УДК 517.982

Т.Е. Хмылева, О.Г. Иванова

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ БАЗИСОМ[1]

В работе рассматривается последовательность нормированных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в гильбертовом пространстве *H*, такая, что скалярные произведения $\langle h_i, h_j \rangle \geq \alpha$, $\alpha > 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \boldsymbol{N}$. Доказывается, что данная последовательность векторов не является базисом в *H*.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, скалярное произведение, базис, полные последовательности, угол между элементами последовательности.*

Определение 1. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в бесконечномерном банаховом пространстве *E* называется базисом Шаудера в *E*, если для каждого $x \in E$ существует единственная последовательность скаляров, такая, что $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$.

Проверка базисности той или иной последовательности есть, вообще говоря, нетривиальный факт. Поэтому существуют различные критерии для проверки базисности системы. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. [1] Система ненулевых векторов $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in E$ – базис в банаховом пространстве *E* тогда и только тогда, когда существует константа *K*, такая, что для любых $m, n \in \boldsymbol{N}$, $m \leq n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right\| \leq K \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right\|.$$

Если $\{x_j\}_{j=1}^{\infty} \in E$ – базис в банаховом пространстве *E*, то число $K = \sup_{n \in \boldsymbol{N}} \|P_n\|$, где

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j ,$$

называется базисной константой.

Из этой теоремы нетрудно получить следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – базис в банаховом пространстве *E*, тогда любая его подпоследовательность $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ является базисной, т. е. $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в $\left\{\overline{sp\{h_{n_k}\}}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Госконтракт П937 от 20 августа 2009 года.

Теорема 2. [2] Для того чтобы последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ являлась базисом в банаховом пространстве *E*, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая положительная константа α, что

$$\rho\left(S_n, L^n\right) = \inf_{x' \in S_n, x'' \in L^n} \|x' - x''\| \geq \alpha \text{ для любого } n = 1, 2, \ldots,$$

где $S_n = \{x \in L_n, \|x\| = 1\}$ – единичная сфера в $L_n = sp\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $L^n = \overline{sp\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}$.

Частный случай исследуемой в данной работе задачи, когда $\left\langle h_i, h_j \right\rangle = \alpha$, $\alpha > 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \boldsymbol{N}$, уже был рассмотрен И. П. Бухтиной, Т. Е. Хмылевой [3]. Кроме того, был получен явный вид элемента, который не раскладывается по системе векторов $\{h_n\}_{n \in N}$, как по базису. Этот вектор был назван биссектрисой, в том смысле, что он образует одинаковые углы со всеми векторами последовательности $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно привести и более простой пример последовательности нормированных векторов гильбертова пространства *H*, скалярные произведения между любыми двумя элементами которой равны некоторому числу $\alpha > 0$, не являющейся базисом в *H*.

Пример 1. Рассмотрим последовательность элементов в гильбертовом пространстве *H*:

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\sqrt{a}, \sqrt{1-a}, 0, 0, \ldots\right), \\ f_2 &= \left(\sqrt{a}, 0, \sqrt{1-a}, 0, 0, \ldots\right), \\ f_3 &= \left(\sqrt{a}, 0, 0, \sqrt{1-a}, 0, 0, \ldots\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \end{aligned} \tag{1}$$

Очевидно, что $\left\langle f_i, f_j \right\rangle = a, i \neq j$ и $\|f_i\| = 1, i = 1, 2, \ldots$.

Проверим, что система (1) является полной. Предположим, что система (1) не полна. Тогда существует вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2, x \neq 0$, такой, что $x \perp sp\{f_1, f_2, \ldots\}$. Тогда

$$\begin{aligned} x \perp f_1 &\Rightarrow \langle x, f_1 \rangle = x_1\sqrt{a} + x_2\sqrt{1-a} = 0, \\ x \perp f_2 &\Rightarrow \langle x, f_2 \rangle = x_1\sqrt{a} + x_3\sqrt{1-a} = 0, \\ x \perp f_3 &\Rightarrow \langle x, f_3 \rangle = x_1\sqrt{a} + x_4\sqrt{1-a} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x \perp f_n &\Rightarrow \langle x, f_n \rangle = x_1\sqrt{a} + x_{n+1}\sqrt{1-a} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \end{aligned}$$

Следовательно, $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \ldots = x_n = \ldots$, но так как $x \in l_2$, то $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \ldots = 0$, то есть получаем, что $x = (0, 0, 0, \ldots)$.

