ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Математика и механика № 3(11)

УДК 532.529

Н.Н.Дьяченко, Л.И.Дьяченко

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИДИСПЕСНОГО АНСАМБЛЯ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В УСКОРЯЮЩИХСЯ ПОТОКАХ

В статье представлена статистическая модель течения смеси газ – полидисперсный ансамбль твердых частиц. Перераспределение импульса и энергии частиц внутри фракции учитываются через энергию их пульсационного движения.

Ключевые слова: *математическое моделирование*, *уравнение переноса*, *признак частицы*, *статистическое осреднение*, *дискретная фаза.*

Течение гетерогенной среды в работе [1] трактуется как движение взаимопроникаемых континуумов. Заложенный в этой работе подход описания многофазных потоков прослеживается во многих последующих публикациях. Наиболее полную библиографию работ по исследованию двухфазных течений можно найти в обзорах [2, 3] и монографиях [4 – 6]. В большинстве работ по газодинамике двухфазных сред система уравнений, описывающая дискретную фазу, базируется на одномерной функции распределения частиц по размерам. Так как движение частиц сопровождается их столкновением, то необходимо учитывать перераспределение импульса, энергии внутри дискретной фазы. Точная постановка задачи течения смеси газ – полидисперсный ансамбль твердых или жидких частиц требует применения многомерной функции распределения частиц по параметрам. В работе [7] для ансамбля жидких частиц получено уравнение переноса признака частиц, аналогичное уравнению Максвелла – Энского для кинетической теории газа [8]. Это уравнение является основой для составления системы моментных уравнений, которая описывает поведение ансамбля частиц. Разработанная модель нашла применение при расчете двухфазного течения в соплах РДТТ- и МГД-каналах [9, 10]. Статистические методы описания смеси газ – твердые частицы использованы в работах [11 – 14]. Авторы работы [15] записали уравнение больцмановского типа относительно одночастичной функции распределения и решили задачу обтекания тел, запыленных газом.

Целью данной работы является разработка статистической модели течения смеси газ – полидисперсный ансамбль твердых частиц с использованием двумерной функции распределения частиц по массе и скорости.

1. Моделирование дисперсной среды

Для описания полидисперсного ансамбля твердых частиц в многомерном фазовом пространстве введем функцию распределения $f_i = f(m_i, \boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{r}, t)$, где $m_i, \boldsymbol{U}_i$ – масса, скорость; $\boldsymbol{r}, t$ – пространственная и временная координаты; i – номер фракции. Кинетическое уравнение для функции распределения запишем в виде

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \boldsymbol{U}_i \nabla_{\boldsymbol{r}} f + \nabla_{\boldsymbol{U}} \frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} f_i = I \,. \qquad (1.1)$$

Здесь $\boldsymbol{F}_i$ – сила, действующая на частицу со стороны несущей среды; $\nabla_{\boldsymbol{r}}, \nabla_{\boldsymbol{U}}$ – операторы градиента в физическом и скоростном пространствах; I – интеграл столкновения.

Рассмотрим уравнение (1.1) при фиксированном значении массы m_i, которая входит в него как параметр. Индивидуальную скорость частицы можно представить в виде суммы средней $\boldsymbol{U}_{0i}$ и пульсационной составляющей $\boldsymbol{U}'_i$ скорости частиц массой m_i: $\boldsymbol{U}_i = \boldsymbol{U}_{0i} + \boldsymbol{U}'_i$.

Уравнение (1.1) в новых переменных $\boldsymbol{U}'$ запишем в виде

$$\frac{df_i}{dt} + \boldsymbol{U}'_i \nabla_{\boldsymbol{r}} f_i - \frac{d\boldsymbol{U}_{0i}}{dt} \nabla_{\boldsymbol{U}'} f_i - \boldsymbol{U}'_i \nabla_{\boldsymbol{U}} f_i : \nabla_{\boldsymbol{U}} \left(\frac{\boldsymbol{F}_i}{m_i} f_i \right) = I , \tag{1.2}$$

где $\nabla_{\boldsymbol{U}'}$ – оператор градиента в пространстве пульсационных скоростей; (:) – двойное тензорное умножение; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{U}_{0i} \nabla_{\boldsymbol{r}}$.

