УДК 517.54

А.Н. Малютина, М.А. Елизарова

О СВЯЗИ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ С *S*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ С НЕКОТОРЫМИ КЛАССАМИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

В настоящей работе исследуются условия, при которых возможны вложения классов и подклассов отображений с s-усредненной характеристикой в некоторые другие классы пространственных отображений и наоборот. Полученные вложения дают возможность распространить свойства хорошо изученных классов отображений, например классов отображений с искажением, ограниченным в среднем и других, на классы отображений s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: *отображения с s-усредненной характеристикой, отображения с искажением, ограниченным в среднем, вложение, отображения с ограниченным интегралом Дирихле, класс BL^p, пространственные отображения.*

Пусть D – область в $\mathbf{R}^n$, $n \ge 3$ и отображение $f : D \to \mathbf{R}^n$ – открытое, непрерывное, изолированное, $f \in \tilde{W}^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$. Можно считать, что якобиан отображения $J(x,f)$ сохраняет знак почти всюду в D (для определенности возьмем $J(x,f) > 0$).

Известно (см. напр. [1, 2]), что для отображения $f \in \tilde{W}^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$ определены следующие величины – характеристики отображения f: $K_{\mathrm{I}}(x,f)$ – внутренняя дилатация, $K_{\mathrm{O}}(x,f)$ – внешняя дилатация, $\lambda(x,f)$, а также выполнены неравенства, связывающие эти характеристики между собой. Ниже приведем неравенство, используемое при доказательстве результатов данной работы:

$$K_{\mathrm{O}}(x,f) \le n^{\frac{n}{2}}\lambda(x,f) \le n^{\frac{n}{2}} K_{\mathrm{O}}(x,f) \le n^{\frac{n}{2}} K_{\mathrm{I}}(x,f)^{n-1}, \tag{1}$$

где

$$\lambda(x,f) = n^{\frac{-n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}. \tag{2}$$

Для отображений с s-усредненной характеристикой [3] можно ввести и рассматривать классы таких отображений, изучать связь этих классов с другими классами пространственных отображений, например с классами отображений с ограниченным в среднем искажением Q_s, Q_s^* [4, 5]. В работе [6] показано, что класс исследуемых отображений не пуст.

[1] Работа (частично) профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 и по контракту П937 по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы».

Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – произвольные области, $f: D \to D'$ – отображение с $K_{O,S}$, $K_{I,S}$, $K^*_{O,S}$ или с $K^*_{I,S}$-усредненной характеристикой, $s > 1/(n-1)$.

Определение 1. Будем говорить, что отображение f с $K_{O,S}$ и $K_{I,S}$-усредненными характеристиками принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}_{s,K}$, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_{s,K}$, если выполнено $\left(\int\limits_D K_O^s(x,f)d\sigma_x\right)^{1/s} \le K_{O,S} < K$ (соответственно $\left(\int\limits_D K_I^s(x,f)d\sigma_x\right)^{1/s} \le K_{I,S} < K$), где $d\sigma_x = \dfrac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}$.

Отображение $f: D \to D'$ принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}_s$ в D, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s$, если $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_{s,K}$ для некоторого $K < \infty$.

Определение 2. Будем говорить, что отображение f с $K^*_{O,S}$ и $K^*_{I,S}$-усредненными характеристиками принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}^*_{s,K}$, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}^*_{s,K}$, если выполнено $\left(\int\limits_D K_O^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{1/s} \le K^*_{O,S} < K$ (соответственно $\left(\int\limits_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{1/s} \le K^*_{I,S} < K$).

Отображение $f: D \to D'$ принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}^*_s$ в D, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}^*_s$, если $f \in \tilde{\mathbf{Q}}^*_{s,K}$ для некоторого $K < \infty$.

Заметим, что в силу неравенства (1) к классам отображений $\tilde{\mathbf{Q}}_s$ и $\tilde{\mathbf{Q}}^*_{s,k}$ также относятся отображения f, для которых выполнено $\left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)\,d\sigma_x\right)^{1/s} \le K$ и $\left(\int\limits_D \lambda^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{1/s} \le K$ соответственно для некоторого $K < \infty$. Поэтому при проведении доказательств нам достаточно рассмотреть отображение с какой-нибудь одной из приведенных выше характеристик, составляющих исследуемый класс.

Заметим также, что для величины $d\sigma_x = dx/(1+|x|^2)^n$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\mathbf{R^n}} d\sigma_x = \int\limits_{\mathbf{R^n}} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n} \le \frac{\pi^n}{n} < \infty \tag{3}$$

для любого $x \in D$.

