

УДК 514.85

Д.О. Диль

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕДАТОЧНОГО МЕХАНИЗМА С ЭКСЦЕНТРИКОВО-ЦИКЛОИДАЛЬНЫМ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

Построена математическая модель эксцентрико-циклоидального зацепления, состоящего из трёх секций. Создана компьютерная программа, позволяющая определять контактные усилия, скоростное скольжение и КПД установки при заданных входных параметрах механизма. Произведен анализ влияния сил трения на контактные напряжения и КПД.

Ключевые слова: математическое моделирование, эксцентриково-циклоидальное зацепление, контактные усилия, силы трения.

До настоящего времени расчет трансмиссионных систем проводился на базе инженерных формул, которые учитывали как геометрию зацепления, так и силовые и кинематические характеристики передачи. Для давно разработанных зацеплений эти формулы представляют собой сугубо эмпирические зависимости, поскольку в них были внесены многочисленные уточнения из практики с целью применения этих зависимостей для оптимизации параметров зацепления. Методы компьютерного моделирования применялись лишь для визуализации предлагаемых конструкций. Лишь в последнее время с появлением современных мощных пакетов прикладных математических программ стало возможным математическое моделирование систем передачи движения (СПД) в самом широком смысле.

С другой стороны, развитие металлообработки привело к появлению четырех и пятикоординатных станков с ЧПУ, обеспечивающих возможность создания СПД нового поколения с любой наперед заданной формой рабочей поверхности. Таким образом, появилась возможность для конструирования принципиально новых форм, обладающих уникальными свойствами. Однако динамическое взаимодействие новых форм не укладывается в ранее разработанные инженерные теории. Все это привело к появлению новых универсальных математических моделей, опирающихся на базовые положения теоретической механики, аналитической и дифференциальной геометрии.

В 2007 г. группа томских конструкторов под руководством В.В. Становского предложила принципиально новую разработку эксцентриково-циклоидального (ЭЦ) зацепления. Ее большим достоинством является возможность получения в одной ступени повышенного передаточного отношения.

В настоящей работе проведено усовершенствование математической модели редуктора с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1 – 3]. Проводится расчёт усилий с учётом силы трения, рассчитывается скоростное скольжение и определяется КПД установки в усовершенствованном варианте силового расчета.

1. Описание механизма

На рис. 1 и 2 представлены сечения механизма, выполненные перпендикулярно осям вращения. В качестве профиля малого колеса используется эксцентрично смещённая окружность. Вращая эксцентрично смещённый центр вокруг непод-

вижной точки, а также саму окружность вокруг этого центра, а можно получить семейство окружностей, огибающей для которого будет эквидистанта эпитрохоиды. Эта огибающая и берётся в качестве профиля большого колеса. Если к малому валу такого механизма приложить постоянный вращающий момент, то силовая нагрузка будет осуществляться только на половине оборота (рис. 1). На второй половине силового контакта нет (рис. 2).

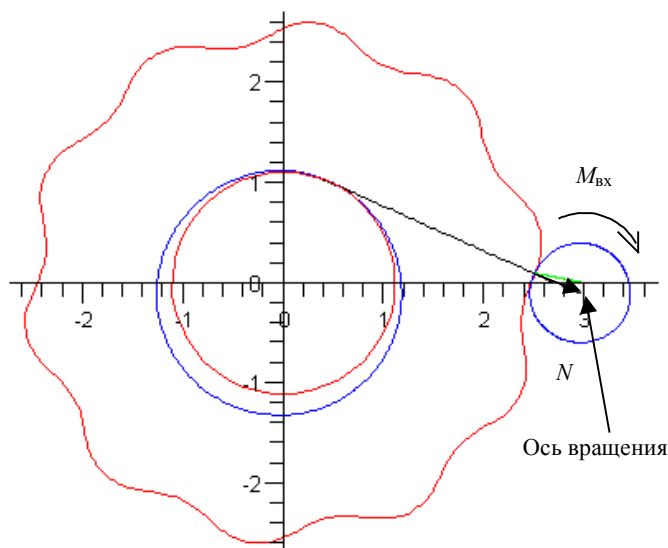


Рис. 1. Плоское сечение рассматриваемого механизма в момент времени, когда осуществляется силовой контакт

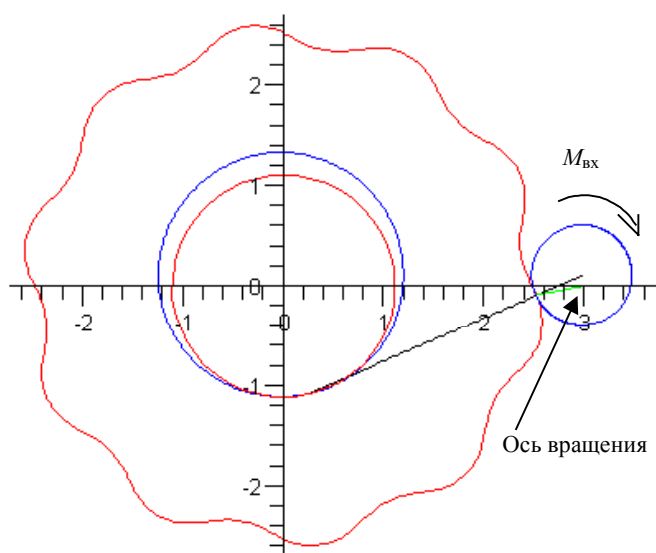


Рис. 2. Плоское сечение рассматриваемого механизма в момент времени, когда силовой контакт не осуществляется

