ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 3(11)

УДК 517.122

Т.Е. Хмылева, А.Е. Кириенко

ЛОКАЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ И ГОМЕОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В работе доказано, что:

1) пространства $C_p(S)$ и $C_p(T)$ всех непрерывных функций в топологии поточечной сходимости не являются линейно гомеоморфными, если S, T – метризуемые не локально компактные пространства, причем производное множество $T^{(1)}$ является компактным, а производное множество $S^{(1)}$ – нет;

2) пространства $C_K(X)$ и $C_K(Y)$ всех непрерывных функций в компактно-открытой топологии не гомеоморфны друг другу, если X и Y являются вполне регулярными пространствами, причем X является локально-компактным и σ-компактным, а в пространстве Y существует точка $y_0 \in Y$ счетного характера и каждая ее окрестность не является псевдокомпактом.

Ключевые слова: *пространства непрерывных функций, линейный гомеоморфизм, гомеоморфизм, метризуемое пространство, локально компактное пространство, топология поточечной сходимости, компактно-открытая топология.*

Все неопределенные в статье понятия можно найти в [1] или [2].

Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются вполне регулярными.

Символом $supp\, g$ обозначается множество $\{t \in Y; g(t) \neq 0\}$ для каждой функции $g : Y \to \boldsymbol{R}$.

Если A – подмножество в пространстве X, то производным множеством множества A называется множество всех предельных точек множества A. Обозначается производное множество $A^{(1)}$.

Если пространство X можно представить в виде счетного объединения компактных подпространств, то X называют σ-компактным. Локально компактное пространство X называется счетным на бесконечности, если представимо в виде $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, где каждое Q_i является компактом и $Q_i \subset \operatorname{int} Q_{i+1}$ для каждого $i \in \boldsymbol{N}$.

Линейное гомеоморфное вложение $T : X \to Y$ называют замкнутым, если множество $T(X)$ замкнуто в Y.

1. О линейной гомеоморфности пространств непрерывных функций с топологией поточечной сходимости на метризуемых не локально компактных пространствах

С.П. Гулько и О.Г. Окунев [3, с. 20] доказали, что свойство локальной компактности сохраняется отношением l-эквивалентности, т. е. из линейной гомео-

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России». Госконтракт П937 от 20 августа 2009 года.

морфности $C_p(X)$ и $C_p(Y$ и локальной компактности пространства X следует локальная компактность пространства Y.

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть S, T – метризуемые не локально компактные пространства, причём производное множество $S^{(1)}$ не является компактом, а $T^{(1)}$ – компакт. Тогда пространства $C_p(S)$ и $C_p(T)$ не являются линейно гомеоморфными.

Рассмотрим основные свойства, которыми обладает пространство S, удовлетворяющее условиям теоремы 1. По условию множество $S^{(1)}$ не является компактом. Это означает, что во множестве $S^{(1)}$ существует замкнутое дискретное подмножество $\{s^i\}_{i=1}^{\infty} \subset S^{(1)}$. Пусть $\{U(s^i, r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность непересекающихся шаров в пространстве S, причем $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 0$. Поскольку последовательность $\{s^i\}_{i=1}^{\infty} \subset S^{(1)}$, то для каждого индекса $i \in \boldsymbol{N}$ существует такая последовательность $\{s_j^i\}_{j=1}^{\infty} \subset S$, что $\lim\limits_{j\to\infty} s_j^i = s^i$ и $\{s_j^i\}_{j=1}^{\infty} \subset U(s^i, r_i)$. Положим $F_i = \{s_j^i\}_{j=1}^{\infty} \bigcup \{s^i\}$ для каждого индекса $i \in \boldsymbol{N}$. Нетрудно видеть, что множество $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ является замкнутым подмножеством в пространстве S.

