

УДК 539.3

А.Е. Баганина

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОХОЖДЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН  
ЧЕРЕЗ ПОРИСТЫЕ СРЕДЫ**

В данной работе излагаются метод и результаты математического моделирования прохождения ударных волн через пористые упругие и упругопластические среды с явным выделением пор.

**Ключевые слова:** механика деформируемых тел, упругость, деформации, пористые среды.

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  бесконечная пластина из пористого материала, движущаяся со скоростью  $u_0$ , сталкивается с абсолютно жесткой поверхностью. Предполагается, что поры являются каналами, параллельными плоскости столкновения, и расположены в виде рядов так, как показано на рис. 1. При дополнительном предположении об одинаковом расстоянии между рядами пор и равенстве сечений каналов в качестве области решения можно рассматривать прямоугольник (рис. 1), боковые стороны которого являются границами симметрии решения. Деформируемая среда рассматривается в рамках модели сжимаемой упругопластической среды. Течение этой среды является двумерным и рассматривается в переменных Лагранжа. Так как заложенная в модели симметрия существенно используется в алгоритме расчета, рассматриваются только волны, распространяющиеся в направлении оси  $z$ .

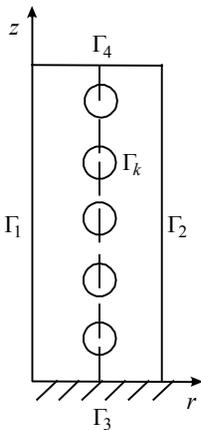


Рис.1 Область решения

Поставленная задача с математической точки зрения описывается уравнениями, выражающими законы сохранения, кинематические и физические соотношения для сжимаемой упругопластической вязкой среды в плоской системе координат [1].

Уравнение состояния использовалось в форме Грюнайзена

$$p = p_y(V) + \frac{\gamma(V)\rho_0 E_T}{V},$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность;  $V = \rho_0/\rho$  – удельный объем;  $p_y(V)$  – упругая составляющая давления;  $E_T$  – тепловая энергия единицы массы вещества;  $\gamma(V)$  – коэффициент Грюнайзена.

Зависимость  $p_y(V)$  вычислялась с помощью ударной адиабаты сплошной среды по методу [2]. Однако в отличие от упомянутой работы в выражении для  $p_y(V)$  учитывалась начальная энергия среды  $E_0$ . Для случая ударной адиабаты вещества в форме

$$p = p_0 \left( \frac{1}{V^k} - 1 \right).$$

Было получено и в дальнейшем использовалось выражение

$$p_y(V) = p_0 \left\{ \left[ \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)(n-1)}{n - (\gamma + 1)} V^{-n} + \frac{n}{2(n-\gamma)} - \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)n}{[n - (\gamma + 1)](\gamma + 1)} \right] \gamma V^{-(\gamma+1)} - \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + 1\right)}{\gamma + 1} - \frac{\gamma n}{2(n-\gamma)} V^{-(n+1)} \right\} - E_0 \gamma V^{-(\gamma+1)}.$$

Метод вычисления тепловой энергии  $E_T$ : вся область пористого тела разбивалась на подобласти  $G_k$ , каждая из которых содержала в центре схлопывающуюся пору (рис. 2). При схлопывании симметричных пор средняя скорость среды не изменяется, поэтому работа сил давления при затекании поры переходит во внутреннюю энергию. Предполагалось, что возникающая при схлопывании поры внутренняя энергия равномерно распределяется по частицам области  $G_k$ , так что на каждую лагранжеву частицу этой области приходится поток внутренней энергии, равный

$$-\frac{1}{N_k} \frac{\bar{p}_k}{\rho_0} \frac{dV_k}{dt},$$

где  $dV_k/dt$  – скорость изменения объема поры с номером  $k$ ,  $\bar{p}_k$  – среднее интегральное давление по границе области  $G_k$ ,  $N_k$  – число лагранжевых частиц в области. При этом скорость  $dV_k/dt$  находилась в результате расчетов перемещения лагранжевых координат границ поры. Таким образом, в предложенной модели фактически решалось следующее уравнение энергии:

