МАТЕМАТИКА

УДК 519.46

А.И. Забарина, Г.Г. Пестов

ДВУМЕРНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ

Доказано, что в двумерно упорядоченной группе множество элементов конечного порядка образует нормальную подгруппу.

Ключевые слова: *n-мерный порядок, n-мерно упорядоченная группа, реализация 2-упорядоченного множества, проекция двумерного порядка на прямую.*

1. Двумерно упорядоченные множества

Определение линейно упорядоченного множества отталкивается от свойств множества точек, расположенных на прямой. Поэтому представляется естественным при выработке понятия двумерно упорядоченного множества исходить из свойств множества точек, расположенных на плоскости. Подобно тому, как на прямой имеется естественный линейный порядок, на плоскости имеется ориентация, которую разумно рассматривать как естественный двумерный порядок. Определение двумерно упорядоченного множества может быть задано либо в аксиоматической форме [1, с. 12], либо через так называемую реализацию множества в $\Re^2$ [1, с. 11]. В данной работе используется определение двумерно упорядоченного множества через реализацию на плоскости. Отметим, что определение двумерно упорядоченного множества в аксиоматической форме и определение через реализацию на плоскости являются эквивалентными (готовится статья с доказательством их эквивалентности).

Для удобства читателя приведем оба определения 2-упорядоченного множества.

Определение (в аксиоматической форме). Пусть M – непустое множество и на M^3 задана функция $\zeta(x,y,z)$, принимающая значения 0, 1, –1 и удовлетворяющая следующим условиям:

A_1. Функция $\zeta(x,y,z)$ меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов.

A_2. Если четвёрка $A\subset M$ и существуют $a,b,c \in A$, такие, что $\zeta(a,b,c)\neq 0$, то а) Для каждой пары $x,y\in A$ найдётся $z\in A$, такое, что $\zeta(x,y,z) \neq 0$, b) существует такая пара $a,b \in A$, что для $x,y\in A\setminus\{a,b\}$ выполнено $\zeta(a,b,x)= \zeta(a,b,y)\neq 0$.

A_3. Если $A\subset M$, $|M|=5$, $a,b \in A$, то существуют такие $c\in A$ и $\varepsilon=\pm 1$, что для всех $x\in A\setminus\{a,b\}$, $\zeta(a,c,x)\neq 0$, выполнены равенства $\zeta(a,b,x) = \varepsilon\zeta(a,c,x)$.

Пара $<M,\zeta>$ называется *2-упорядоченным* (или *двумерно упорядоченным*) множеством. Функция $\zeta(x,y,z)$ называется *функцией двумерного порядка* на множестве M.

Второе определение 2-упорядоченнного множества исходит из идеи реализации множества на плоскости. Введём сначала естественную ориентацию плоскости. Пусть x,y,z есть точки плоскости $\Re^2$. Если обход тройки точек (x,y,z) происходит против часовой стрелки, то полагаем $\eta(x, y, z)=1$. Если обход происходит по часовой стрелке, полагаем $\eta(x, y, z) = -1$. Наконец, если точки x,y,z расположены на одной прямой, то принимаем $\eta(x, y, z) = 0$. Функцию $\eta(x, y, z)$ назовём *естественной ориентацией* плоскости $\Re^2$. Разумеется, функцию $\eta(x, y, z)$ легко задать как знак соответствующего определителя.

Если для множества $A\subset M$, $|A|<5$ существует отображение $A\to\Re^2$, такое, что $\forall x,y,z\in A$ выполнено $\zeta(x,y,z) = \eta(\varphi(x),\varphi(y),\varphi(z))$, то говорят, что φ есть *реализация* множества A в плоскости $\Re^2$ или что множество A *реализуемо* в $\Re^2$.

Если каждое множество $A\subset M$, $|A|\le 5$, реализуемо в $\Re^2$, то пара $<M,\zeta>$ называется *двумерно упорядоченным множеством*. В дальнейшем вместо «двумерно упорядоченное множество $<M,\zeta>$» будем часто говорить «двумерно упорядоченное множество M». Порядок ζ в двумерно упорядоченном множестве $<M,\zeta>$ называется *невырожденным*, если $\zeta(x,y,z)$ не обращается тождественно в нуль на M. Пусть $<M,\zeta>$ есть 2-упорядоченное множество, $a,b\in M$. Множество всех таких $x\in M$, что $\zeta(a,b,x) = 0$, называется *прямой*, проходящей через a и b , и обозначается l_{ab}. Если для всех $x\in M\setminus\{a,b\}$выполнено $\zeta(a,b,x)>0$, то $\{a,b\}$ называется *внешней гранью* множества $<M,\zeta>$. Более полные сведения о двумерно упорядоченных множествах представлены в [1]. А в данной статье мы имеем дело только с двумерно упорядоченными множествами. Для произвольного натурального n определение n-упорядоченного множества в аксиоматической форме дано в [2], некоторые теоремы об n-упорядоченных группах изложены в [3].