Символом $C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty})$ будем обозначать множество $\{x \in C_p(F) : x(s^i) = 0$ для всех $i \in \boldsymbol{N}\}$. Если при фиксированном номере $i \in \boldsymbol{N}$ рассматривать множество F_i, то для обозначения множества $\{x \in C_p(F_i) :\ x(s^i) = 0\}$ будем использовать символ $C_p^0(F_i)$.

Так как точки s_j^i являются изолированными в пространстве F, то характеристические функции $\chi_{s_j^i}(t) = \begin{cases} 1, & t = s_j^i \\ 0, & t \neq s_j^i \end{cases}$, которые обозначим e_j^i, принадлежат пространству $C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty})$ для всех $i, j \in \boldsymbol{N}$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть X – топологическое пространство. Пусть $P : C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty}) \to C_p(X)$ – линейное гомеоморфное вложение. Тогда для любой точки $t \in X$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |Pe_j^i(t)|$ сходится для каждого индекса $i \in \boldsymbol{N}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует точка $\tilde{t} \in T$, такая, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} | Pe_j^n(\tilde{t}) | = +\infty$ для некоторого $n \in \boldsymbol{N}$.

Воспользуемся известным фактом: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} | a_m | = +\infty$, то существует бесконечно малая числовая последовательность $\{\alpha_m\}_{m=1}^{\infty}$, такая, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \alpha_m a_m = +\infty$.

Применяя данное утверждение к нашему случаю, получим, что существует бесконечно малая числовая последовательность $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, такая, что $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j Pe_j^n(\tilde{t})=+\infty$ для некоторого $n\in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим частичные суммы $s_{n_0}=\sum_{j=1}^{n_0}\alpha_j e_j^n$ для каждого $n_0\in \boldsymbol{N}$, которые поточечно сходятся к функции $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j^n$ для некоторого $n\in \boldsymbol{N}$. Ясно, что для каждого индекса $n_0\in \boldsymbol{N}$ и некоторого $n\in \boldsymbol{N}$ функции s_{n_0} и $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j^n$ принадлежат пространству $C_p^0(F,\{s^i\}_{i=1}^{\infty})$.

Тогда для некоторого индекса $n\in \boldsymbol{N}$ имеем

$$(P(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j^n))(\tilde{t})=(P(\lim_{n_0\to\infty}s_{n_0}))(\tilde{t})=\lim_{n_0\to\infty}(Ps_{n_0})(\tilde{t})=\lim_{n_0\to\infty}\sum_{j=1}^{n_0}\alpha_j Pe_j^n(\tilde{t})=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j Pe_j^n(\tilde{t})=+\infty.$$

Это противоречит тому, что функция $P(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j^n)\in C_p(X)$. ■

Лемма 2. Пусть $P: C_p^0(F,\{s^i\}_{i=1}^{\infty})\to C_p(T)$ – линейное гомеоморфное вложение. Тогда для любой последовательности $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $k_n\in \boldsymbol{N}$ для каждого $n\in \boldsymbol{N}$, множество $\{n: Pe_{k_n}^n(t)\neq 0\}$ конечно для каждой точки $t\in T$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существуют точка $\tilde{t}\in T$ и последовательность натуральных чисел $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, такие, что множество $\{n: Pe_{k_n}^n(\tilde{t})\neq 0\}$ бесконечно, и без ограничения общности можно считать, что оно совпадает с $\boldsymbol{N}$. Поскольку $Pe_{k_n}^n(\tilde{t})\neq 0$, то можно рассмотреть числа $\alpha_n=\dfrac{1}{Pe_{k_n}^n(\tilde{t})}$ для каждого $n\in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим частичные суммы $s_{n_0}=\sum_{n=1}^{n_0}\alpha_n e_{k_n}^n$ для каждого $n_0\in \boldsymbol{N}$, которые поточечно сходятся к функции $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{k_n}^n$. Ясно, что функции s_{n_0} и $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{k_n}^n$ принадлежат пространству $C_p^0(F,\{s^i\}_{i=1}^{\infty})$ при всех $n_0\in \boldsymbol{N}$.