Покажем, что для отображений с s-усредненной характеристикой имеет место монотонность $\tilde{\mathbf{Q}}_s$ по s.

Предложение 1. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области, $f: D \to D'$, $s < s'$. Тогда имеет место вложение $\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$.

Доказательство. Применяя к отображению с $K_{O,S}$-усредненной характеристикой неравенство Гельдера с показателями $p=s'/s$ и $q=s'/(s'-s)$, $p>1$, имеем

$$\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x = \int_D K_O^s(x,f)\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{n+\frac{n(s-s')}{s'}-\frac{n(s-s')}{s'}}} =$$

$$= \int_D \frac{K_O^s(x,f)}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{ns}{s'}}}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n(s'-s)}{s'}}} \le \left(\int_D K_O^{s'}(x,f)d\sigma_x\right)^{s/s'} \cdot \left(\int_D \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{s'-s}{s'}}$$

и, в силу неравенства (3), получаем неравенство

$$\left(\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x\right)^{1/s} \le \left(\frac{\pi^n}{n}\right)^{\frac{s'-s}{ss'}} \left(\int_D K_O^{s'}(x,f)d\sigma_x\right)^{1/s'},$$

которое доказывает требуемое вложение.

Аналогично получаем неравенство для отображений с $K_{I,S}$-усредненной характеристикой.

Пусть $A\subset D$ – открытое множество. Для $x\in A$ обозначим через кратность $N(y,f,A)$, как и в [7], число точек из $A\cap f^{-1}(y)$ и положим, что $N(f,A)=\sup N(y,f,A)$ по всем $y\in \mathbf{R}^n$.

Предложение 2. Пусть $D,D'\subset \mathbf{R}^n$ – области, мера Лебега области D' конечна, $m(D')<\infty$. Пусть $f\colon D\to D'$ такое, что кратность отображения $N(f,D)<N<\infty$. Пусть $s<s'$. Тогда имеет место вложение $\tilde{\mathbf{Q}}^*_{s'}\subset \tilde{\mathbf{Q}}^*_s$.

Доказательство. По определению отображения f имеем

$$J=\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x = \int_D \frac{K_I^s(x,f)}{|J(x,f)|^{-s/s'}}|J(x,f)|^{(s'-s)/s'}\,d\sigma_x.$$

Применяя, как и выше, неравенство Гельдера, теорему 2.2 [8], получаем

$$J\le \left(\int_D K_I^{s'}(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{s/s'} \left(\int_D |J(x,f)|\,dx\right)^{(s'-s)/s'} \le$$

$$\le \left(\int_D K_I^{s'}(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{s/s'} \left(N\int_{D'} dy\right)^{(s'-s)/s'},$$

что дает неравенство

$$\left(\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(m(D')\cdot N\right)^{\frac{s'-s}{ss'}} \left(\int_D K_I^{s'}(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s'}},$$

которое доказывает данное вложение.

Доказательство для отображения с $K^*_{O,S}$-усредненной характеристикой проводится аналогично.

Определение 3. Пусть $f : D \to D'$ – открытое, непрерывное, изолированное отображение, $f \in W^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, $f \in \tilde{W}^1_{n,\,\mathrm{loc}}(D)$, $J(x,f) > 0$ почти всюду в D. Если существует постоянная $Q_{s,k} > 0$, такая, что для любой точки $y \in D$, $s > 1/(n-1)$ выполнено неравенство

$$Q_{s,k}(f) = \left(\int_D \lambda^s(x,f) k^{s+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \le Q_{s,k} < \infty ,$$

где функция $k(t)$ определена при $t > 0$, конечна, неотрицательна, непрерывна, не возрастает, $\lim\limits_{t\to 0+} k(t) = +\infty$ и $\int\limits_0^1 k(t)\cdot t^{-\alpha} dt < \infty$, $\alpha > 0$, то f называется отображением с $Q_{s,k}$-усредненной характеристикой.

Через $\tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$ обозначим класс таких отображений.

Предложение 3. Пусть $s < s'$ и ядро $k(t)$ удовлетворяет в области D условию $\int\limits_D k^{\frac{(s+1)s'}{s'-s}}(|x-y|)\, dx < \infty$ для любого $y \in D$. Тогда $\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$.