Если работает механизм, состоящий из двух эксцентриков, один из которых повернут на пол-оборота относительно другого, и двух, отвечающих этим эксцентрикам эпитрохоид, то остаётся две точки, в которых нет передачи силового момента. По этим причинам используется механизм, составленный из трёх деталей, смещённых на треть оборота. Полученные результаты можно легко обобщить на большее число деталей и даже перейти к непрерывно закрученному по винту механизму.

2. Математическая модель механизма

Возьмём неподвижную декартову систему координат. В ней параметрически зададим эквидистанту эпитрохоиды. Сначала определим параметрические уравнения эпитрохоиды. Она образуется при качении подвижной окружности по неподвижной. Совместим центр неподвижной окружности с началом координат. Тогда, согласно [1], с учётом вводимых обозначений уравнения растянутой эпициклоиды будут иметь следующий вид:

$$x(t) = -e \cdot \cos(t) + h \cdot \cos\left(\frac{t}{n}\right), \quad y(t) = -e \cdot \sin(t) + h \cdot \sin\left(\frac{t}{n}\right),$$

где $t = 0 \dots 2\pi n$ – параметр, e – эксцентриситет $e = a - b$, a и b – радиусы большой и малой окружностей (с помощью которых образуется эпитрохоида) соответственно, h – межцентровое расстояние колес; $(n - 1)$ – совпадает с числом циклов кривой.

Для получения параметрических уравнений эквидистанты необходимо найти нормаль к эпитрохоиде в каждой её точке и перенести эту точку вдоль нормали на расстояние r , равное радиусу малой окружности.

В итоге параметрические уравнения эквидистанты эпитрохоиды будут иметь следующий вид:

$$X(t) = x(t) + r \cdot nx1(t), \quad Y(t) = y(t) + r \cdot ny1(t),$$

где $nx1(t)$, $ny1(t)$ – координаты единичной нормали в точке эпитрохоиды, отвечающей конкретному значению параметра t .

Параметрическое задание эксцентрично смещённой окружности с центром в точке $(h, 0)$ будет иметь вид

$$x_{ocr}(t) = g(t) \cdot \cos(t) + h, \quad y_{ocr}(t) = g(t) \cdot \sin(t),$$

где $g(t) = \sqrt{r^2 + e^2 - 2 \cdot r \cdot e \cdot \cos(t - \arcsin\left(\frac{e}{r} \cdot \sin(t)\right))}$ – расстояние от текущей точки до эксцентрично смещённого центра.

3. Моделирование усилий в точках контакта и определение потерь мощности на трение

В рассматриваемой нами задаче к малому валу прикладывается постоянный вращающий момент. Для расчёта контактного усилия – нормальной реакции в точке контакта – воспользуемся уравнением движения малого вала, предполагая, что движение равномерно. В этом случае сумма моментов всех сил относительно оси эксцентрика будет равна нулю. Предполагая, что в точке контакта осуществляется небольшое проскальзывание (присутствует разница скоростей соприка-

сающихся точек эксцентрика и эпитрохоиды), модуль силы трения определим как произведение контактного усилия на коэффициент трения скольжения. Тогда контактное усилие можно моделировать по формуле

$$N_i(\varphi) = \frac{M_{\text{ex}} \cdot \sin \gamma_i(\varphi)}{\rho_i(\varphi) \sum_{i=1}^{k(\varphi)} (\sin^2 \gamma_i(\varphi) + f \cdot \sin \gamma_i(\varphi) \cdot \cos \gamma_i(\varphi))},$$

где $\gamma_i(\varphi)$ – угол между нормалью и радиус-вектором точки контакта $\rho_i(\varphi)$ в системе координат с центром, лежащим на оси эксцентрика, f – коэффициент трения скольжения. Здесь φ – угол поворота сателлита (большого ведомого вала), а $k(\varphi)$ – количество работающих элементов при текущем угле поворота φ . На рис. 3 представлена зависимость контактного усилия от угла поворота при входном моменте 10 Н·м, найденная при двух различных значениях коэффициента трения.

