УДК 512.553+512.541

Е.А. Тимошенко

О br-КОЛЬЦАХ[1,2]

Исследуются br-кольца, характеризующиеся тем свойством, что в категории модулей над ними всякий идемпотентный радикал порождён и копорождён подходящими классами бимодулей.

Ключевые слова: *модуль, бимодуль, радикал, гомоморфизм.*

На протяжении статьи все группы будут предполагаться абелевыми, кольца – ассоциативными с единицей, модули – унитарными (и по умолчанию правыми). Будем приписывать кольцу свойства его аддитивной группы; например, фраза «кольцо S-периодическое» означает, что аддитивная группа S^+ указанного кольца является периодической. Через $\mathrm{Hom}(G, H)$ обозначаем группу всех аддитивных гомоморфизмов из G в H, через $\mathrm{End}\, V$ – кольцо эндоморфизмов модуля V.

Данная работа является продолжением статьи [1], в которой был рассмотрен вопрос о том, когда идемпотентный радикал категории правых S-модулей mod-S порождён или копорождён некоторым классом S-S-бимодулей. Напомним [1, 2], что идемпотентные радикалы категории правых S-модулей находятся во взаимно однозначном соответствии как с *радикальными* (замкнутыми относительно гомоморфных образов, прямых сумм и расширений), так и с *полупростыми* (замкнутыми относительно подмодулей, прямых произведений и расширений) классами правых S-модулей.

Пусть Γ – некоторый непустой класс правых S-модулей. Среди радикальных (полупростых) классов категории mod-S, содержащих в себе Γ, всегда найдётся наименьший. Идемпотентный радикал, соответствующий такому наименьшему радикальному (полупростому) классу, обозначим через H_Γ (соответственно K_Γ). Будем говорить, что идемпотентный радикал H_Γ *порождён*, а K_Γ *копорождён* классом Γ. Всякий идемпотентный радикал порождён и копорождён некоторыми подходящими (отличными друг от друга) классами модулей. Если Γ состоит из единственного модуля V, то пишем просто H_V и K_V.

Приведём ряд условий, равносильность которых была установлена в [1].

Теорема 1. Пусть S – кольцо. Следующие условия эквивалентны:

1) Для всякого модуля V_S существует S-S-бимодуль U, такой, что $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$.

2) Для всякого модуля V_S существует S-S-бимодуль U, такой, что $\mathrm{K}_U = \mathrm{K}_V$.

3) Всякий идемпотентный радикал категории mod-S порождается некоторым классом S-S-бимодулей.

4) Всякий идемпотентный радикал категории mod-S копорождён некоторым классом S-S-бимодулей.

5) Для всякого модуля $V_S \neq 0$ выполнено $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$.

---

[1] Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 – 2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г.

[2] Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238.

Всякое кольцо, удовлетворяющее эквивалентным условиям теоремы 1, будем называть *правым* br-*кольцом* (от слов «бимодуль» и «радикал»). Основная цель статьи – исследование свойств таких колец. Помимо прочего, выделим достаточно широкие классы колец, которые являются правыми (а также левыми) br-кольцами. Ясно, что к таковым относятся, в частности, все коммутативные кольца (поскольку все модули над ними можно считать бимодулями). Отметим, что для всех результатов будут справедливы и «левые» аналоги.

Через $Z(S)$, как обычно, обозначим центр кольца S. Чтобы узнать, является ли то или иное кольцо S правым br-кольцом, в дальнейшем будем либо использовать предложение 2, либо проверять, что для всякого модуля $V_S \neq 0$ выполнено

$$\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0. \tag{1}$$

Предложение 2. Если существует гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(S, Z(S))$, такой, что $1 \in \psi(S)$, то S является правым br-кольцом.

Доказательство. Пусть $V_S \neq 0$. Гомоморфизм групп $\varphi\colon S \to \mathrm{End}\, V_S$ зададим формулой $(\varphi(s))(v) = v\psi(s)$. Образ этого гомоморфизма содержит тождественный эндоморфизм 1_V модуля V_S. Поэтому $\varphi \neq 0$, так что условие (1) выполнено. ■

Теорема 3. Пусть $\pi\colon R \to S$ – сюръективный кольцевой гомоморфизм, и пусть $V_S \neq 0$ – модуль, для которого (1) не выполнено. Если справедливо условие

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\,\pi, \mathrm{End}\, V_S) = 0, \tag{2}$$

то R не является правым br-кольцом.