Доказательство. Как и в предыдущих предложениях, применим к интегралу

$$J = \int_D \lambda^s(x,f)\cdot k^{s+1}(|x-y|)\, d\sigma_x$$

неравенство Гельдера с показателями $p = s'/s$ и $q = s'/(s'-s)$

$$J \le \left(\int_D \lambda^{s'}(x,f)\, d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s'}} \left(\int_D k^{\frac{(s+1)s'}{s'-s}}(|x-y|)\, dx \right)^{\frac{s'-s}{s'}} .$$

Тогда, согласно условию, а также в силу (1), получаем неравенство

$$\left(\int_D \lambda^s(x,f) k^{s+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \le C^{\frac{s'-s}{s's}} \left(\int_D K_O^{s'}(x,f)\, d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s'}},$$

которое и доказывает наше предложение.

Предложение 4. Пусть $s < s'$ и $\int\limits_D k(|x-y|)\, dx < \infty$ для любого $y \in D$. Тогда $\tilde{\mathbf{Q}}_{s'}(k) \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$.

Доказательство. Для $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$ имеем

$$J = \int_D \lambda^s(x,f) k^{s+1}(|x-y|)\, d\sigma_x = \int_D \lambda^s k^{\frac{(s'+1)s}{s'}}(|x-y|)\, k^{\frac{s'-s}{s'}}(|x-y|)\, d\sigma_x .$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями $p = s'/s$ и $q = s'/(s'-s)$:

$$J \le \left(\int_D \lambda^{s'}(x,f) k^{s'+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s'}} \left(\int_D k(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{\frac{s'-s}{s'}} ,$$

получаем, что

$$J \le \left(\int_D \lambda^{s'}(x,f) k^{s'+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{\frac{s}{s'}} \left(\int_D k(|x-y|)\, dx \right)^{\frac{s'-s}{s'}} .$$

И, наконец, условие $\int_D k(|x-y|)\,dx = C < \infty$ для любого $y \in D$, дает

$$\left(\int_D \lambda^{s}(x,f) k^{s+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{1/s} \le C^{\frac{s'-s}{s'}} \left(\int_D \lambda^{s'}(x,f) k^{s'+1}(|x-y|)\, d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s'}},$$

т.е. требуемое вложение.

Представим полученные результаты в виде таблицы.

Здесь, если не оговорено особо, $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – произвольные области, $s > 1/(n–1)$ и $s' > s$.

Таблица 1

	$s' > s$	*Дополнительные условия*
1.	$\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$	–
2.	$\tilde{\mathbf{Q}}^*_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}^*_s$	$m(D') < \infty$
3.	$\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$	$\int_D k^{(s'+1)s/(s'-s)}(\|x-y\|)\,dx < \infty$
4.	$\tilde{\mathbf{Q}}_{s'}(k) \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s(k)$	$\int_D k(\|x-y\|)\,dx < \infty$

В работе [5] найдены условия, при которых имеют место вложения классов отображений с искажением, ограниченным в среднем, заданных на ограниченной области $D \subset \mathbf{R}^n$ в классы отображений с ограниченным интегралом Дирихле и наоборот. Найдем условия, при которых из ограниченности интеграла Дирихле отображения f следует, что f является отображением с s-усредненной характеристикой и наоборот.

Определим подклассы отображений с s-усредненной характеристикой.

Определение 4. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области, $f: D \to D'$, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s$, (или $f \in \tilde{\mathbf{Q}}^*_s$). Будем говорить, что отображение f принадлежит классу $\tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$ (или соответственно $f \in \tilde{\mathbf{Q}}^*_s(D')$), если мера Лебега области D' конечна, $m(D') < \infty$ и кратность отображения $N(f, D) < N < \infty$.

Далее, как, например в [9, 10], определим класс отображений с p-ограниченным интегралом Дирихле.

Определение 5. Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – произвольная область. Будем говорить, что отображение $f: D \to D'$, $f \equiv \{f_1, f_1, ..., f_n\}$, принадлежит классу BL^p_k, $f \in BL^p_k$, если f непрерывно в D и имеет в области D первые обобщенные производные $\frac{df_i}{dx_j}$, $(i, j = \overline{1,n})$ в смысле С.Л. Соболева, для которых выполнено

$$\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx < k < \infty,$$

где $|\nabla f(x)| = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{df_i}{dx_j} \right)^2 \right]^{1/2}$.

Отображение $f : D \to \mathbf{R}^n$ принадлежит классу BL^p в D, $f \in BL^p$, если $f \in BL_k^p$ для некоторого $k < \infty$.

Для отображений с ограниченным интегралом Дирихле имеют место следующие утверждения.

Предложение 5. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области и $m(D') < \infty$. Пусть отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$, $s > 1$ и $\int_D |J(x,f)| \left(1+|x|^2\right)^{n/(s-1)} dx < M < \infty$. Тогда интеграл Дирихле отображения f конечен, $\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx < \infty$.