Тогда для каждого $n_0\in \boldsymbol{N}$ имеем

$$(P(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{k_n}^n))(\tilde{t})=(P(\lim_{n_0\to\infty}s_{n_0}))(\tilde{t})=\lim_{n_0\to\infty}(Ps_{n_0})(\tilde{t})=\lim_{n_0\to\infty}\sum_{n=1}^{n_0}\alpha_n Pe_{k_n}^n(\tilde{t})=\lim_{n_0\to\infty}n_0=\infty.$$

Но это противоречит тому, что $P(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n e_{k_n}^n)\in C_p(T)$. ■

Лемма 3. Пусть $n \in \boldsymbol{N}$ и $P: C_p^0(F_n) \to C_p(T)$ – линейное замкнутое гомеоморфное вложение. Тогда существует точка $t_n \in T^{(1)}$, такая, что для любого $r \in \boldsymbol{R}$ множество $A_{t_n,r}^n = \{j \in \boldsymbol{N} : U(t_n, r) \bigcap supp\, Pe_j^n \neq \phi\}$ бесконечно, где $U(t_n, r)$ – окрестность точки t_n.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть для любой точки $\tilde{t} \in T^{(1)}$ существует окрестность $U(\tilde{t}, r)$, такая, что множество $A_{\tilde{t},r}^n$ конечно. Тогда для любой точки $v \in U(\tilde{t}, r)$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n(v) = \sum_{i=1}^{M} Pe_i^n(v)$ для некоторого $M \in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим частичные суммы $s_{n_0} = \sum_{i=1}^{n_0} e_i^n$, которые принадлежат пространству $C_p^0(F_n)$ для каждого номера $n_0 \in \boldsymbol{N}$. Ясно, что $P(s_{n_0}) = P(\sum_{i=1}^{n_0} e_i^n) = \sum_{i=1}^{n_0} Pe_i^n \in$ $\in P(C_p^0(F_n))$ при всех $n_0 \in \boldsymbol{N}$. По предположению леммы в каждой точке $v \in U(\tilde{t}, r)$ имеет место равенство $\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n(v) = \sum_{i=1}^{M} Pe_i^n(v)$ для некоторого $M \in \boldsymbol{N}$, значит, функция $\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n$ непрерывна в точке $\tilde{t} \in T^{(1)}$. Поскольку точка $\tilde{t} \in T^{(1)}$ была выбрана произвольно, то $\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n \in C_p(T)$. По условию леммы множество $P(C_p^0(F_n))$ замкнуто в $C_p(T)$, поэтому функция $\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n$, которая является поточечным пределом последовательности функций $\{P(s_{n_0})\}_{n_0=1}^{\infty}$, принадлежит пространству $P(C_p^0(F_n))$. Поэтому можно рассмотреть ее прообраз относительно P, и тогда справедливы следующие равенства:

$$P^{-1}(\sum_{i=1}^{\infty} Pe_i^n) = P^{-1}(\lim_{n_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{n_0} Pe_i^n) = P^{-1}(\lim_{n_0 \to \infty} P(\sum_{i=1}^{n_0} e_i^n)) = \lim_{n_0 \to \infty} \left(P^{-1}(P(\sum_{i=1}^{n_0} e_i^n))\right) = \lim_{n_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{n_0} e_i^n.$$

Но функция $\lim_{n_0 \to \infty} \sum_{i=1}^{n_0} e_i^n$ не принадлежит пространству $C_p^0(F_n)$, так как является разрывной в точке s^n. Получили противоречие. ■

Лемма 4. Не существует линейного замкнутого гомеоморфного вложения $P: C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty}) \to C_p(T)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует линейное замкнутое гомеоморфное вложение $P: C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty}) \to C_p(T)$.