Доказательство. Обозначим $\Lambda = \mathrm{End}\, V_S$. Полагая $vr = v\pi(r)$, наделяем V_S структурой правого R-модуля; при этом $\mathrm{End}\, V_R = \Lambda$. Точная последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(S, \Lambda) \to \mathrm{Hom}(R, \Lambda) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Ker}\,\pi, \Lambda) \tag{3}$$

приводит к равенству $\mathrm{Hom}(R, \Lambda) = 0$, т.е. R не является правым br-кольцом. ■

Теорема 4. 1) Конечное прямое произведение правых br-колец само является правым br-кольцом.

2) Пусть n – натуральное число. Кольцо S является правым br-кольцом тогда и только тогда, когда таковым является кольцо S^n.

Доказательство. 1) Достаточно проверить требуемое утверждение для произведения двух колец. Пусть задано разложение $R = S \oplus S'$ кольца R в прямую сумму двух его идеалов, каждый из которых является правым br-кольцом. Если R не является правым br-кольцом, то для некоторого $U_R \neq 0$ выполняется равенство $\mathrm{Hom}(R, \mathrm{End}\, U_R) = 0$.

Имеет место R-модульное разложение $U = Ue \oplus Ue'$, где e и e' – единицы колец S и S'; можно считать, что выполнено $V = Ue \neq 0$. Модуль V_R, очевидно, является правым S-модулем. Несложно видеть, что аддитивная группа кольца $\mathrm{End}\, V_S$ изоморфна прямому слагаемому группы $(\mathrm{End}\, U_R)^+$. Тогда из $\mathrm{Hom}(R, \mathrm{End}\, U_R) = 0$ получаем, что для модуля V_S условие (1) не выполнено – противоречие.

2) Одна из импликаций очевидна в силу пункта 1). Предположим, что $R = S^n$ – правое br-кольцо; покажем, что тем же свойством обладает S.

Допустим противное: пусть для некоторого $V_S \neq 0$ условие (1) не выполнено. Очевидно, что существует сюръективный гомоморфизм $\pi\colon S^n \to S$, ядро которого есть прямая сумма копий S. Применяя теорему 3, получаем, что S^n не является правым br-кольцом – противоречие. ■

Замечание. Пусть S не является правым br-кольцом (ряд таких примеров приведён в конце статьи). Из предложения 2 получаем, что $\mathbf{Z} \times S$ (где $\mathbf{Z}$ – это кольцо целых чисел) будет правым br-кольцом. Итак, ни факторкольцо, ни даже прямое слагаемое правого br-кольца не обязано само быть таковым.

Теорема 5. Свойство «быть правым br-кольцом» является инвариантным в смысле Мориты.

Доказательство. Пусть кольца S и R эквивалентны в смысле Мориты и S – правое br-кольцо. Можем считать, что $R = \operatorname{End} P_S$, где P – это прообразующий категории mod-S. Убедимся сначала, что для всякой группы Λ из $\mathrm{Hom}(S, \Lambda) \neq 0$ следует $\mathrm{Hom}(R, \Lambda) \neq 0$.

Пусть существует ненулевой гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(S, \Lambda)$. Поскольку P_S есть прообразующий категории mod-S, получаем, что S_S – гомоморфный образ прямой суммы копий P. Тогда существует аддитивный гомоморфизм α: $P \to S$, такой, что выполняется $\psi\alpha \neq 0$. Зафиксируем некоторый элемент $p \in P$, удовлетворяющий неравенству $(\psi\alpha)(p) \neq 0$. Для гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{Hom}(R, \Lambda)$, заданного формулой $\varphi(r) = (\psi\alpha r)(p)$, имеем $\varphi(1_P) \neq 0$. Итак, $\mathrm{Hom}(R, \Lambda) \neq 0$.