2. Двумерно упорядоченные группы. Постановка задачи. Теорема об элементах конечного порядка

Пусть на группе G задан двумерный порядок $\zeta(x,y,z)$. Будем говорить, что порядок $\zeta(x,y,z)$ *согласован* с групповой операцией, если для всех элементов x,y,z,a группы G выполнено $\zeta(ax,ay,az) = \zeta(xa,ya,za) = \zeta(x,y,z)$. Группу с заданным на ней двумерным порядком, согласованным с групповой операцией, назовём *двумерно упорядоченной группой*. Мультипликативная группа комплексных чисел C^* служит примером абелевой двумерно упорядоченной группы. Тоболкин А.А. показал как можно строить неабелевы n-мерно упорядоченные группы, отправляясь от линейно упорядоченных групп [4].

Теорема. 1. Пусть $<G,\zeta(x,y,z)>$ есть невырожденная двумерно упорядоченная группа и для некоторого натурального n выполнено $a^n\in Z(G)$. Тогда $a\in Z(G)$.

Доказательство. Пусть $a^n\in Z(G)$, $a^{n+1}\notin Z(G)$, где n натуральное.

Тогда найдётся такое $b\in G$, что b не коммутирует с a. Существует такое k натуральное, что $[a^k , b] \ne e$, $[a^{k+1}, b] = e$, Рассмотрим по отдельности два случая: 1) $b\in l_{ea}$, 2) $b\notin l_{ea}$.

1) Пусть сначала $b\in l_{ea}$. Тогда, по определению прямой в двумерно упорядоченном множестве, $\zeta(e,a,b)=0$. Отсюда, пользуясь инвариантностью ζ, получаем последовательно $\zeta(e,a,b^a)=0,\dots,\zeta(e,a,b^{a^k}) = 0$. Итак, элементы множества $\{b, b^a, \dots, b^{a^k}\}$ принадлежат прямой l_{ea}. Очевидно, что они попарно различны.

Далее, существует такой элемент c, что $c \notin l_{ea}$. В самом деле, если бы все элементы группы G принадлежали прямой l_{ea}, то $\zeta(x,y,z)$ равнялось бы нулю для всех

$x,y,z\in G$, что противоречит условию невырожденности двумерного порядка на группе G . Итак, $\zeta(e,a,c)\neq 0$. Но $\zeta(e,a,c)= \zeta(e,a,c^a)\neq 0$. Отсюда $c^a\notin l_{ea}$. Теперь $\zeta_c(x,y)$ и $\zeta_c{}^a(x,y)$ есть линейные порядки на l_{ea}. Следовательно, существует $\delta=\pm 1$, такое что для всех x,y из l_{ea}. выполнено $\zeta_c(x,y)=\delta\zeta_c{}^a(x,y)$ [1]. Из $\zeta(e,a,c)=\zeta(e,a,c^a)$ следует $\zeta_c(e,a)=\zeta_c{}^a(e,a)$. Поэтому, $\delta = 1$. Итак, для всех x,y из l_{ea} выполнено $\zeta_c(x,y)=\zeta_c{}^a(x,y)$, то есть $\zeta(c,x,y)=\zeta(c^a,x,y)$. Аналогично находим $\zeta(c,x,y)=\zeta(c,x^a,y^a)$, откуда $\zeta_c(x,y)=\zeta_c(x^a,y^a)$.

Итак, отношение $\zeta_c(x,y)=1$ есть отношение линейного порядка на l_{ea}, инвариантное относительно a-сопряжений. Обозначим отношение $\zeta_c(x,y) =1$ через $x < y$. Пусть, для определённости, $\zeta_c(b,b^a)=1$. Отсюда $\zeta(c,b,b^a)=1$, $\zeta(c^a, b^a, b^{a^2}) = 1$, $\zeta(c\ \ , b^a, b^{a^2}) = 1$. Итак, $b<b^a$ влечёт неравенство $b^a < b^{a^2}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим строгие неравенства: $b < b^a < b^{a^2} \ldots < b^{a^k} < b$ – противоречие.