Рассмотрим функции $e_m^1 \in C_p^0(F_1)$ для каждого номера $m \in \boldsymbol{N}$. По лемме 3 существует точка $t_1 \in T^{(1)}$, такая, что множество $A_{t_1,1}^1$ бесконечно. Поэтому можно выбрать точку $k_1 \in U(t_1,1)$, такую, что $Pe^1_{j_1}(k_1) \neq 0$ для некоторого $j_1 \in \boldsymbol{N}$. Положим $n_1 = 1$. По лемме 2 найдется номер $n_2 > n_1$, такой, что $Pe^n_j(k_1) = 0$ при $n \geq n_2$ и для любого $j \in \boldsymbol{N}$.

Рассмотрим функции $e^{n_2}_m \in C^0_p(F_{n_2})$ для каждого номера $m \in \boldsymbol{N}$. По лемме 3 существует точка $t_2 \in T^{(1)}$, такая, что множество $A^{n_2}_{t_2,1/2}$ бесконечно. Поэтому можно выбрать точку $k_2 \in U(t_2,1/2)$, такую, что $Pe^{n_2}_{j_{n_2}}(k_2) \neq 0$ для некоторого $j_2 \in \boldsymbol{N}$. По лемме 2 найдется номер $n_3 > n_2$, такой, что $Pe^n_j(k_2) = 0$ при $n \geq n_3$ и для любого $j \in \boldsymbol{N}$.

Продолжая этот процесс, мы получим последовательности точек $t_i \in T^{(1)}$ и $k_i \in U(t_i,1/i)$, такие, что $Pe^{n_i}_{j_{n_i}}(k_i) \neq 0$ для каждого $i \in \boldsymbol{N}$ и $Pe^{n_i}_{j_{n_i}}(k_m) = 0$ для каждого $i > m$.

Поскольку $Pe^1_{j_1}(k_1) \neq 0$, то можно подобрать такой коэффициент α_1, что $\alpha_1 Pe^{n_1}_{j_{n_1}}(k_1) = 1$. Поскольку $Pe^{n_2}_{j_{n_2}}(k_2) \neq 0$, то можно подобрать такой коэффициент α_2, что $\alpha_1 Pe^{n_1}_{j_{n_1}}(k_2) + \alpha_2 Pe^{n_2}_{j_{n_2}}(k_2) = 2$. Продолжая этот процесс, мы получим, что для каждого номера $m \in \boldsymbol{N}$ найдется такой коэффициент α_m, что $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i Pe^{n_i}_{j_{n_i}}(k_m) = m$.

Рассмотрим функцию $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e^{n_i}_{j_{n_i}}$, которая принадлежат пространству $C^0_p(F,\{s^i\}^{\infty}_{i=1})$. Заметим, что производное множество $T^{(1)}$ является компактом и $\{t_i\}^{\infty}_{i=1} \subset T^{(1)}$. Пусть $t_0 \in T^{(1)}$ – предельная точка для последовательности $\{t_i\}^{\infty}_{i=1}$. Тогда в любую окрестность $U(t_0)$ точки t_0 входит бесконечное множество элементов из последовательности $\{t_i\}^{\infty}_{i=1}$. Так как $k_n \in U(t_n,1/n)$, то окрестности $U(t_0)$ будет принадлежать бесконечное множество элементов из последовательности $\{k_n\}^{\infty}_{n=1}$. Тогда в окрестности $U(t_0)$ функция $P(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e^{n_i}_{j_{n_i}}) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i Pe^{n_i}_{j_{n_i}}$ будет неограниченной. Но это противоречит непрерывности функции $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i Pe^{n_i}_{j_{n_i}}$ в точке t_0. Получили противоречие. ■

Доказательство теоремы 1. Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует линейный гомеоморфизм $A: C_p(S) \to C_p(T)$.