Получили противоречие с тем, что $x \neq 0$. Следовательно, система является полной.

Докажем, что система (1) не является базисом. Предположим, что (1) – базис, тогда элемент $e_1 = (1,0,0,\ldots)$ имеет вид $e_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f_i$. Распишем это равенство по координатам:

$$\beta_1\sqrt{a} + \beta_2\sqrt{a} + \ldots + \beta_n\sqrt{a} + \ldots = 1,$$
$$\beta_1\sqrt{a-1} = 0,$$
$$\beta_2\sqrt{a-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\beta_n\sqrt{a-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Очевидно, что данная система не имеет решения. Следовательно, последовательность (1) не является базисом. Заметим, что вектор $e_1 = (1,0,0,\ldots)$ является биссектрисой, то есть $\langle e_1, f_i \rangle = \sqrt{a}$ для любого $i \in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим теперь полную последовательность нормированных векторов $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких, что $\langle h_i, h_j \rangle = \alpha$, $\alpha > 0$ при $i \neq j$. Линейное отображение $T : H \to l_2$, определенное формулой $Th_n = f_n$, является изометрией пространства H на l_2. Так как $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – не базис, следовательно, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ тоже не будет являться базисом.

Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изометрически изоморфны пространству всех суммируемых в квадрате последовательностей l_2, то мы будем рассматривать последовательность в гильбертовом пространстве l_2.

Определение 2. Углом α между двумя элементами $x, y \in l_2$ называем такое число $\alpha \in [0, \pi]$, что $\cos\alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Замечание. Не существует бесконечной последовательности линейно независимых элементов с единичной нормой $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\langle h_i, h_j \rangle \leq -\alpha$, где $\alpha > 0$.

Доказательство. Предположим противное, пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечная последовательность линейно независимых нормированных векторов, такая, что $\langle h_i, h_j \rangle \leq -\alpha$, где $\alpha > 0$. Рассмотрим

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} h_i \right\|^2 = N + \sum_{\substack{i,j=1,\\ i \neq j}}^{N} \langle h_i, h_j \rangle \leq N - \alpha(N-1)N = N(1-\alpha(N-1)).$$

Очевидно, что при достаточно больших N

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} h_i \right\|^2 < 0,$$

а этого не может быть.

Таким образом, мы доказали, что бесконечной системы с указанными свойствами не существует. Но можно доказать, что существует бесконечная система, такая, что ее элементы образуют друг с другом различные тупые углы, которые подходят к $\frac{\pi}{2}$. Приведем пример такой последовательности.

Пример 2. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H бесконечную систему векторов

$$f_1 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0, \dots\right),$$

$$f_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{14}}{4}, 0, 0, \dots\right),$$

$$f_3 = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{33}}{6}, 0, \dots\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$

$$f_n = \left(\underbrace{-\frac{1}{2n}, \dots, -\frac{1}{2n}}_{n}, \frac{\sqrt{4n-1}}{2\sqrt{n}}, 0, \dots\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Очевидно, что $\|f_n\| = 1, n \in \boldsymbol{N}$, и при $m > n$

$$\langle f_n, f_m \rangle = \frac{1}{2n} \cdot \frac{1}{2m} \cdot n - \frac{\sqrt{4n-1}}{2\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{4m}\left(1 - \sqrt{\frac{4n-1}{n}}\right) < 0 . \tag{2}$$

Это означает, что элементы f_n и f_m при $n \neq m$ образуют тупые углы. Из соотношения (2) ясно, что $\langle f_n, f_m \rangle \to 0$ при $m \to \infty$, то есть углы между векторами f_n и f_m стремятся к $\frac{\pi}{2}$ с ростом *m* и *n*.

Теорема 3. Пусть $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ – полная нормированная последовательность векторов в гильбертовом пространстве l_2, такая, что скалярные произведения $\langle h_i, h_j \rangle \geq \alpha$, $\alpha > 0$ при $i \neq j$, $i, j \in \boldsymbol{N}$. Тогда данная последовательность векторов не является базисом в l_2.