Далее, возьмём произвольный ненулевой модуль U_R. Пусть h: mod-$R \to$ mod-S есть эквивалентность категорий, тогда $\operatorname{End} U_R \cong \operatorname{End} V_S$, где $V = h(U) \neq 0$. В этом случае из неравенства (1) следует $\mathrm{Hom}(R, \operatorname{End} U_R) \neq 0$. Таким образом, R является правым br-кольцом. ■

Периодическую часть и p-компоненту абелевой группы G будем обозначать $\mathrm{t}(G)$ и G_p соответственно.

Лемма 6. Если ненулевой модуль V_S не удовлетворяет условию (1), то $\operatorname{End} V_S$ есть кольцо без кручения.

Доказательство. Обозначим $\Lambda = \operatorname{End} V_S$ и предположим, что для некоторого простого числа p выполнено $\Lambda_p \neq 0$. Это означает, что в V есть элемент порядка p. Последнее возможно только при условии, что $1 \notin pS$. Тогда циклическая группа $\mathbf{Z}(p)$ порядка p служит гомоморфным образом группы S^+, т.е. $\mathrm{Hom}(S, \Lambda) \neq 0$, что даёт нам противоречие. ■

Теорема 7. Пусть R – непериодическое правое br-кольцо. Тогда факторкольцо $S = R/\mathrm{t}(R)$ также является правым br-кольцом.

Доказательство. Пусть S не является правым br-кольцом, т.е. для некоторого $V_S \neq 0$ условие (1) не выполнено. Из леммы 6 мы знаем, что $\operatorname{End} V_S$ – кольцо без кручения. Это означает, что канонический гомоморфизм π: $R \to S$ удовлетворяет равенству (2). Тогда R не является правым br-кольцом – противоречие. ■

Для доказательства последующих теорем нам понадобится

Лемма 8. Пусть S – кольцо, а $S/\mathrm{t}(S)$ – p-делимая группа. Тогда:

1) Существует целое $k \geq 0$, такое, что для всякого V_S выполнено $p^k V_p = 0$.

2) Всякий модуль V_S разлагается в сумму $V = V' \oplus V_p$ своих подмодулей, где V' есть множество всех элементов из V, имеющих бесконечную p-высоту.

Доказательство. 1) $S/\mathrm{t}(S)$ и $\mathrm{t}(S)/S_p$ – это p-делимые группы; следовательно, тем же свойством обладает аддитивная группа факторкольца S/S_p. Отсюда имеем $1 + S_p = p(s + S_p)$ для подходящего $s \in S$. Тогда элемент $1 - ps \in S$ имеет порядок p^k для некоторого целого $k \geq 0$ и, значит, элемент $p^k \cdot 1$ имеет в кольце S бесконечную p-высоту. Это даёт нам требуемое утверждение.

2) V_p есть ограниченная сервантная подгруппа группы V, поэтому существует подгруппа V' из V, такая, что $V = V' \oplus V_p$. Факторгруппа $V' \cong V/V_p$ естественным образом превращается в правый модуль над p-делимым кольцом S/S_p; значит, все её элементы имеют бесконечную p-высоту. И наоборот, все элементы модуля V, имеющие бесконечную p-высоту, должны лежать в V'. Получили, что V' является подмодулем в V_S, а $V = V' \oplus V_p$ – модульное разложение.

Утверждения леммы остаются справедливыми, если выполнено $S = S_p$: в этом случае $V' = 0$, а в качестве p^k можно взять характеристику кольца S. ■

Через $\mathbf{Q}$ обозначаем поле всех рациональных чисел, через $\mathbf{Q}^{(p)}$ – кольцо всех рациональных чисел, знаменателями которых служат степени простого числа p.

Теорема 9. Если ранг без кручения кольца S не превышает 1, то S есть правое br-кольцо.

Доказательство. Разберём сначала случай, когда S – периодическое кольцо. Тогда для всякого модуля $V_S \neq 0$ кольцо $\operatorname{End} V_S$ будет периодическим, поскольку его характеристика есть делитель характеристики кольца S. Из леммы 6 можно сделать вывод, что для всех $V_S \neq 0$ выполнено условие (1).

