

УДК 515.125+517.5

А.П. Кармазин, Д.Р. Мухутдинова

**УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ
ВНУТРЕННИХ ГРАНИЧНЫХ КОМПОНЕНТ
ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЯХ ОБЛАСТЕЙ R^n**

Рассматриваются различные случаи и условия устранимости множеств при квазиизометрических отображениях, проводится исследование распределения внутренних граничных компонент областей R^n .

Ключевые слова: квазиизометрическое отображение, внутренние метрики, бесконечносвязные области, устранимые множества, распределение граничных компонент.

В работах [1] и [2] А.В. Сычев и В.В. Асеев рассмотрели случаи устранимости множеств при квазиконформных отображениях. В данной статье исследуются вопросы устранимости различных множеств при ρ -квазиизометрических и δ -квазиизометрических отображениях. Естественно, что результаты работ [1, 2] справедливы для ρ - и δ -квазиизометрий, которые являются подклассами квазиконформных отображений. Однако, так как ρ - и δ -квазиизометрические отображения являются строгими подклассами квазиконформных, то существует возможность получения более сильных результатов при их исследованиях. Например, в силу результатов работ [1, 2] следует, что спрямляемые кривые, лежащие в пространственной области, устранимы при квазиконформных отображениях, в частности и при ρ -, δ -квазиизометриях этой области. Однако при ρ - и δ -квазиизометрических отображениях спрямляемые кривые переходят в спрямляемые, что невозможно при квазиконформных отображениях. Тем самым результаты работ [1, 2] для случая ρ - и δ -квазиизометрий существенно уточняются. Также в данной работе рассматривается вопрос о распределении различных множеств при ρ - и δ -квазиизометрических отображениях, что является естественным продолжением вопроса их устранимости.

1. Основные понятия и обозначения

Пусть R^n , $n \geq 1$ есть n -мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Под областью D будем понимать ограниченный гомеоморф шара в R^n . Пусть $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2))^{1/2}$ есть евклидово расстояние между точками x и y в R^n .

Обозначим через $B^n(x, r)$ ($S^{n-1}(x, r)$) открытый шар (сферу) в R^n с центром в точке x радиуса $r > 0$. Пусть A есть множество из R^n . Обозначим через $\bar{A}$ евклидово замыкание, через ∂A евклидову границу, через $d(A)$ евклидов диаметр множества A в R^n .

1.1. Определение. Область $D \subset R^n$ назовем *жордановой*, если она гомеоморфна шару и ∂D гомеоморфна сфере из R^n .

1.2. Определение. Непрерывное отображение $L: \Delta \rightarrow D$, где Δ есть некоторый отрезок из R^1 , назовем *путем*, или *кривой*, в области D .

Пусть $L:[a, b] \rightarrow R^n$ есть путь в R^n и $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = b$ есть разбиение сегмента $[a, b]$.

1.3. Определение. Длиной $l(L)$ пути L называется точная верхняя грань сумм $\sum_{i=1}^k |L(t_i) - L(t_{i-1})|$ по всем разбиениям $[a, b]$. Если $l(L) < \infty$, то говорят, что путь L *спрямляем*; если $l(L) = \infty$, то говорят, что путь L *неспрямляем*. Если путь $L:[0, 1) \rightarrow R^n$ полуоткрыт, то говорят, что он *спрямляем*, если $\lim_{t \rightarrow 1} l(L([0, t])) < \infty$.

Для пути $L:[0, 1) \rightarrow D$ через $C(L, 1)$ обозначим предельное множество отображения L в точке 1: $b \in C(L, 1) \Leftrightarrow$ существует последовательность чисел $t_k \rightarrow 1$, $\{t_k\} \subset [0, 1)$ такая, что $L(t_k) \rightarrow b$ в евклидовой норме при $k \rightarrow \infty$.

Определим в области $D \subset R^n$ следующие метрики: внутреннюю метрику Римана – Александрова $\rho_D(x, y)$, равную точной нижней грани длин кривых, лежащих в D и соединяющих точки x, y из D ; относительное расстояние Мазуркевича $\delta_D(x, y)$, равное точной нижней грани евклидовых диаметров связных подмножеств области D , содержащих точки x, y из D . Очевидно, что имеет место следующее соотношение:

$$d(x, y) \leq \delta_D(x, y) \leq \rho_D(x, y), \quad \forall x, y \in D. \quad (1)$$

Отсюда следует очевидное утверждение:

1.4. Утверждение. Если последовательность точек $\{x_m\}$ из D фундаментальна по метрике ρ_D , то она одновременно фундаментальна по метрикам δ_D и d , причем $\{x_m\}$ сходится в евклидовой метрике к некоторой точке $b \in \bar{D}$.