Для получения системы уравнений, описывающей течение полидисперсной среды, вводится понятие признака частиц. Признаком может быть любая величина, характеризующая частицу и переносимая вместе с ней $\Phi_i = \Phi(m_i, \boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{r}, t)$. Среднее значение признака частиц $<\Phi>$ по ансамблю частиц с массами $(m_i, m_i + dm_i)$ определим равенством

$$\langle \Phi(m) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i f_i d\boldsymbol{U}_i \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f_i d\boldsymbol{U}_i$$

Умножая кинетическое уравнение (1.2) на признак Φ_i и интегрируя по всему пространству скоростей, получим уравнение переноса признака частиц:

$$\frac{d}{dt}\left(f(m_i) \langle \Phi(m_i) \rangle \right) + f(m_i) \langle \Phi(m_i) \rangle \nabla_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{U}_{0i} + \nabla_{\boldsymbol{r}} \left(f(m_i) \langle \Phi(m_i) \boldsymbol{U}'_i \rangle \right) - f(m_i) [\frac{d\Phi(m_i)}{dt} +$$

$$+ \langle \boldsymbol{U}'_i \nabla_{\boldsymbol{r}} \Phi(m_i) \rangle + \left(\frac{\langle \boldsymbol{F}_i \rangle}{m_i} - \frac{d\boldsymbol{U}_{0i}}{dt} \right) \langle \nabla_{\boldsymbol{U}} \Phi(m_i) \boldsymbol{U}_i' \rangle : \nabla_{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{U}_{0i}] = \Delta \langle \Phi(m_i) \rangle . \tag{1.3}$$

Здесь $f(m_i) = f(m_i, \boldsymbol{r}, t)$ отражает переход от двухмерной функции (распределение по скоростям и массам) к одномерной (распределение по массам); $<\cdots>$ – знак осреднения.

Интеграл $\Delta \langle \Phi(m_i) \rangle = \int_{U'} \Phi I d\boldsymbol{U}'$ представляет собой выражение для скорости изменения признака Φ частиц массой m_i за счет столкновений.

Подставив в уравнение (1.3) в качестве признака частиц моменты скорости $(\boldsymbol{U}', \boldsymbol{U}'\boldsymbol{U}', ...)$, получим систему моментных уравнений, которая будет описывать ансамбль частиц, имеющих распределение по массам и скоростям.

2. Столкновение частиц

Для определения интеграла столкновений в уравнении (1.2) и скорости изменения признака частиц в уравнении (1.3) рассмотрим столкновение двух шарообразных частиц, масса которых m_i и m_j. Согласно работе [16], скорости частиц после столкновения в лабораторной системе отсчёта запишем

$$\boldsymbol{U}^*_i = \frac{m_j}{m_i+m_j}V\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_i\boldsymbol{U}_i + m_j\boldsymbol{U}_j}{m_i+m_j}; \quad \boldsymbol{U}^*_j = \frac{m_i}{m_i+m_j}V\boldsymbol{n}_0 + \frac{m_i\boldsymbol{U}_i + m_j\boldsymbol{U}_j}{m_i+m_j},$$

где $\boldsymbol{U}_i, \boldsymbol{U}_j$ – скорости частиц до столкновения; $V = \left|\boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{U}_j\right|$ – скорость частицы m_i относительно m_j; $\dfrac{m_i\boldsymbol{U}_i + m_j\boldsymbol{U}_j}{m_i+m_j} = \boldsymbol{V}_{\text{ц}}$ – скорость центра масс; $\boldsymbol{n}_0$ – единичный вектор в направлении скорости частицы m_i после столкновения.

Так как рассматривается столкновение твердых частиц применительно к двухфазным потокам, то более удобно ввести угол рассеяния φ (угол поворота частицы m_i в системе центра инерции). Для простоты рассмотрим одномерный случай, тогда проекции скоростей на ось X можно записать в виде

$$\begin{aligned} U^*_i &= [m_j^2V^2 + (m_iU_i + m_jU_j)^2 + 2m_j(m_iU_i + m_jU_j)V\cos\varphi]^{1/2}/(m_i+m_j) \\ U^*_j &= [m_i^2V^2 + (m_iU_i + m_jU_j)^2 - 2m_i(m_iU_i + m_jU_j)V\cos\varphi]^{1/2}/(m_i+m_j) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Соотношение (2.1) соответствует упругим столкновениям. Введем коэффициент восстановления K, равный $K = (U^*_j - U^*_i)/(U_i - U_j)$, и запишем (2.1) в виде