Пусть теперь ранг без кручения группы S^+ в точности равен 1. Предположим, что для ненулевого модуля V_S неравенство (1) не имеет места. Обозначим через R то подкольцо поля $\mathbf{Q}$, которое изоморфно факторкольцу $S/\mathrm{t}(S)$. Если бы V можно было наделить некоторой R-модульной структурой, то аддитивная группа кольца $\operatorname{End} V_S$ обладала бы аналогичным свойством, т.е. мы получили бы противоречие с условием $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) = 0$. Следовательно, найдётся простое число p, такое, что $pR = R$, но V не является $\mathbf{Q}^{(p)}$-модулем.

Применяя к кольцу S лемму 8, приходим к модульному прямому разложению $V = V' \oplus V_p$, где V' – ещё и модуль над $\mathbf{Q}^{(p)}$. При этом выполнено $V_p \neq 0$ (иначе V можно было бы наделить структурой $\mathbf{Q}^{(p)}$-модуля). Из той же леммы следует, что p-компонента кольца $\operatorname{End} V_S$ содержит ненулевые элементы (примером служит проекция $V \to V_p$). Заметим, что $1 \notin pS$ (иначе было бы $V_p = 0$), так что группа S^+ имеет $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом. Итак, вновь приходим к противоречию с условием $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) = 0$. Получили, что S – правое br-кольцо. ■

Лемма 10. Если аддитивная группа S^+ кольца S является непериодической и делимой, то S – правое br-кольцо.

Доказательство. Из условия следует, что в $\mathrm{Z}(S)$ есть подкольцо, изоморфное полю $\mathbf{Q}$; аддитивная группа этого подкольца выделяется прямым слагаемым в S^+. Применяя предложение 2, получаем, что S – правое br-кольцо. ■

Теорема 11. Пусть R – такое кольцо, что аддитивная группа кольца $S = R/\mathrm{t}(R)$ делима. Тогда R является правым br-кольцом.

Доказательство. Пусть кольцо R не является периодическим (в противном случае достаточно воспользоваться теоремой 9). Допустим, что для ненулевого модуля V_R выполнено $\operatorname{Hom}(R, \operatorname{End} V_R) = 0$; обозначим $\Lambda = \operatorname{End} V_R$.

Пусть p – простое число, для которого $V_p \neq 0$. Из леммы 8 нам известно, что подмодуль V_p служит прямым слагаемым R-модуля V и является ограниченной группой. В этом случае проекция $V \to V_p$ представляет собой ненулевой элемент идеала Λ_p, что противоречит лемме 6.

Итак, V есть группа без кручения. Тогда V_R легко превратить в S-модуль так, чтобы выполнялось $\Lambda = \operatorname{End} V_S$. Точная последовательность (3), построенная для канонического гомоморфизма π: $R \to S$, приводит нас к равенству $\operatorname{Hom}(S, \Lambda) = 0$. Поэтому S не является правым br-кольцом, что противоречит лемме 10. Теорема доказана. ■

Кольцо R называют *слабо π-регулярным справа* (*слева*), если для всякого $r \in R$ найдётся натуральное k, такое, что $r^k \in r^kRr^kR$ (соответственно $r^k \in Rr^kRr^k$).

Следствие 12. Класс всех правых br-колец строго содержит в себе следующие классы колец: простые, регулярные, артиновы (справа или слева), совершенные (справа или слева), π-регулярные, слабо π-регулярные (справа или слева).

Доказательство. Нам достаточно показать, что включение справедливо для самых широких из названных классов, т.е. для слабо π-регулярных колец. Пусть кольцо R (учитывая теорему 9, мы можем считать его непериодическим) является слабо π-регулярным справа или слева. Для $r = p \cdot 1$ получаем, что при некотором натуральном k выполнено $p^k \cdot 1 \in p^{2k}R$. Следовательно, единица кольца $R/\mathrm{t}(R)$ есть элемент бесконечной p-высоты; тогда аддитивная группа этого кольца p-делима. Приведённое рассуждение справедливо для любого простого числа p; применяя теорему 11, получаем, что R является правым br-кольцом.