Доказательство. Применяя к интегралу

$$J = \int_D |\nabla f(x)|^n \, dx = \int_D \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|^{\frac{s-1}{s}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{n}{s}}} \frac{|J(x,f)|^{\frac{s-1}{s}} dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n}{s}}} dx$$

неравенство Гельдера с показателями $p{=}s$ и $q{=}s/(s{-}1)$, $p{>}1$:

$$J \le \left(\int_D \frac{|\nabla f(x)|^{ns}}{|J(x,f)|^s} |J(x,f)| \, d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_D |J(x,f)| \left(1+|x|^2\right)^{n/(s-1)} dx \right)^{\frac{s-1}{s}},$$

в силу (1) и согласно условию, получаем неравенство

$$\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx \le M^{\frac{s-1}{s}} \left(\int_D K_{\mathrm{O}}^s(x,f) |J(x,f)| \, d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} < \infty,$$

которое доказывает наше предложение.

Предложение 6. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области и $m(D') < \infty$. Пусть $\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx < \infty$, $N(f, D) < N < \infty$ и $1/(n-1) < s < 1$. Тогда $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$.

Доказательство. Применяя к отображению с $K_{\mathrm{O},S}^*$-усредненной характеристикой неравенство (1):

$$J = \int_D K_{\mathrm{O}}^s(x,f) |J(x,f)| \, d\sigma_x \le \int_D n^{n/2} \lambda^s(x,f) |J(x,f)| \, d\sigma_x =$$

$$= \int_D \frac{|\nabla f(x)|^{ns}}{|J(x,f)|^s} |J(x,f)| \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n} = \int_D |\nabla f(x)|^{ns} |J(x,f)|^{1-s} \, dx$$

и неравенство Гельдера с показателями $p{=}1/s$ и $q{=}1/(1{-}s)$, $p{>}1$, получаем

$$J \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx \right)^s \left(\int_D |J(x,f)| \, dx \right)^{1-s}.$$

После замены переменных в интеграле $\int\limits_D |J(x,f)|\,dx$, теорема 2.2 [8], согласно условию, получаем неравенство

$$\left(\int\limits_D K_{\mathrm{O}}^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x\right)^{1/s} \le \left(m(D')\cdot N\right)^{\frac{1-s}{s}} \int\limits_D |\nabla f(x)|^n\,dx,$$

которое доказывает наше предложение.

Для отображения с $K_{\mathrm{I},S}^*$-усредненной характеристикой доказательство проводится аналогично.

Следующие примеры показывают, что из сходимости интеграла Дирихле отображения f следует, что $f\in\tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$ при $1/(n-1)<s<1$, а также при $s\ge 1$.

Пример 1. Рассмотрим множество $D=\{x\in\mathbf{R}^n\colon 0\le x_i\le 1,\ i=\overline{1,n-1},\ 1\le x_n<\infty\}$ и отображение $f: D\to D'$, $f(x)=\left\{\dfrac{x_1x_n^{1-\beta}}{1-\beta},\dfrac{x_2x_n^{1-\beta}}{1-\beta},\dots,\dfrac{x_{n-1}x_n^{1-\beta}}{1-\beta},\dfrac{x_n^{1-\beta}}{1-\beta}\right\}$, $\beta>(n+1)/n$.

Для отображения f вычислим:

$$J(x,f)=\frac{x_n^{n(1-\beta)-1}}{(1-\beta)^{n-1}},\quad |\nabla f(x)|^n=\left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2}x_n^{2(1-\beta)}+\left(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)x_n^{-2\beta}\right)^{n/2}.$$

Покажем, что если сходится интеграл Дирихле данного отображения, тогда $f\in\tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$ при некоторых s.

Оценим интеграл

$$\int\limits_D|\nabla f(x)|^n\,dx=\int\limits_D\left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2}x_n^{2(1-\beta)}+\left(1+x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n-1}^2\right)x_n^{-2\beta}\right)^{\frac{n}{2}}dx\le$$

$$\le\int\limits_D\left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2}x_n^{2(1-\beta)}+nx_n^{-2\beta}\right)^{\frac{n}{2}}dx=\int\limits_1^\infty\left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2}x_n^{2(1-\beta)}+nx_n^{-2\beta}\right)^{\frac{n}{2}}dx_n.$$

Как и в [10] (глава IV § 5), применяя неравенство Минковского, находим, что последний интеграл конечен тогда и только тогда, когда конечны интегралы

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx_n}{x_n^{(\beta-1)n}}<\infty \ \text{ и } \int\limits_1^\infty\frac{dx_n}{x_n^{\beta n}}<\infty.$$

Вычисляя, находим, что при $\beta>(n+1)/n$ интеграл $\int\limits_D|\nabla f(x)|^n\,dx<\infty$.