Доказательство. Учитывая приведенное выше утверждение 1, достаточно доказать, что существует подпоследовательность $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая не является базисной. Опишем процесс построения подпоследовательности $\{h_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Рассмотрим последовательность скалярных произведений $\{\langle h_1, h_i \rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Так как эта числовая последовательность ограничена, то можно извлечь подпоследовательность $h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, h_3^{(1)}, \ldots, h_n^{(1)}, \ldots$, где $h_1 = h_1^{(1)}$, для которой существует $\lim\limits_{i\to\infty} \left\langle h_1^{(1)}, h_i^{(1)} \right\rangle = s_1$. Положим $s_{1,i} = \left\langle h_1^{(1)}, h_i^{1} \right\rangle$, $i = 1, 2, \ldots$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} s_{1,i} = s_1$. Не нарушая общности, можно считать, что $\left| s_{1,i} - s_1 \right| < \dfrac{1}{2}$ для каждого $i \geq 2$.

Далее рассмотрим последовательность скалярных произведений $\left\{ \left\langle h_2^{(1)}, h_i^{(1)} \right\rangle \right\}_{i=2}^{\infty}$. Так как эта числовая последовательность ограничена, мы можем извлечь подпоследовательность $h_2^{(2)}, h_3^{(2)}, h_4^{(2)}, \ldots, h_n^{(2)}, \ldots$, где $h_2^{(2)} = h_2^{(1)}$, для которой существует $\lim\limits_{i\to\infty} \left\langle h_2^{(2)}, h_i^{(2)} \right\rangle = s_2$. Положим $s_{2,i} = \left\langle h_2^{(2)}, h_i^{(2)} \right\rangle$, $i = 2, 3, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{i\to\infty} s_{2,i} = s_2$. Не нарушая общности, можно считать, что $\left| s_{2,i} - s_2 \right| < \dfrac{1}{2^2}$ для каждого $i \geq 3$.

Продолжая этот процесс, для каждого $m \in \boldsymbol{N}$ мы можем построить подпоследовательность $h_m^{(m)}, h_{m+1}^{(m)}, \ldots, h_n^{(m)}, \ldots$, где $h_m^{(m)} = h_m^{(m-1)}$, такую, что существует $\lim\limits_{i\to\infty} \left\langle h_m^{(m)}, h_i^{(m)} \right\rangle = s_m$. Положим $s_{m,i} = \left\langle h_m^{(m)}, h_i^{(m)} \right\rangle$, $i = m, m+1, \ldots$, тогда $\lim\limits_{i\to\infty} s_{m,i} = s_m$, и так как $s_{m,i} \geq \alpha$, то $s_m \geq \alpha$. Не нарушая общности, можно считать, что $\left| s_{m,i} - s_m \right| < \dfrac{1}{2^m}$ для любого $i \geq m+1$.

Рассмотрим диагональную последовательность $h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, h_3^{(3)}, \ldots, h_n^{(n)}, \ldots$. Из построения ясно, что $\left\langle h_n^{(n)}, h_i^{(i)} \right\rangle \to s_n$ при $i \to \infty$.

Так как числовая последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ удовлетворяет условию $s_i \geq \alpha$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, то существует сходящаяся подпоследовательность $\left\{ s_{n_k} \right\}_{k=1}^{\infty}$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k} = s_0 \geq \alpha$. Не умоляя общности, можно считать, что $\left| s_{n_k} - s_0 \right| < \dfrac{1}{2^k}$.

Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\left\{ h_{n_k}^{(n_k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$. Переобозначим $h_{n_k}^{(n_k)} = f_k$, $s_{n_k} = p_k$, $\left\langle f_k, f_i \right\rangle = p_{k,i}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Из построения ясно, что $\left\langle h_{n_k}^{(n_k)}, h_{n_i}^{(n_i)} \right\rangle = s_{n_k, n_i} \to s_{n_k}$ при $i \to \infty$ и $s_{n_k} \to s_0$ при $k \to \infty$. Так как $\left\langle h_{n_k}^{(n_k)}, h_{n_i}^{(n_i)} \right\rangle = \left\langle f_k, f_i \right\rangle = p_{k,i} = s_{n_k, n_i}$ и $s_{n_k} = p_k$, то $p_{k,i} \to p_k$ при $i \to \infty$, а $p_k \to s_0$ при $k \to \infty$. Пусть $p_{k,i} = s_0 + \varepsilon_{ki}$. Тогда $\left| \varepsilon_{k,i} \right| = \left| p_{k,i} - s_0 \right| \leq \left| p_{k,i} - p_k \right| + \left| p_k - s_0 \right| < \dfrac{1}{2^k} + \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$ при $i > k$.