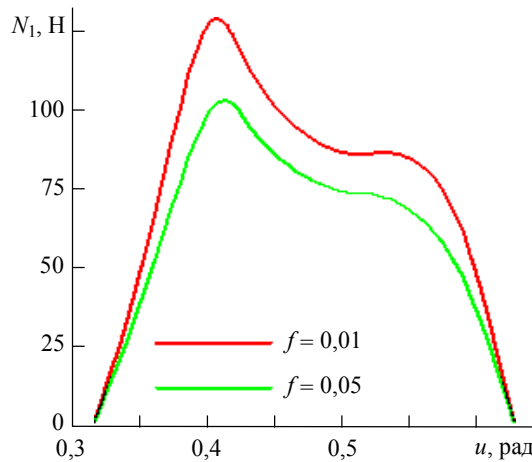


Рис. 3. Зависимость контактного усилия N_1 от угла поворота сателлита u

Применяя к рассматриваемому механизму принцип Даламбера – Лагранжа, получим следующее выражение для определения выходного момента – $M_{\text{вых}}$:

$$M_{\text{вх}} \cdot \omega_1 = M_{\text{вых}} \cdot \omega_2 - Q_{\text{тр}}.$$

Здесь ω_1 , ω_2 – угловые скорости эксцентрика и сателлита соответственно. При этом $\omega_1 = (n-1) \cdot \omega_2$, где $(n-1)$ – количество циклов эпитрохоиды; $Q_{\text{тр}}$ – потери входной мощности на трение, определяемые следующим образом:

$$Q_{\text{тр}}(\varphi) = f \sum_{i=1}^{k(\varphi)} N_i(\varphi) \cdot \Delta V_i(\varphi),$$

где $\Delta V_i(\varphi)$ – скоростное скольжение (разность скоростей соприкасающихся точек деталей в проекции на касательное направление). На рис. 4 представлена динамика изменения скоростного скольжения с изменением угла поворота, по которому можно судить о потерях на трение. Меняя входные параметры системы, можно оптимизировать их по потерям входной мощности на трение.

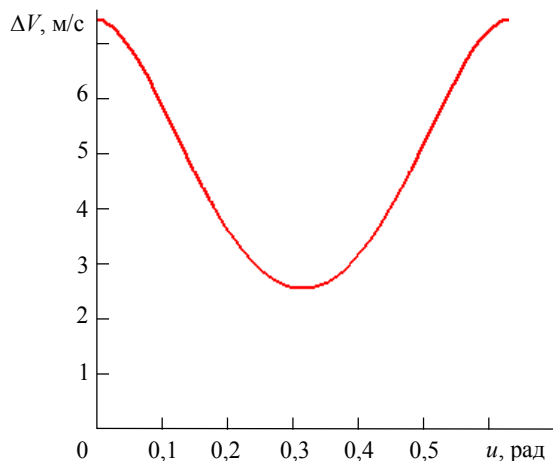


Рис. 4. Зависимость скоростного проскальзывания ΔV от угла поворота спутника u

Для определения мгновенных значений КПД используем следующую формулу:

$$\eta = \frac{M_{\text{вх}} \cdot \omega_1 - Q_{\text{тр}}}{M_{\text{вх}} \cdot \omega_1}.$$

На рис. 5 представлена динамика изменения мгновенных значений КПД с изменением угла поворота при разных значениях коэффициента трения, исходя из которого становится очевидной важность учёта трения.

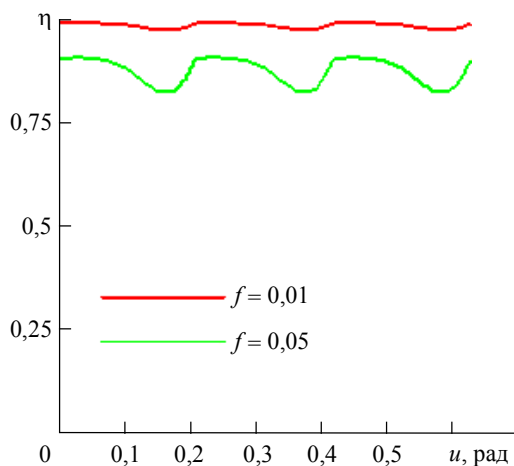


Рис. 5. Зависимость КПД от угла поворота спутника u

Заключение

Построена кинематическая схема механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением. Построена модель для расчёта контактных усилий с учётом силы трения и сделаны выводы о важности учёта трения при практических расчётах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шанников В.М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением. М.: ГНТИМЛ, 1948.
2. Бубенчиков А.М. и др. Математическое моделирование работы зубчатой реечной передачи с эксцентриково-циклоидальным зацеплением // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 1. С. 53–59.
3. Щербаков Н.Р. Математическое и компьютерное моделирование динамического состояния систем передачи движения: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Том. гос. ун-т. Томск, 2009. 30 с.
4. Савёлов А.А. Плоские кривые. М.: ГИФМЛ, 1960. 294 с.

Статья принята в печать 03.09.2010 г.

Dil' D.O. THE MATHEMATICAL MODEL OF TRANSMISSION GEAR WITH ECCENTRIC-CYCLOID TOOTH SYSTEM. The eccentric-cycloid mathematical model consisting of three sections was developed. A computer program which determines contact forces, high-speed slipping and coefficient of efficiency has been designed. The impact analysis of frictional force on contact stress was performed.

Keywords: mathematical simulation, eccentric-cycloid tooth system, contact stress, frictional force.

DIL' Denis Olegovich (Tomsk State University)

E-mail: nrs@math.tsu.ru