Исследуем, при каких условиях на s отображение $f\in\tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$. Имеем

$$J=\int\limits_D n^{\frac{ns}{2}}\lambda^s(x,f)|J(x,f)|\,d\sigma_x=\int\limits_D|\nabla f(x)|^{ns}|J(x,f)|^{1-s}\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\le$$

$$\le\int\limits_D\left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2}x_n^{2(1-\beta)}+nx_n^{-2\beta}\right)^{\frac{ns}{2}}\frac{x_n^{[n(1-\beta)-1](1-s)}}{(1-\beta)^{(n-1)(1-s)}x_n^{2n}}\,dx.$$

Как и выше, применяя неравенство Минковского, получаем, что последний интеграл конечен тогда и только тогда, когда конечны интегралы

$$\int_1^\infty \frac{dx_n}{x_n^{(\beta-1)ns+[n(1-\beta)-1](s-1)+2n}} < \infty \text{ и } \int_1^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\beta ns+[n(1-\beta)-1](s-1)+2n}} < \infty.$$

Отсюда находим, что при $\beta > (n+1)/n$ отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$ для $1/(n-1) < s < 2n+1$.

Пример 2. Пусть в области $D = \{x \in \mathbf{R}^n : \ 0 \le x_i \le 1, \ i = \overline{1,n}\}$ задано отображение $f : D \to D'$, $f(x) = \left\{\frac{x_1 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_2 x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \ldots, \frac{x_{n-1} x_n^{1-\beta}}{1-\beta}, \frac{x_n^{1-\beta}}{1-\beta}\right\}$, $\beta < 1$.

Как и выше,

$$J(x,f) = \frac{x_n^{n(1-\beta)-1}}{(1-\beta)^{n-1}}, \quad |\nabla f(x)|^n = \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{2(1-\beta)} + \left(1 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right) x_n^{-2\beta}\right)^{n/2}.$$

Оценим интеграл Дирихле данного отображения

$$\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx \le \int_0^1 \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{2(1-\beta)} + n x_n^{-2\beta}\right)^{\frac{n}{2}} dx_n < \infty.$$

Применяя неравенство Минковского, находим, что при $\beta < 1/n$ интеграл $\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx$ сходится.

Найдем, при каких значениях s отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$. Имеем

$$J = \int_D n^{\frac{ns}{2}} \lambda^s(x,f) |J(x,f)| \, d\sigma_x \le \int_D \left(\frac{(n-1) x_n^{2(1-\beta)}}{(1-\beta)^2} + n x_n^{-2\beta}\right)^{\frac{ns}{2}} \frac{x_n^{[n(1-\beta)-1](1-s)}}{(1-\beta)^{(n-1)(1-s)} x_n^{2n}} dx.$$

Полученный интеграл сходится тогда и только тогда, когда сходятся интегралы

$$\int_0^1 \frac{dx_n}{x_n^{(\beta-1)ns+[n(1-\beta)-1](s-1)+2n}} < \infty \text{ и } \int_0^1 \frac{dx_n}{x_n^{\beta ns+[n(1-\beta)-1](s-1)+2n}} < \infty.$$

Вычисляя, находим, что $\beta < (n-n^2-1)/n < 1/n$, $1/(n-1) < s < n-1$, отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$.

Таким образом, мы показали, что из сходимости интеграла Дирихле данного отображения следует, что $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$.

Предложение 7. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области. Пусть область D ограничена, $m(D') < \infty$, $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$, $p < n, s > 1$. Тогда интеграл $\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx$ сходится.

Доказательство. Пусть $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$. Оценим интеграл

$$J = \int_D |\nabla f(x)|^p \, dx = \int_D \frac{|\nabla f(x)|^p}{|J(x,f)|^{\frac{(s-1)p}{ns}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{s}}} \frac{|J(x,f)|^{\frac{(s-1)p}{ns}} dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{p}{s}}} dx,$$

используя дважды неравенство Гельдера с показателями $t = ns/p$ и $q = ns/(ns-p)$, $t > 1$:

$$J \le \left(\int_D \left(\frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|} \right)^s |J(x,f)|\, d\sigma_x \right)^{\frac{p}{ns}} \left(\int_D \frac{|J(x,f)|^{\frac{p(s-1)}{ns-p}}}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{-pn}{ns-p}}} dx \right)^{\frac{ns-p}{ns}},$$

и с показателями $t=(ns-p)/p(s-1)$ и $q=(ns-p)/s(n-p)$, где $t > 1$ при $p < n$ и $1 < s$:

$$J \le \left(\int_D \lambda^s(x,f) |J(x,f)|\, d\sigma_x \right)^{\frac{p}{ns}} \left(\int_D |J(x,f)|\, dx \right)^{\frac{p(s-1)}{ns}} \left(\int_D \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha}} \right)^{\frac{n-p}{n}},$$

где $\alpha = pn/s(n-p)$.

