 169 – 172.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ :

БУБЕНЧИКОВ Михаил Алексеевич – ассистент кафедры теоретической механики Томского государственного университета. E-mail: Michael121@mail.ru

Статья принята в печать 30.04.2010 г.