1.5. Определение. Гомеоморфизм $f: D \rightarrow G$ называется δ -квазиизометрией, если существует число $K \in [1, \infty)$, такое, что

$$K^{-1}\delta_D(x, y) \leq \delta_G(f(x), f(y)) \leq K\delta_D(x, y), \quad \forall x, y \in D. \quad (2)$$

Гомеоморфизм $f: D \rightarrow G$ называется ρ -квазиизометрией, если существует число $K \in [1, \infty)$, такое, что

$$K^{-1}\rho_D(x, y) \leq \rho_G(f(x), f(y)) \leq K\rho_D(x, y), \quad \forall x, y \in D. \quad (3)$$

В силу (1) очевидно, что любая δ -квазиизометрия одновременно является и ρ -квазиизометрией. Отсюда следует, что любой результат о поведении ρ -квазиизометрических гомеоморфизмов справедлив также и для класса δ -квазиизометрий. Обратное утверждение, в общем случае, неверно.

1.6. Определение. Величины $\rho_D(A) = \sup_{x, y \in A} \rho_D(x, y)$ и $\delta_D(A) = \sup_{x, y \in A} \delta_D(x, y)$ назовем соответственно ρ_D -диаметром и δ_D -диаметром множества A .

Замечание 1. Из ограниченности области D следует, что $\delta_D(D) \leq d(D) < \infty$. Тогда, очевидно, что δ_D -диаметр любого подмножества $A \subset D$ ограничен сверху постоянной величиной, равной диаметру области D : $\delta_D(A) \leq d(D)$. В общем случае ρ_D -диаметр ограниченной области D может быть бесконечным. Поэтому связное подмножество A , целиком лежащее в D , может иметь сколь угодно большой ρ_D -диаметр. Следует отметить при этом, что неспрямляемая кривая γ может иметь сколь угодно малый ρ_D -диаметр и, в частности, δ_D -диаметр.

Обозначим через $[D]_\rho$ пополнение области $D \subset R^n$ по метрике ρ_D , а через $[D]_\delta$ – пополнение $D \subset R^n$ по метрике δ_D .

Обозначим $V_D^\delta(x, \alpha) = \{y \in D, \delta_D(x, y) < \alpha\}$, $V_D^\rho(x, \alpha) = \{y \in D, \rho_D(x, y) < \alpha\}$. Эти множества всегда связны в D .

1.7. Утверждение (см. [3]). Пусть $f: D \rightarrow G$ есть ρ -квазиизометрия, тогда f продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: [D]_\rho \rightarrow [G]_\rho$. Аналогично, если $f: D \rightarrow G$ есть δ -квазиизометрия, тогда f продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: [D]_\delta \rightarrow [G]_\delta$.

1.8. Определение. Носителем элемента $b^* \in [D]_\lambda$ пополнения области D по некоторой метрике λ называется множество $I(b^*) = \{b \in \partial D, \exists \{x_n\} \in b^*, \text{ такие, что } b \text{ есть предельная точка } \{x_n\}\}$. В нашем случае за λ принимается одна из метрик ρ_D, δ_D .

Заметим, что носителем элемента $[D]_\rho \setminus D$ или $[D]_\delta \setminus D$ всегда является точка ∂D , при этом одна и та же точка ∂D может быть носителем нескольких или даже бесконечно многих элементов пополнения $[D]_\rho$ и соответственно $[D]_\delta$.

1.9. Утверждение (см. [3]). Пополнение $[D]_\rho$ области $D \subset R^n$ по метрике ρ_D присоединяет к D все точки ∂D , достижимые некоторым спрямляемым путем из D .

1.10. Утверждение (см. [3]). Пополнение $[D]_\delta$ области D по метрике δ_D присоединяет к D все точки ∂D , достижимые некоторым путем из D .

Введем на D дополнительно в рассмотрение метрику Хаусдорфа, определенную на основе внутренних метрик ρ_D и δ_D :

$$r_H^\delta(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} \delta_D(a, B), \sup_{b \in B} \delta_D(b, A) \},$$

$$r_H^\rho(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} \rho_D(a, B), \sup_{b \in B} \rho_D(b, A) \},$$

где $A, B \subset D$ – замкнутые относительно D подмножества D . Кроме того, введем метрику Хаусдорфа в R^n , $n \geq 2$:

$$r_H(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A) \},$$

где $A, B \subset R^n$.