$$\begin{aligned} U^*_i &= \left\{[m_jVK + (m_iU_i + m_jU_j)]^2 - 4m_j(m_iU_i + m_jU_j)VK\sin^2\frac{\varphi}{2}\right\}^{1/2}/(m_i+m_j); \\ U^*_j &= \left\{[m_iVK - (m_iU_i + m_jU_j)]^2 + 4m_i(m_iU_i + m_jU_j)VK\sin^2\frac{\varphi}{2}]\right\}^{1/2}/(m_i+m_j). \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Изменение кинетической энергии сталкивающихся частиц m_i и m_j определим как

$$\begin{aligned} \Delta E_i &= -2mV_{ль}VK\sin^2\varphi/2 + \frac{m_im_j^2}{2(m_i+m_j)^2}V^2K^2 + \frac{m_i}{2}V_ц^2 + mV_цVK - \frac{m_i}{2}U_i^2; \\ \Delta E_j &= -2mV_цVK\sin^2\varphi/2 + \frac{m_i^2m_j}{2(m_i+m_j)^2}V^2K^2 + \frac{m_j}{2}V_ц^2 + mV_цVK - \frac{m_j}{2}U_j^2, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

где $m = m_im_j/(m_i+m_j)$ – приведенная масса.

Следовательно, изменение кинетической энергии частиц m_i и m_j за счёт их взаимного столкновения равно

$$\Delta E = \Delta E_i + \Delta E_j = -\frac{m}{2}V^2(1-K^2). \qquad (2.4)$$

Это диссипативная часть энергии. При $K = 1$, $\Delta E = 0$ – случай упругого столкновения, при $K = 0$, $\Delta E = -\dfrac{m}{2}V^2$ – случай, предусматривающий коагуляцию жидких частиц.

3. Статистика столкновений.

Частица m_i столкнувшись с частицей m_j «рассеется» в заданный интервал углов $\varphi, \varphi + d\varphi$, если она находится в определенном интервале прицельного расстояния. Введем эффективное сечение рассеяния, выражение которого имеет вид

$$d\sigma = \frac{\pi}{2}(r_i + r_j)^2 \sin\varphi \;\; d\varphi \, .$$

Интегрируя по всем углам, найдем, что полное сечение рассеяния $\sigma = \pi(r_i + r_j)^2$.

Частица массы m_i в единицу времени столкнётся с частицей m_j, если эти частицы находятся в объёме $d\tau = d\sigma\left|U_i - U_j\right|$. Число столкновений, определенных промежутком масс $[m_i, m_i + dm_i],[m_j, m_j + dm_j]$ и скоростей $[U_i, U_i + dU_i]$, $[U_j, U_j + dU_j]$, равняется

$$\frac{\pi}{2}(r_i + r_j)^2 \left|U_i - U_j\right| \sin\varphi d\varphi f(m_i, U_i, x_i, t) f(m_j, U_j, x_j, t) dm_i dU_i dm_j dU_j \, . \qquad (2.5)$$

Для частиц i-й фракции, с использованием соотношений (2.2) и (2.5), изменение импульса за счёт столкновений со всевозможными частицами можно записать в виде

$$\begin{aligned}\Delta(m_i f(m_i, U_i, x, t)U_i) = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (mVK\cos\varphi - mV)\frac{\pi}{2}(r_i + r_j)^2 \times \\ \times \sin\varphi \left|U_i - U_j\right| f(m_i, U_i, x, t) f(m_j, U_j, x, t) d\varphi dU_j dm_j.\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Здесь индекс «j» относится не к фиксированной частице, а ко всему ряду рассматриваемых частиц.

Как и раньше, представим скорость частиц в виде суммы средней и пульсационной составляющих, проинтегрируем соотношение (2.6) по всем скоростям и углам рассеивания, в результате изменение импульса для частиц i-й фракции запишем как

$$\Delta(m_i f(m_i, U_i, x, t)U_i) \cong -\int_0^\infty mV_0 k_{ij} f(m_i) f(m_j) dm_j \, . \qquad (2.7)$$

Здесь $k_{ij} = \pi(r_i + r_j)^2 \left|U_{0i} - U_{0j}\right| + 4\pi r_i^2 \sqrt{\langle U'_i U'_i \rangle}$ – последний член учитывает столкновение частиц внутри фракции.