Отсюда, после замены переменных и согласно условию, находим, что

$$\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx \le \left(m(D')\cdot N \right)^{\frac{p(s-1)}{ns}} \left(\int_D n^{\frac{ns}{2}} \mathrm{K}_{\mathrm{O}}^s(x,f) |J(x,f)|\, d\sigma_x \right)^{\frac{p}{ns}} < \infty.$$

Предложение доказано.

Предложение 8. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области и $m(D') < \infty$. Пусть $\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx < \infty$, $N(f, D) < N < \infty$, $1/(n-1) < s < 1$, $p > n$. Тогда $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s^*(D')$.

Доказательство. Применяя к отображению с $K_{\mathrm{O},S}^*$-усредненной характеристикой неравенство (1):

$$J = \int_D K_{\mathrm{O}}^s(x,f) |J(x,f)|\, d\sigma_x \le \int_D n^{ns/2} \lambda^s(x,f) |J(x,f)|\, d\sigma_x =$$

$$= \int_D |\nabla f(x)|^{ns} |J(x,f)|^{1-s} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n},$$

и дважды неравенство Гельдера с показателями $t=p/ns$ и $q = p/(p-ns)$, $t>1$:

$$J \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx \right)^{ns/p} \left(\int_D |J(x,f)|^{\frac{(1-s)p}{p-ns}} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{np/(p-ns)}} \right)^{(p-ns)/p}$$

и с показателями $t=(p-ns)/p(1-s)$ и $q=(p-ns)/s(p-n)$, $t>1$, получаем

$$J \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx \right)^{ns/p} \left(\int_D |J(x,f)|\, dx \right)^{1-s} \left(\int_D \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{np}{s(p-n)}}} \right)^{s(p-n)/p}.$$

После замены переменных в интеграле $\int_D |J(x,f)|\, dx$, теорема 2.2 [8], получаем неравенство

$$J \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p} ns} \left(N \int_{D'} dy \right)^{1-s} \left(\int_D \frac{d\sigma_x}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{n(p-ps+ns)}{s(p-n)}}} \right)^{s(p-n)/p}.$$

Последний интеграл конечен, так как при $p > n$ и $1/(n–1) < s < 1$ степень в знаменателе дроби $\frac{n(p-ps+ns)}{s(p-n)} \ge 0$. Отсюда, в силу неравенства (3), находим, что

$$J \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p} ns} \left(m(D') \cdot N \right)^{1-s} \left(\frac{\pi^n}{n} \right)^{s(p-n)/p}$$

или окончательно

$$\left(\int_D K_O^s(x,f) |J(x,f)| \, d\sigma_x \right)^{1/s} \le \left(\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{n}{p}} \left(m(D') \cdot N \right)^{\frac{1-s}{s}} \left(\frac{\pi^n}{n} \right)^{\frac{p-n}{n}}.$$

Предложение доказано.

Для отображения с $K_{I,S}^*$-усредненной характеристикой доказательство проводится аналогично.

Поскольку доказательства следующих предложений проводятся аналогично доказательству предложений, приведенных выше, далее ограничимся изложением полученных результатов.

Предложение 9. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области и $m(D') < \infty$. Пусть $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$, $1 < s$ и $\int_D \left[|J(x,f)|^s \left(1+|x|^2\right)^n \right]^{1/(s-1)} dx < M < \infty$. Тогда $\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx < \infty$.

Предложение 10. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области и $m(D') < \infty$. Пусть $\int_D |\nabla f(x)|^n \, dx < \infty$, $1/(n–1) < s < 1$ и $\int_D |J(x,f)|^{s/(s-1)} \, d\sigma_x < M < \infty$. Тогда $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

Предложение 11. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области, область D ограничена и $m(D') < \infty$. Пусть отображения $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$, $p < n$, $p/(n–p) < s$. Тогда $\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty$.

Предложение 12. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – области, $m(D') < \infty$. Пусть

$$\int_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty, \ 1/(n-1) < s < p/n, \ p > n$$

и

$$\int_D \left[|J(x,f)|^s \left(1+|x|^2\right)^n \right]^{p/(ns-p)} dx < M < \infty .$$

Тогда $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

Рассмотрим связь отображений с ограниченным интегралом Дирихле и отображения класса $\tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$ на примере.