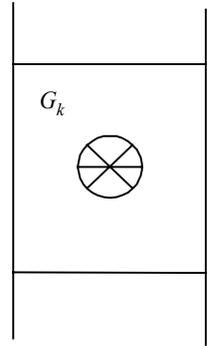


Рис. 2. Подобласть  $G_k$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{P}{\rho_0} \frac{dV}{dt} - \sum_k \frac{\bar{p}}{\rho_0 N_k} \frac{dV_k}{dt} + \frac{V}{\rho_0} \left[ D_{\sigma rr} \cdot \varepsilon_{rr} + D_{\sigma zz} \cdot \varepsilon_{zz} + D_{\sigma rz} \cdot \varepsilon_{rz} \right],$$

в котором начало затекания каждой поры автоматически учитывалось при достижении на границе каждой поры условия текучести Мизиса [1].

Начальное состояние материала пластины, которая двигалась со скоростью  $v_z = -u_0$ , предполагалось невозмущенным. Поэтому при  $t = 0$  в области, занятой материалом, задавались равенства

$$v_z = -u_0, v_r = 0, \varepsilon_{ij} = 0, \sigma_{ij} = 0, D_{\sigma ij} = 0, \rho = 0, \rho = \rho_0.$$

Поры в веществе полагались пустыми, поэтому в них задавалась  $\rho = 0$ .

В силу периодичности постановки задачи в направлении оси  $r$  в качестве области решения рассматривался показанный на рис. 1 прямоугольник, ограниченный поверхностями  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_k$ . При этом поверхности  $\Gamma_1, \Gamma_2$  являются поверхностями симметрии, а поверхность  $\Gamma_4$  – свободна от напряжений. Граничными условиями на поверхности контакта пластины с жесткой поверхностью  $\Gamma_3$  являются условия  $v_z = 0$  и  $\sigma_{zz} = 0$ . На свободной поверхности  $\Gamma_4$  отсутствуют нормальное и касательное напряжения, что равносильно равенствам  $\sigma_{nn} = 0$  и  $\sigma_{sn} = 0$ .

Расчет в ячейках, граничащих с пустыми порами, проводится точно так же, как и во внутренних ячейках области. Поскольку в граничных ячейках пор все параметры равны нулю, то на границах пор  $\Gamma_k$  автоматически выполняются условия, справедливые для свободных поверхностей [1].

Для решения поставленной задачи применялась разностная схема метода Уилкинса. В начальный момент времени для аппроксимации в окрестностях пор применялись сетки с квадратными и восьмигранными порами рис. 3. При прохождении ударной волны и затекании пор, разностная сетка в их окрестности приобретала вид, показанный на рис. 4. В процессе расчетов контролировалось расстояние между граничными узлами пор и их площадь. Как только эти величины становились меньше наперед заданных малых значений, пора считалась закрытой, а сетка в ее окрестности перестраивалась в новую, близкую к прямоугольной (рис. 4). При перестроении сетки с учетом законов сохранения пересчитывались все параметры как в узлах, так и во внутренних ячейках.