Изменение кинетической энергии частиц i-й фракции за счёт столкновения их с остальными частицами рассматриваемого ансамбля запишем следующим образом:

$$\Delta(m_i f(m_i, U_i, x, t)U_i^2 / 2) \cong -\int_0^\infty [mV_0 V_{0ц} + \frac{m}{2} V_0{}^2 (1 - K^2)] k_{ij} f(m_i) f(m_j) dm_j \qquad (2.8)$$

здесь $V_0 = \left|U_{0i} - U_{0j}\right|$; $V_{0ц} = \dfrac{m_i U_{0i} + m_j U_{0j}}{m_i + m_j}$.

Таким образом, подставляя соответствующий признак частицы в уравнение переноса (1.3), записывая интегралы столкновений в виде (2.7), (2.8) и задав силу F_i, получим систему уравнений, которая описывает макроскопические свойства и поведение ансамбля твердых частиц. Система уравнений для несущей среды не приводится, так как она определяется условиями решаемой задачи.

Заключение

Предлагаемая математическая модель может быть использована при рассмотрении двухфазных течений, в которых дискретная фаза является разряженной, т.е. учитывается только парные столкновения. Вопрос ограничения цепочки моментных уравнений решается исходя из конкретной физической задачи. Так, при рассмотрении течения продуктов сгорания металлизированных топлив в плазмотронах, МГД-генераторах и ракетных двигателях как для жидких, так и для твердых частиц оксидов металлических присадок достаточно использовать моменты второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рахматулин Х.А.* Основы гидродинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред // ПММ. 1956. Т. 20. № 2. С.184 – 195.
2. *Крайко А.Н.*, *Нигматуллин Р.И.*, *Старков В.К.*, *Стернин Л.Е.* Механика многофазных сред // Итоги науки и техн. Гидромеханика. Т. 6. М.: Изд. ВИНИТИ, 1972. С. 93 – 174.
3. *Шрайбер А.А.* Многофазные полидисперсные течения с переменным фракционным составом дискретных включений // Итоги науки и техн. Комплексные и специальные разделы механики. Т. 3. М.: Изд. ВИНИТИ, 1988. С. 3 – 80.
4. *Шрайбер А.А.*, *Милюшин В.Н.*, *Яценко В.П.* Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твёрдым полидисперсным веществом. Киев: Наукова думка, 1980. 252 с.
5. *Васенин И.М. Архипов В.А.*, *Бутов В.Г. и др.* Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1986. 262 с.
6. *Стернин Л.Е.*, *Шрайбер А.А.* Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
7. *Бутов В.Г.*, *Васенин И.М.*, *Дьяченко Н.Н.* Модель движения полидисперсного конденсата с учётом случайных пульсаций скорости и температуры коагулирующих частиц // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 33 – 39.
8. *Ферцигер Дж.*, *Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
9. *Дьяченко Н.Н.*, *Дьяченко Л.И.* Математическое моделирование течения двухфазных сред с учётом распределения коагулирующих частиц по импульсам // Теплофизика и аэромеханика. 1995. Т. 2. № 1. С. 67 – 74.
10. *Васенин И.М.*, *Дьяченко Н.Н.*, *Дьяченко Л.И.* Кинетический подход моделирования течения газо-капельной среды // Известия Томского политехнического университета. 2002. Т. 305. Вып. 3. С. 336 – 371.
11. *Буевич Ю.А.* Приближенная статистическая теория взвешенного слоя // ПМТФ. 1966. № 6. С. 35 – 47
12. *Pai S.I.* fundamental equations of mixture of gas and small spherical particles from simple kinetic theory // Rev. Roum. Sci. Techn. Ser. Mec. Appl. 1974. V. 19. No. 4. P. 605 – 626.
13. *Матвеев С.К.* Модель газа из твердых частиц с учетом неупругих соударений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 12 – 16.
14. *Мясников В.П.* Статистическая модель механического поведения дисперсных систем // Механика многокомпонентных сред в технологических процессах. М.: Наука, 1978. С. 70 – 101.
15. *Волнов А.Н.*, *Цириупов Ю.М.* Кинетическая модель столкновения примеси в запыленном газе и ее применение к расчету обтекания тел // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 3. С. 81 – 97
16. *Ландау Л.Д.*, *Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Наука, 1973. 204 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

ДЬЯЧЕНКО Николай Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: d10@ftf.tsu.ru

ДЬЯЧЕНКО Людмила Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной аэромеханики Томского государственного университета. E-mail: d10@ftf.tsu.ru

Статья принята в печать 01.06.2010 г.