Пример 3. Рассмотрим множество $D = \{x \in \mathbf{R}^n : 0 \le x_i \le 1, i = \overline{1, n-1}, 1 \le x_n < \infty\}$ и отображение $f : D \to D'$, $f(x) = \{f_1, f_2, ... f_n\}$, где $f_i = \frac{1}{\beta} x_i x_n^{-\beta}$, $i = \overline{1, n-1}$, $f_n = \frac{1}{\beta} x_n^{-\beta}$.

Для отображения f имеем

$$|J(x,f)| = \frac{x_n^{-(\beta n+1)}}{\beta^n}, \quad |\nabla f(x)|^n = \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{-2\beta} + \left(1 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) x_n^{-2(\beta+1)} \right)^{n/2}.$$

Покажем, что если $p > n$ и $\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty$, тогда $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$ при некоторых s.

Действительно, применяя к интегралу, как и в [10], неравенство Минковского, находим, что

$$\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, dx = \int\limits_D \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{-2\beta} + \left(1 + x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{n-1}^2\right) x_n^{-2(\beta+1)} \right)^{\frac{p}{2}} dx \le$$

$$\le \int\limits_D \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{-2\beta} + n x_n^{-2(\beta+1)} \right)^{\frac{p}{2}} dx = \int\limits_1^\infty \left(\frac{n-1}{(1-\beta)^2} x_n^{-2\beta} + n x_n^{-2(\beta+1)} \right)^{\frac{p}{2}} dx_n,$$

сходимость последнего интеграла следует из сходимости следующих интегралов

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx_n}{x_n^{\beta p}} < \infty \quad \text{и} \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx_n}{x_n^{(\beta+1)p}} < \infty.$$

Отсюда получаем, что при $\beta > 1/p$ интеграл $\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \, dx < \infty$.

Исследуем, при каких условиях на s отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

Применяя к интегралу

$$J = \int\limits_D n^{\frac{ns}{2}} \lambda^s (x, f) \, d\sigma_x = \int\limits_D |\nabla f(x)|^{ns} \, |J(x,f)|^{-s} \frac{dx}{\left(1 + |x|^2\right)^n}$$

неравенство Гельдера с показателями $t = p/ns$ и $q = p/(p–ns)$, $t > 1$ и неравенство Минковского, как и в [10]:

$$J \le \left(\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n} \right)^{\frac{ns}{p}} \left(\int\limits_D |J(x,f)|^{\frac{-ps}{p-ns}} \frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^{\frac{np}{p-ns}}} \right)^{\frac{p-ns}{p}} \le$$

$$\le \left(\int\limits_D |\nabla f(x)|^p \frac{dx}{x_n^{2n}} \right)^{\frac{ns}{p}} \left(\int\limits_D \left(\frac{x_n^{(\beta n+1)}}{\beta^n} \right)^{\frac{ps}{p-ns}} \frac{dx}{x_n^{2np/(p-ns)}} \right)^{\frac{p-ns}{p}},$$

находим, что данный интеграл конечен тогда и только тогда, когда конечен интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x_n^{[-(\beta n+1)ps+2np]/(p-ns)}} < \infty.$$

Вычисляя, находим, что при $\beta > 1/p$, $1/(n-1) < s < p/n$ отображение $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

Таким образом, при $p > n$, $1/(n-1) < s < p/n$ из сходимости интеграла Дирихле отображения f следует, что $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

Заметим, что не всегда сходимость интеграла Дирихле, $\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx < \infty$, влечет сходимость интеграла $\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x$. Нетрудно показать, что если в этом же примере при $p > n$ и $\beta > 1/p$ положим $s > p/n$, тогда интеграл $\int_D |\nabla f(x)|^p\, dx < \infty$, но $f \notin \tilde{\mathbf{Q}}_s(D')$.

В заключение покажем, что в случае ограниченности областей D и D' классы отображений с искажением, ограниченным в среднем Q_s и Q_s^* (см. [5]) и классы отображений с s-усредненной характеристикой совпадают.

Предложение 13. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченные области, $m(D) < \infty$, $m(D') < \infty$. Тогда классы $Q_s = \tilde{\mathbf{Q}}_s$ и $Q_s^* = \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$ совпадают.

Покажем включение $Q_s = \tilde{\mathbf{Q}}_s$ в обе стороны.