Положим $g_n = \dfrac{1}{n}\left(f_1 + f_2 + \ldots + f_n \right)$. Подсчитаем норму g_n:

$$\|g_n\|^2 = \left\|\frac{1}{n}(f_1+f_2+\ldots+f_n)\right\|^2 = \left\langle \frac{1}{n}(f_1+f_2+\ldots+f_n), \frac{1}{n}(f_1+f_2+\ldots+f_n)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n + 2\sum_{k=2}^{n}\langle f_1, f_k\rangle + 2\sum_{k=3}^{n}\langle f_2, f_k\rangle + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n}\langle f_{n-1}, f_k\rangle\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n + 2\sum_{k=2}^{n} p_{1,k} + 2\sum_{k=3}^{n} p_{2,k} + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n} p_{n-1,k}\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n + 2\sum_{k=2}^{n}(s_0+\varepsilon_{1,k}) + 2\sum_{k=3}^{n}(s_0+\varepsilon_{2,k}) + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n}(s_0+\varepsilon_{n-1,k})\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[n + \left(2\sum_{k=2}^{n} s_0 + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n} s_0\right) + \left(2\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_{1,k} + \ldots + 2\sum_{k=n}^{n}\varepsilon_{n-1,k}\right)\right].$$

Поскольку

$$\frac{2}{n^2}\left[\sum_{k=2}^{n} s_0 + \sum_{k=3}^{n} s_0 + \ldots + \sum_{k=n}^{n} s_0\right] = \frac{2}{n^2}[(n-1)s_0 + (n-2)s_0 + \ldots + s_0] = \frac{2}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}s_0 \to s_0$$

при $n \to \infty$, а

$$\frac{2}{n^2}\left[\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_{1,k} + \sum_{k=3}^{n}\varepsilon_{2,k} + \ldots + \sum_{k=n}^{n}\varepsilon_{n-1,k}\right] \le \frac{2}{n^2}\left[n-1+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right] \le$$

$$\le \frac{2}{n^2}\left[n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right) + \left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}\right)\right] \le \frac{2}{n^2}[2n+n] \to 0$$

при $n \to \infty$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n\|^2 = s_0$, причем $s_0 \ne 0$.

Покажем, что последовательность элементов $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в пространстве l_2:

$$\left\|g_n - g_{n+p}\right\|^2 = \left\|g_n\right\|^2 + \left\|g_{n+p}\right\|^2 - 2\left\langle g_n, g_{n+p}\right\rangle =$$

$$= \left\|g_n\right\|^2 + \left\|g_{n+p}\right\|^2 - 2\left\langle \frac{1}{n}(f_1+\ldots+f_n), \frac{1}{n+p}(f_1+\ldots+f_{n+p})\right\rangle =$$

$$= \|g_n\|^2 + \|g_{n+p}\|^2 - \frac{2}{n(n+p)}\left[n + 2\sum_{k=2}^{n} p_{1,k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} p_{1,k} + 2\sum_{k=3}^{n} p_{2,k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} p_{2,k} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + 2\sum_{k=n}^{n} p_{n-1,k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} p_{n-1,k} + \sum_{k=n+1}^{n+p} p_{n,k}\right] =$$

$$= \|g_n\|^2 + \|g_{n+p}\|^2 - \frac{2}{n(n+p)}\left[n + 2\sum_{k=2}^{n}(s_0+\varepsilon_{1,k}) + \sum_{k=n+1}^{n+p}(s_0+\varepsilon_{1,k}) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + 2\sum_{k=n}^{n}(s_0+\varepsilon_{n-1,k}) + \sum_{k=n+1}^{n+p}(s_0+\varepsilon_{n-1,k}) + \sum_{k=n+1}^{n+p}(s_0+\varepsilon_{n,k})\right] =$$

$$=\left[\left\|g_n\right\|^2+\left\|g_{n+p}\right\|^2-\frac{2}{n(n+p)}\left(n+2\sum_{k=2}^{n}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0\right)\right]-$$

$$-\frac{2}{n(n+p)}\left[2\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_{1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{1,k}+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}\varepsilon_{n-1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{n-1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{n,k}\right].$$

Рассмотрим отдельно выражения, стоящие в квадратных скобках.