Итак, предположение $b\in l_{ea}$ ведёт к противоречию.

2) Предположим, что $b\notin l_{ea}$. Тогда $\zeta(e,a,b)\neq 0$. Примем, для определённости, что $\zeta(e,a,b)> 0$. Тогда, ввиду инвариантности $\zeta(x,y,z)$ получим

$$\zeta(e,a,b) = \ldots = \zeta(e,a,b^{a^k}) = 1 . \qquad (*)$$

Итак, (ea) есть внешняя грань в двумерно упорядоченном множестве $\{ e, a, b,\ b^a ,\ldots, b^{a^k} \}$.

Каков знак величины $\zeta(a,b,b^a)$?

а) Случай $\zeta(a,b,b^a)=0$. Поскольку точки a ,b, b^a лежат на одной прямой l_{ab}, то и точки a ,b^a , b^{a^2} также лежат на этой прямой. Продолжая эти рассуждения и далее, заключаем, что точки $\{a,\ b,\ b^a ,\ldots, b^{a^k}\}$ лежат на прямой l_{ab}.

Так как $\zeta(e,a,b)\neq 0$, то $e\notin l_{ab}$. Поэтому $\zeta_e(x,y)$ есть линейный порядок на l_{ab}. Этот порядок инвариантен относительно a-сопряжений: $\zeta(e,x,y)=\zeta(e,x^a,y^a)$, откуда $\zeta_e(x,y)= \zeta_e(x^a,y^a)$.

Обозначим отношение $\zeta_e(x,y)=1$ через $x<y$. Имеем $b < b^a < b^{a^2} \ldots < b^{a^{k+1}} = b$, откуда $b<b$ – противоречие.

b) Случай $\zeta(a,b,b^a)\neq 0$. Пусть, например, $\zeta(a,b,b^a)=1$. Имеем $\zeta(a, b^a, b^{a^2}) > 0$, …, $\zeta(a, b^{a^K}, b) > 0$. Обозначим через S множество, содержащее a и точки вида b^{a^p} , где $0 \le p \le k$. Во множестве S точка a – внутренняя. Поэтому в S найдутся точки x,y,z , такие, что

$$\zeta(x,y,a)>0,\ \zeta(y,z,a,)>0,\ \zeta(z,x,a)>0. \qquad (**)$$

В то же время, из (*) следует, что

$$\zeta(e,a,x)>0,\ \zeta(e,a,y)>0,\ \zeta(e,a,z)>0. \qquad (***)$$

Легко видеть, что пятёрка (e,a,x,y,z), удовлетворяющая соотношениям (**) и (***), нереализуема на плоскости. В самом деле, если бы существовала её реализация φ на плоскости, то из (**) следовало бы, что $\varphi(a)$ лежит внутри треугольника с вершинами $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$. С другой стороны, из (***) следовало бы, что точки φ(x), φ(y), φ(z) расположены по одну сторону от прямой, проходящей через точки φ(e), φ(a). Итак, предположение о том, что $a \notin Z(G)$, ведёт к противоречию.

Замечание. Теорема 1 является обобщением теоремы 20 [5].

Следствие 1. Множество всех элементов конечного порядка двумерно упорядоченной группы G есть её нормальная подгруппа.

Следствие 2. Если элемент a не принадлежит центру двумерно упорядоченной группы G, то и никакая степень этого элемента ему не принадлежит.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. Томск, 2003.
2. *Пестов Г.Г.* *n*-упорядоченные множества // Тр. Иркут. гос. ун-та. 1970. Т. 74. Вып. 6. С. 146–169.
3. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* Об *n*-мерно упорядоченных группах // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 40–43.
4. *Тоболкин А.А.* Об *n*-упорядоченных группах // Материалы X Всероссийской конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и образование». Томск: Изд-во ТГПУ, 2006. Т. 1. Ч. 2. С. 107–113.
5. *Fuchs L.* Partially ordered algebraic systems. Oxford; London; New York; Paris: Pergamon press, 1963.

Статья принята в печать 22.01.2011 г.

Zabarina A. I., *Pestov G. G.* TWO-DIMENSIONALLY ORDERED GROUPS. It is proved that the set of elements of order two in a two-ordered group is a normal subgroup.

Keywords: 2-dimensional order, 2-ordered group, realization of a two-ordered set, two-order projection to a straight line.

ZABARINA Anna Ivanovna (Tomsk State Pedagogic University)
PESTOV German Gavrilovich (Tomsk State University)
E-mail: pppestov@mail.tomsknet.ru