Напомним некоторые понятия, связанные с топологическим пределом множеств (см. [4]).

1.11. Определение. Пусть $\{A_m\}$ есть последовательность некоторых множеств R^n . Точка b принадлежит *нижнему топологическому пределу* последовательности $\{A_m\}$: $b \in \varprojlim_{m \rightarrow \infty} A_m$, если любая окрестность точки b пересекается со всеми множе-

ствами A_m , начиная с некоторого номера m . Точка b принадлежит *верхнему топологическому пределу* последовательности $\{A_m\}$: $b \in \varprojlim_{m \rightarrow \infty} A_m$, если любая окрест-

ность точки b пересекается с бесконечным числом множеств A_m . Говорят, что множество A является *топологическим пределом* последовательности $\{A_m\}$:

$$A = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} A_m, \text{ если } \varprojlim_{m \rightarrow \infty} A_m = A = \varprojlim_{m \rightarrow \infty} A_m.$$

1.12. Теорема. (Обобщенная теорема Больцано – Вейерштрасса, см. [4].) Любая последовательность подмножеств сепарабельного пространства содержит сходящуюся топологически подпоследовательность (топологический предел которой может быть пустым множеством).

1.13. Теорема. (Теорема Зоретти, см. [4].) Во всяком компактном метрическом пространстве топологический предел сходящейся последовательности связных множеств есть связное множество.

Вопросы устранимости различных подмножеств областей $D \subset R^n$ при отображениях некоторого класса гомеоморфизмов является важным в теории функций и ее приложениях. Для исследования этого вопроса будем пользоваться некоторыми понятиями и результатами работ [1, 2].

1.14. Определение (см. [1]). Пусть $\alpha > 0$ и E – множество из R^n . Рассмотрим счетное покрытие $\{E_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, множества E открытыми множествами E_i , такими, что $d(E_i) < r$, $r > 0$. Пусть $\Lambda_\alpha^r(E) = \inf \sum_i d(E_i)^\alpha$, где точная нижняя грань берется по всем таким покрытиям. Величина $\Lambda_\alpha(E) = \lim_{r \rightarrow 0} \Lambda_\alpha^r(E) = \sup_{r > 0} \Lambda_\alpha^r(E)$ называется α -мерной мерой Хаусдорфа множества E .

1.15. Теорема (см. [1]). Если $E \subset R^n$, то мера Лебега связана с мерой Хаусдорфа следующим образом: $m_n(E) = 2^{-n} \Omega_n \Lambda_n(E)$ и $m_1(E) = \Lambda_1(E)$.

1.16. Следствие (см. [1]). Для всякого $E \subset R^n$ $m_n(E)$ и $\Lambda_n(E)$ обращаются в нуль и бесконечность одновременно.

1.17. Определение. Множество $E \subset D$ называется *устранимым*, если ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) отображение $f: D \setminus E \rightarrow R^n$ может быть продолжено до ρ -квазиизометрического (δ -квазиизометрического) отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$. В частности, точка $b \in D$ называется *устранимой*, если ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) отображение $f: D \setminus \{b\} \rightarrow R^n$ может быть продолжено до ρ -квазиизометрического (δ -квазиизометрического) отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$.

2. Устранимость точки при квазиизометриях областей $D \subset R^n$, $n \geq 2$

Вначале рассмотрим плоский случай.

2.1. Теорема. Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, точка $b \in D$. Тогда любое ρ -квазиизометрическое с коэффициентом K в $D \setminus \{b\}$ отображение $f: D \setminus \{b\} \rightarrow R^2$ может быть единственным образом продолжено до ρ -квазиизометрического в D отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^2$ с тем же коэффициентом K , $\tilde{f}|_{D \setminus \{b\}} = f$.

Доказательство. Так как отображение $f: D \setminus \{b\} \rightarrow R^2$ является ρ -квазиизометрическим, то f по определению является гомеоморфизмом и, следовательно, $f(D \setminus \{b\}) = G \setminus E'$ есть двусвязная область, где E' есть внутренняя компонента связности дополнения $f(D \setminus \{b\})$ в R^2 .

Покажем, что при выполнении условий теоремы E' будет являться одноточечным множеством, то есть $E' = \{b'\}$, $b' \in G$.