Для завершения доказательства остаётся убедиться, что включение является строгим: кольцо целых чисел $\mathbf{Z}$ служит примером правого br-кольца, которое не будет слабо π-регулярным ни справа, ни слева. ■

Оставшаяся часть статьи целиком посвящена построению ряда любопытных примеров (точнее сказать, контрпримеров), связанных с br-кольцами. Для этого нам будут полезны матричные кольца. Пусть A, B и C – множества; обозначим

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, a \in A, b \in B, c \in C \right\}.$$

Если A и C – кольца, а B – A-C-бимодуль, то указанное множество треугольных матриц является кольцом относительно обычных матричных операций.

Описание модулей над таким кольцом и гомоморфизмов этих модулей можно найти в [3, 4]. Аналогичное описание легко получить для модулей над кольцами матриц большего порядка. Чисто технические выкладки, связанные с модулями над матричными кольцами и с эндоморфизмами таких модулей, зачастую будут опускаться.

Условие (1) проще всего проверять для циклического модуля $V_S = S/I$, где $I \neq S$ есть некоторый правый идеал кольца S. Хорошо известно, что для такого модуля кольцо $\mathrm{End}\, V_S$ изоморфно факторкольцу J_I/I, где $J_I = \{s \in S \mid sI \subset I\}$.

Пример 1. Пусть p и q – различные простые числа, и пусть $\mathbf{Q}_p$ – кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p. Положим

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Q}_q \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p \cap \mathbf{Q}_q & \mathbf{Q}_q \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix},$$

тогда S – кольцо, I – его правый идеал и $J_I = L$. В этом случае для циклического правого модуля $V = S/I$ имеем $\mathrm{End}\, V_S \cong L/I \cong \mathbf{Q}_p \cap \mathbf{Q}_q$, так что V не удовлетворяет условию (1). Следовательно, S не является правым br-кольцом.

Замечания. 1) Аддитивная группа данного кольца без кручения имеет ранг 3. Ясно, что все кольца без кручения ранга 1 и 2 будут правыми br-кольцами в силу своей коммутативности.

2) Отметим, что S служит подкольцом полного кольца матриц порядка 2 над полем $\mathbf{Q}$. Из леммы 10 мы знаем, что это полное кольцо матриц является правым br-кольцом. Итак, подкольцо правого br-кольца не обязано само быть таковым.

Пример 2. Примитивное кольцо может не быть правым br-кольцом.

Пусть обозначения S и V имеют тот же смысл, что и в примере 1. Определим кольцо R как множество всех бесконечных матриц вида

$$\begin{pmatrix} M & & & 0 \\ & a & & \\ & & a & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где M есть квадратная матрица произвольного чётного порядка с элементами из поля рациональных чисел, a – некоторая матрица порядка 2, содержащаяся в S. Отображение $\pi\colon R \to S$, которое переводит всякую бесконечную матрицу данного вида в соответствующую ей матрицу $a \in S$, является сюръективным кольцевым гомоморфизмом. Его ядром служит делимая группа, т.е. выполнено условие (2). Применяя теорему 3, получаем, что R не является правым br-кольцом.

С другой стороны, построенное нами кольцо R изоморфно плотному кольцу линейных преобразований счётномерного правого $\mathbf{Q}$-пространства, а значит, оно примитивно слева (на самом деле R также примитивно справа).

Пример 3. Неравенство $\mathrm{Hom}(R, \mathrm{Z}(R)) \neq 0$ не является достаточным для того, чтобы R было правым br-кольцом.

Пусть S и V вновь имеют тот же смысл, что и в примере 1. Положим

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset S, \quad R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in S, b \in S/K \right\};$$

тогда K – идеал в S, а R – кольцо. Отображение π: $R \to S$, переводящее матрицы указанного вида в соответствующие им элементы $a \in S$, является сюръективным гомоморфизмом колец. Очевидно, что для него выполнено равенство (2), т.е. R не является правым br-кольцом.

Наконец, заметим, что S/K вкладывается в $\mathrm{Z}(R)$ и, значит, $\mathrm{Hom}(R, \mathrm{Z}(R)) \neq 0$.

Пример 4. Локальное кольцо может не быть правым br-кольцом.