Докажем, что существует гомеоморфное вложение $V: C^0_p(F,\{s^i\}^{\infty}_{i=1}) \to C_p(S)$, где пространство $V(C^0_p(F,\{s^i\}^{\infty}_{i=1}))$ замкнуто в $C_p(S)$. Пусть $U(s^i_j,\varepsilon^i_j) \subset U(s^i,r_i)$

– непересекающиеся окрестности точек s_j^i для всех $i, j \in \boldsymbol{N}$, причем $\lim\limits_{j\to\infty} \varepsilon_j^i = 0$ для каждого $i \in \boldsymbol{N}$. Рассмотрим функции $x_j^i \in C_p(S)$, удовлетворяющие равенству $x_j^i(t) = \begin{cases} 1, & t = s_j^i \\ 0, & t \neq s_j^i \end{cases}$, такие, что $supp\, x_j^i \subset U(s_j^i, \varepsilon_j^i)$ для всех $i, j \in \boldsymbol{N}$. Пусть $x \in C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty})$. Тогда требуемое гомеоморфное вложение $V : C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty}) \to C_p(S)$ задается формулой $(Vx)(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} x(s_j^i)x_j^i(t)$ для каждой точки $t \in S$ и для каждого индекса $i \in \boldsymbol{N}$.

Тогда $P = A \circ V$ является линейным замкнутым гомеоморфным вложением пространства $C_p^0(F, \{s^i\}_{i=1}^{\infty})$ в $C_p(T)$, что противоречит лемме 4. Значит, пространства $C_p(S)$ и $C_p(T)$ не являются линейно гомеоморфными. ■

Замечание. Аналогично теореме 1, используя леммы 1 – 3, можно доказать, что пространства $C_p(S)$ и $C_p(T)$ не являются линейно гомеоморфными, если S, T – метризуемые пространства, причем S не является локально компактным, а T – локально компактное и счетное на бесконечности.

2. О гомеоморфности пространств непрерывных функций с компактно-открытой топологией

Символом $C_K(X)$ обозначается пространство непрерывных вещественнозначных функций с компактно-открытой топологией, заданных на вполне регулярном пространстве X. Базу открытых окрестностей произвольной функции $f \in C_K(X)$ образуют множества вида $W(f, K, \varepsilon) = \{g \in C(X) : |f(x) - g(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in K\}$ для любого компактного множества $K \subset X$ и произвольного $\varepsilon > 0$.

Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 5. Пусть пространство X является локально компактным и $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i$, где каждое Q_i является компактом, $Q_i \subset \operatorname{int} Q_{i+1}$ для каждого $i \in \boldsymbol{N}$. Тогда пространство $C_K(X)$ метризуемо полной метрикой

$$\rho(f, g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\max\limits_{t \in Q_i} |f(t) - g(t)|}{1 + \max\limits_{t \in Q_i} |f(t) - g(t)|}. \ ■$$

Лемма 6. Если пространство X является локально компактным и σ-компактным, то оно счетно на бесконечности.

Доказательство непосредственно следует из определения σ-компактности пространства X. ■

Докажем основную теорему данного параграфа.

Теорема 2. Пусть X, Y – вполне регулярные пространства. Пусть, кроме того, X является локально-компактным и σ-компактным, а в пространстве Y существует точка $y_0 \in Y$ счетного характера, такая, что каждая ее окрестность не является псевдокомпактом. Тогда пространство $C_K(X)$ не гомеоморфно $C_K(Y)$.

Доказательство. По условию теоремы 2 пространство X является локально компактным и σ-компактным, а значит, по лемме 6 X – счетно на бесконечности. Тогда по лемме 5 пространство $C_K(X)$ метризуемо полной метрикой, а следовательно, по теореме Бэра о категориях не представимо в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

Предположим, что пространства $C_K(X)$ и $C_K(Y)$ гомеоморфны. Тогда пространство $C_K(Y)$ также нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств. Покажем, что это не так.