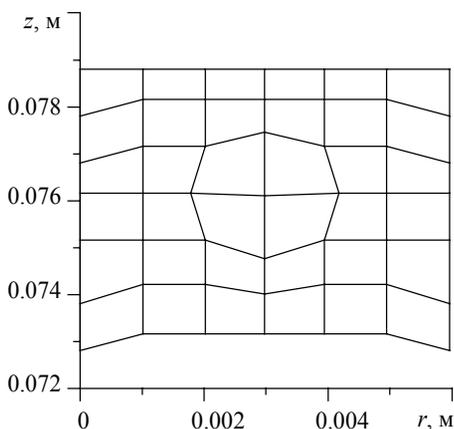


Рис. 3. Участок сетки с восьмигранными порами

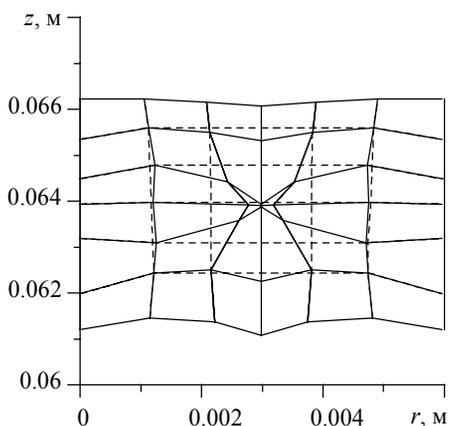


Рис. 4. Участок расчетной сетки в момент затекания поры

В некоторых случаях для предотвращения нежелательных искажений ячеек в процессе счета применялась в начальный момент времени неравномерная сетка, позволяющая уменьшить искажение ячеек в следующие моменты времени. Такая сетка показана на рис. 3. Однако в процессе расчетов во избежание дополнительных ошибок интерполяции перестройка сетки проводилась только один раз в окрестности каждого схлопывающегося узла.

Достоверность модели подтверждается сравнением ударных адиабат с экспериментальными данными, приведенными в [4]. На рис. 5 показана зависимость давления от плотности для свинца с пористостью  $\varepsilon = 0.16$ , рассчитанная по приведенной выше модели. Крестами отмечены экспериментальные точки. Пунктирной линией обозначена ударная адиабата сплошного свинца.

На рис. 6 приведены результаты расчета ударной адиабаты меди с пористостью  $\varepsilon = 0.3$  (сплошная кривая) и экспериментальные данные (кружки). Для сравнения приведена также зависимость, рассчитанная по известной формуле Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера [4] (штрихпунктир).

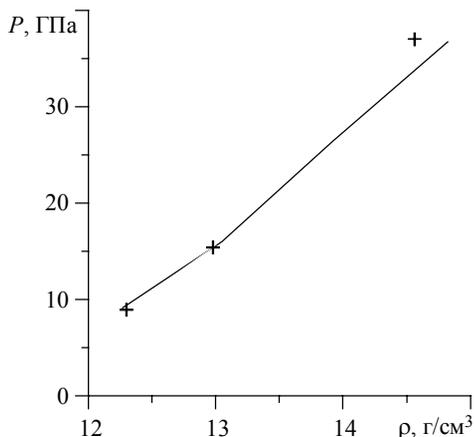


Рис. 5. Ударные адиабаты свинца: сплошной линией обозначены результаты расчета по вышеуказанной модели; крестами – экспериментальные данные.

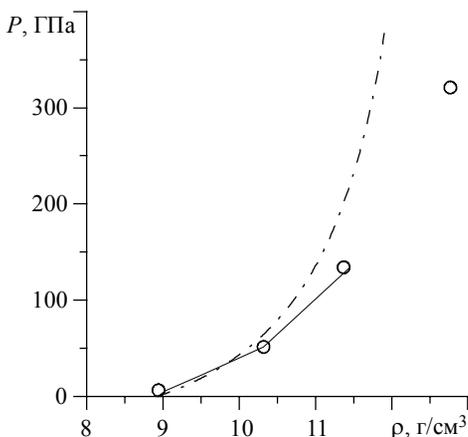


Рис. 6. Ударные адиабаты меди: сплошной линией обозначены результаты расчета по вышеуказанной модели; кружками – экспериментальные данные; штрихпунктирной линией – ударная адиабата Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера [4]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред. Т. 3. М.: МГТУ, 2000. 246 с.
2. Альтшуллер Л.В., Крупников К.К., Леденев Б.Н. и др. Свойства конденсированных веществ при высоких давлениях и температурах // Сб. статей / под ред. Р.Ф. Трунина. – ВНИИЭФ, 1992. С. 8–19.
3. Жерноклетов М.В., Зубарев В.Н., Трунин Р.Ф., Фортвов В.Е. Экспериментальные данные по ударной сжимаемости и адиабатическому расширению конденсированных веществ при высоких плотностях энергии. Черноголовка, 1996.
4. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Физматгиз, 1963.

Статья принята в печать 08.11.2010 г.

*Baganina A.E.* MATHEMATICAL MODEL OF SHOCK WAVE PROPAGATION THROUGH POROUS MEDIA. The paper presents the method and results of mathematical simulation of shock wave propagation through porous elastic and elastoplastic media with explicit marking of pores.

Keywords: Mechanics of deformable bodies, elasticity, deformation, porous media

*BAGANINA Aleksandra Evgen'evna* (Tomsk State University)

E-mail: videnie@sibmail.com