Через B мы обозначим кольцо целых p-адических чисел; пусть π: $B \to B/pB$ – канонический гомоморфизм. В кольце B выберем сервантные подкольца A и C, имеющие конечный ранг и такие, что ни одно из них не содержится в другом. Кольцо S (несложно убедиться, что оно локально) и его правый идеал I зададим равенствами

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \middle| \, \pi(a) = \pi(c) \right\}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & pC \end{pmatrix}.$$

Тогда для циклического модуля $V_S = S/I$ выполнено $\mathrm{End}\, V_S \cong A \cap C$. Отсюда уже можно вывести, что V не удовлетворяет условию (1). Итак, S не является правым br-кольцом.

Пример 5. Правое br-кольцо может не быть левым br-кольцом.

Пусть $p \neq q$ – нечётные простые числа, $\mathbf{Z}(2^\infty)$ – квазициклическая 2-группа. Кольцо S и его левый идеал I зададим равенствами

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(p)} & 0 & 0 \\ \mathbf{Z}(2^\infty) & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Z}(2^\infty) \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}^{(q)} \end{pmatrix}, \quad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, b \in \mathbf{Z}(2^\infty), c \in \mathbf{Q}_2 \right\}.$$

Легко показать, что кольцо эндоморфизмов циклического левого модуля $U = S/I$ изоморфно $\mathbf{Z}$. Тогда $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}_S U) = 0$, т.е. S не является левым br-кольцом.

С другой стороны, из описания модулей над матричными кольцами следует, что всякий модуль $V_S \neq 0$ разлагается в прямую сумму двух своих подмодулей, один из которых является также модулем над кольцом $\mathbf{Q}^{(p)}$, а другой – над $\mathbf{Q}^{(q)}$. Следовательно, для V_S выполнено (1), так что S – правое br-кольцо.

Замечание. Легко убедиться, что $\mathrm{Z}(S) \cong \mathbf{Z}$, т.е. $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Z}(S)) = 0$. Это значит, что упомянутое в предложении 2 достаточное условие не является необходимым.

Пример 6. Пусть $A = \mathbf{Q}^{(2)}$, $C = \mathbf{Q}^{(3)}$. Положим

$$B = \bigoplus_{p>3} \mathbf{Z}(p), \quad D = \prod_{p>3} \mathbf{Z}(p), \quad S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

(здесь сумма и произведение берутся по всем простым $p > 3$). Факторкольцо D/B является делимым кольцом без кручения; поэтому D содержит подкольцо Y, для которого $B \subset Y$ и $Y/B \cong \mathbf{Q}_2$. Легко убедиться, что группу Y^+ можно рассматривать как C-модуль.

Модуль V_S зададим равенством $V = (A, Y)$, причём умножение на элементы кольца S будет осуществляться при помощи обычного матричного умножения. Опираясь на описание модульных гомоморфизмов над матричными кольцами, приведённое в работах [3, 4], можно проверить, что End $V_S \cong \mathbf{Z}$. Итак, условие (1) не выполнено, т.е. S не является правым br-кольцом.

Замечания. 1) В предшествующих примерах (включая примеры 2 и 3, где это было сделано неявно) ненулевой модуль, для которого не выполнено условие (1), всегда выбирался циклическим. Можно проверить, что в данном примере всякий ненулевой циклический модуль V_S удовлетворяет условию (1).

2) Кольцо $S/\mathrm{t}(S)$ коммутативно и, значит, является правым br-кольцом. Этот факт говорит о том, что утверждение теоремы 7 нельзя обратить.

3) Ранг без кручения кольца S равен 2. Таким образом, оценка, приведённая в теореме 9, является точной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е.А.* Радикалы, порождаемые или копорождаемые бимодулями // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 47–52.
2. *Кашу А.И.* Радикалы и кручения в модулях. Кишинёв: Штиинца, 1983.
3. *Green E.L.* On the representation theory of rings in matrix form // Pacific J. Math. 1982. V. 100. No. 1. P. 123–138.
4. *Haghany A.*, *Varadarajan K.* Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. 2000. V. 147. No. 1. P. 41–58.

Статья принята в печать 21.10.2010г.

Timoshenko E.A. ON br-RINGS. We study br-rings which are characterized by the property that in the category of modules over them every idempotent radical is generated and cogenerated by suitable classes of bimodules.

Keywords: module, bimodule, radical, homomorphism.

TIMOSHENKO Egor Aleksandrovich (Tomsk State University)
E-mail: tea471@mail.tsu.ru