1) $Q_s \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$. По определению отображения $f \in \tilde{\mathbf{Q}}_s$ имеем

$$\left(\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_D K_O^s(x,f)\frac{dx}{\left(1+|x|^2\right)^n}\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\int_D K_O^s(x,f)dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Следовательно, включение $Q_s \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$ имеет место.

2) В другую сторону. Поскольку область D ограничена, для $f \in Q_s$ получаем оценку

$$\left(\int_D K_O^s(x,f)dx\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\int_D K_O^s(x,f)\left(1+|x|^2\right)^n d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}} \le M^{\frac{1}{s}}\left(\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}},$$

где $M = M(D)$ – некоторая постоянная.

Таким образом, $Q_s \supset \tilde{\mathbf{Q}}_s$ и, следовательно, классы Q_s, $\tilde{\mathbf{Q}}_s$ совпадают.

Включение $Q_s^* = \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$ доказывается аналогично.

Предложение 14. Пусть $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченные области, $m(D) < \infty$, $m(D') < \infty$, $s < s'$, тогда $Q_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$, $Q_{s'}^* \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$, $\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset Q_s$, $\tilde{\mathbf{Q}}_{s'}^* \subset Q_s^*$.

Доказательства включений предложения 14 аналогичны доказательству включений в предложениях выше.

Представим полученные результаты в виде таблицы.

Здесь $D, D' \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченные области, $f\colon D \to D'$, $m(D) < \infty$, $m(D') < \infty$.

Таблица 2

5.	$Q_s = \tilde{\mathbf{Q}}_s$	
6.	$Q_s^* = \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$	
7.	$Q_{s'} \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s$	$s' > s$
8.	$Q_{s'}^* \subset \tilde{\mathbf{Q}}_s^*$	
9.	$\tilde{\mathbf{Q}}_{s'} \subset Q_s$	
10.	$\tilde{\mathbf{Q}}_{s'}^* \subset Q_s^*$	

Полученные результаты позволяют в дальнейшем для классов отображений с s-усредненной характеристикой установить оценки искажения евклидовых расстояний, искажение относительного расстояния, свойство компактности и др., используя соответствующие свойства и теоремы, доказанные для отображений с искажением, ограниченным в среднем и др., и изучить возможность применения методов исследования отображений этих классов, например обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений пространственных областей с ограниченными интегралами Дирихле [10], емкостную технику, широко используемую для изучения отображений с искажением, ограниченным в среднем [4], для исследования рассматриваемых нами отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сычев А.В.* Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. 152 с.
2. *Малютина А.Н., Кривошеева И.И., Баталова Н.Н. Баталова Н.Н.* Искажение сферического модуля семейства кривых. // Исследования по математическому анализу и алгебре. Вып. 3. Томск: Изд-во ТГУ, 2001. С. 179–195.
3. *Малютина А.Н., Елизарова М.А.* Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с s-усредненной характеристикой. // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 4(8). С. 46–52.
4. *Кругликов В.И., Пайков В.И.* Некоторые геометрические свойства отображений с искажением, ограниченным в среднем. Донецк: Донецк. ун-т, 1982. 43с. (Деп. в ВИНИТИ 06.09.82 № 4747-82 Деп).
5. *Малютина А.Н.* Классы отображений с ограниченным в среднем искажением. // Вестник ТГУ. 2000. № 269. С. 51–55.
6. *Малютина А.Н., Елизарова М.А.* Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. 2007. № 300(1). С. 124–129.
7. *Rado T., Reichelderfer R.V.* Continuous transformation in analysis. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer-Verlag, 1955. 442 p.
8. *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982. С. 285.
9. *Fuglede B.* Extremal lenght and functional completion // Acta. Math. 1957. V. 98. No. 3. P. 171–219.
10. *Суворов Г.Д.* Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.

Статья принята в печать 14.10.2010 г.

Malyutina A.N., Elizarova M.A. ESTIMATIONS OF DISTORTION OF THE MODULES FOR THE MAPPINGS WITH *S*-AVERAGED CHARACTERISTIC. In the present work geometrical properties of mappings with s-averaged characteristic are investigating. For such mappings the estimation theorems for distortion of the module of a family of curves and the module of an image of a family of curves are proved. The obtained results enable to establish equivalence of the geometrical and analytical definitions of the mappings with s-averaged characteristic and give additional mathematical methods at their research.

Keywords: mappings with s-averaged characteristic, module of a family of curves, estimation of distortion of the module.

MALYUTINA Aleksandra Nikolaevna (Tomsk State University)
E-mail: NDM@main.tusur.ru

ELIZAROVA Maria Aleksandrovna (Tomsk State University)
E-mail: elizarova_m@sibmail.com