Нетрудно видеть, что

$$\left\|g_n\right\|^2+\left\|g_{n+p}\right\|^2-\frac{2}{n(n+p)}\left(n+2\sum_{k=2}^{n}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0+\sum_{k=n+1}^{n+p}s_0\right)=$$

$$=\left\|g_n\right\|^2+\left\|g_{n+p}\right\|^2-\frac{2}{n+p}-\frac{2\left[2s_0(n-1+\ldots+1)+s_0pn\right]}{n(n+p)}=$$

$$=\left\|g_n\right\|^2+\left\|g_{n+p}\right\|^2-\frac{2(n+p-1)s_0}{n+p}=\left\|g_n\right\|^2+\left\|g_{n+p}\right\|^2-2s_0+\frac{2s_0}{n+p}\to 0$$

при $n\to\infty$.

Аналогично, для второй скобки получаем

$$\left|\frac{2}{n(n+p)}\left[2\sum_{k=2}^{n}\varepsilon_{1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{1,k}+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}\varepsilon_{n-1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{n-1,k}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\varepsilon_{n,k}\right]\right|\le$$

$$\le\frac{2}{n(n+p)}\left[2\sum_{k=2}^{n}\left|\varepsilon_{1,k}\right|+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\varepsilon_{1,k}\right|+\ldots+2\sum_{k=n}^{n}\left|\varepsilon_{n-1,k}\right|+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\varepsilon_{n-1,k}\right|+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\varepsilon_{n,k}\right|\right]\le$$

$$\le\frac{4}{n(n+p)}\left(n-1+p+\frac{n-2+p}{2}+\frac{n-3+p}{2^2}+\ldots+\frac{n-(n-1)+p}{2^{n-2}}+\frac{p}{2^{n-1}}\right)\le$$

$$\le\frac{4}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)+\frac{4}{n(n+p)}\left(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n-1}{2^{n-2}}\right)+\frac{4p}{n(n+p)2^{n-1}}\le$$

$$\le\frac{8}{n}+\frac{4}{n+p}+\frac{4}{n}\to 0$$

при любом $p\in\boldsymbol{N}$.

Из этих неравенств следует, что при достаточно больших n $\left\|g_n-g_{n+p}\right\|$ будет сколь угодно мала независимо от p.

Следовательно, последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и, значит, существует $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=y$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|g_n\right\|=\sqrt{s_0}$, то $y\ne 0$. Заметим, что $\tilde{g}_n=\frac{1}{n}(f_{n+1}+\ldots+f_{2n})$ также стремится к y, так как

$$\frac{1}{2n}(f_{n+1}+\ldots+f_{2n})=\frac{1}{2n}(f_1+\ldots+f_n+\ldots+f_{2n})-\frac{1}{2n}(f_1+\ldots+f_n)\to y-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}y.$$

Для решения вопроса о базисности последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ воспользуемся теоремой 2.

В нашем случае $g_n = \frac{1}{n}(f_1 + \ldots + f_n) \in L_n$, а $\tilde{g}_n = \frac{1}{n}(f_{n+1} + \ldots + f_{2n}) \in L^n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{g_n}{\|g_n\|} - \frac{\tilde{g}_n}{\|g_n\|}\right\| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\|g_n\|}\|g_n - \tilde{g}_n\| = \frac{1}{\sqrt{s_0}}\|y - y\| = 0 .$$

Таким образом, последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисной. А поскольку последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является подпоследовательностью $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, то в силу утверждения 1 последовательность $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является базисом в l_2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Christensen O.* An Introduction to Frames and Riesz Bases. Boston.: Birkhäuser, 2003. 440 p.
2. *Гринблюм М.М.* О представлении пространства типа B в виде прямой суммы пространств // ДАН. 1950. Т. 70. № 5. С. 749 – 752.
3. *Бухтина И.П.*, *Хмылева Т.Е.* О некоторой последовательности элементов в гильбертовом пространстве, не являющейся базисом // Вестник Томского госуниверситета. 2007. № 1. С. 58 – 62.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ХМЫЛЁВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru

ИВАНОВА Оксана Геннадьевна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: ivanova453@mail.ru

Статья принята в печать 23.06.2010г.