Поскольку точка $y_0 \in Y$ имеет счетный характер, то можно зафиксировать $\{U_n : n \in \boldsymbol{N}\}$ – убывающую фундаментальную систему окрестностей точки y_0. По условию теоремы каждая окрестность U_n, $n \in \boldsymbol{N}$, не является псевдокомпактом, поэтому для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ можно выбрать замкнутое в Y бесконечное дискретное множество $D_n \subset U_n$. Выберем множества D_n так, чтобы они образовывали дизъюнктную систему. Нетрудно видеть, что множество $D = \coprod_{n=1}^{\infty} D_n \cup \{y_0\}$ замкнуто в Y.

Рассмотрим для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ множество $F_n = \{f \in C_K(Y) : f(\coprod_{k=n}^{\infty} D_k \cup \{y_0\}) \subset [-n, n]\}$. Покажем, что $C_K(Y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Пусть $f \in C_K(Y)$ и $a = |f(y_0)|$. Пусть $n_0 \in \boldsymbol{N}$ таково, что $n_0 > a$. Функция f непрерывна в точке y_0, следовательно, найдется такая окрестность U_{m_0} точки y_0, что $|f(t)| < n_0$ для каждой точки $t \in U_{m_0}$. Тогда $f(\coprod_{k=m_0}^{\infty} D_k \cup \{y_0\}) \subset [-n_0, n_0]$. Ясно, что при $n_0 \le m_0$ выполнено $f(\coprod_{k=m_0}^{\infty} D_k \cup \{y_0\}) \subset [-n_0, n_0] \subset [-m_0, m_0]$, т.е. $f \in F_{m_0}$. Если же $n_0 > m_0$, то справедливо включение $\coprod_{k=n_0}^{\infty} D_k \subset \coprod_{k=m_0}^{\infty} D_k$. Значит, $f(\coprod_{k=n_0}^{\infty} D_k \cup \{y_0\}) \subset f(\coprod_{k=m_0}^{\infty} D_k \cup \{y_0\}) \subset [-n_0, n_0]$, т. е. $f \in F_{n_0}$.

Теперь проверим, что каждое множество F_n, $n \in \boldsymbol{N}$, нигде не плотно в $C_K(Y)$. Нетрудно видеть, что эти множества замкнуты, и поэтому остается доказать, что их внутренности пусты. Пусть $g \in C_K(Y)$ – произвольная функция, а $W(g, Q, \varepsilon)$ – произвольная стандартная окрестность функции g. Ясно, что для каждого $n \in \boldsymbol{N}$ пересечение $Q \cap D_n$ конечно, следовательно, найдется точка $t_0 \in D_n \setminus Q$. Обозначим $Q' = \{t_0\} \cup Q$. Зададим функцию $g' \in C_K(Q')$ по формуле $g'(t) = \begin{cases} g(t), & t \in Q \\ n+1, & t = t_0 \end{cases}$. Заметим, что вполне регулярное пространство Y вложимо в тихоновский куб, который является нормальным пространством. Значит, по теореме Титце – Урысона существует непрерывное продолжение $\tilde{g}'$ функции g' с компакта Q' на тихоновский куб. Тогда $\tilde{g}' \in W(g, Q, \varepsilon) \setminus F_n$. Итак, множества F_n для всех $n \in \boldsymbol{N}$ нигде не плотны в $C_K(Y)$ и $C_K(Y) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Значит, $C_K(Y)$ является множеством первой категории, следовательно, оно не будет являться полным метризуемым пространством. Получили противоречие. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.
2. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: МГУ, 1989. 222 с.
3. *Гулько С.П.*, *Окунев О.Г.* Локальная компактность и М-эквивалентность // Вопросы геометрии и топологии. Петрозаводск, 1986. С. 14 – 23.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ХМЫЛЁВА Татьяна Евгеньевна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теории функций механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: vestnik_tgu_mm@math.tsu.ru
КИРИЕНКО Анна Евгеньевна – студентка механико-математического факультета Томского государственного университета. E-mail: kirienko7@sibmail.com

Статья принята в печать 21.06.2010 г.