Пусть $S(b, r) = \{y \in R^2, |y - b| = r\}$ – окружности с центром в точке b радиуса $r > 0$. Так как b – внутренняя точка D , то существует такое $r_0 > 0$, что $S(b, r) \subset D$, $\forall r < r_0$. Отметим, что длины окружностей $l(S(b, r)) = 2\pi r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Так как

$f : D \setminus \{b\} \rightarrow R^2$ есть ρ -квазиизометрия, то в силу леммы 1.1.5 из [3] длина любой кривой $\gamma : [0,1] \rightarrow D$ из D при отображении f удовлетворяет условию $K^{-1}l(\gamma) \leq l(f(\gamma)) \leq Kl(\gamma)$. Таким образом, для длин окружностей выполняется соотношение

$$l(f(S(b,r))) \leq Kl(S(b,r)) = K2\pi r. \quad (4)$$

В силу гомеоморфности f очевидно, что множество E' лежит внутри замкнутой кривой $f(S(b,r))$. В силу (4), тогда при $r \rightarrow 0$ получим $l(f(S(b,r))) \leq K2\pi r \rightarrow 0$. Исходя из этого, евклидов диаметр $d(f(S(b,r))) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, то есть кривая $f(S(b,r)) \subset G$, охватывая E' , «стягивает» его в некоторую точку $b' \in G$. Таким образом, $E' = \{b'\}$ есть одноточечное множество, лежащее в области G . Тогда, если положить $\tilde{f}(b) = b'$, то, очевидно, отображение $\tilde{f} : D \rightarrow G$ является гомеоморфным продолжением отображения f области D на область G , $\tilde{f}|_{D \setminus \{b\}} = f$.

Осталось доказать, что $\tilde{f} : D \rightarrow G$ есть ρ -квазиизометрия с коэффициентом K . Так как f есть ρ -квазиизометрическое отображение, то, по определению,

$$K^{-1}\rho_D(x,y) \leq \rho_G(f(x),f(y)) \leq K\rho_D(x,y), \quad \forall x,y \in D \setminus \{b\}.$$

Для доказательства ρ -квазиизометричности $\tilde{f} : D \rightarrow G$ достаточно показать, что

$$K^{-1}\rho_D(x,b) \leq \rho_G(\tilde{f}(x),\tilde{f}(b)) \leq K\rho_D(x,b), \quad \forall x \in D \setminus \{b\},$$

или, в силу того, что $\tilde{f}(b) = b'$,

$$K^{-1}\rho_D(x,b) \leq \rho_G(\tilde{f}(x),b') \leq K\rho_D(x,b). \quad (5)$$

Выберем последовательность точек $\{x_n\} \subset D$: $x_n \rightarrow b$, $x_n \in D \setminus \{b\}$. Тогда

$$K^{-1}\rho_D(x,x_n) \leq \rho_G(\tilde{f}(x),\tilde{f}(x_n)) \leq K\rho_D(x,x_n).$$

Так как $x \neq b$ и $x_n \in D \setminus \{b\}$, то ρ -квазиизометрии f и $\tilde{f}$ совпадают в этих точках, то есть выполняется $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\tilde{f}(x_n) = f(x_n)$. Таким образом,

$$K^{-1}\rho_D(x,x_n) \leq \rho_G(f(x),f(x_n)) \leq K\rho_D(x,x_n).$$

Очевидно, что если $x_n \rightarrow b$, то $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) \rightarrow b' = \tilde{f}(b)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$, используя теорему о предельном переходе из анализа, получим (5). Таким образом, теорема доказана.

Так как в окрестности точки $b \in D$ метрики ρ_D и δ_D совпадают, то следующее утверждение является следствием теоремы 2.1.

2.2. Теорема. Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, точка $b \in D$. Тогда любое δ -квазиизометрическое с коэффициентом K в $D \setminus \{b\}$ отображение $f : D \setminus \{b\} \rightarrow R^2$ может быть единственным образом продолжено до δ -квазиизометрического в D отображения $\tilde{f} : D \rightarrow R^2$ с тем же коэффициентом K , $\tilde{f}|_{D \setminus \{b\}} = f$.

Обобщим теоремы 2.1 и 2.2 для случая $D \subset R^n$, $n \geq 3$.

2.3. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, точка $b \in D$. Тогда любое ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) с коэффициентом K в $D \setminus \{b\}$ отображение $f : D \setminus \{b\} \rightarrow R^n$ может быть единственным образом продолжено до ρ -квазиизометрического (δ -квазиизометрического) в D отображения $\tilde{f} : D \rightarrow R^n$ с тем же коэффициентом K , $\tilde{f}|_{D \setminus \{b\}} = f$.

Доказательство. Очевидно, что доказательство теоремы достаточно провести лишь для случая ρ -квазиизометрии.

Так как отображение $f : D \setminus \{b\} \rightarrow R^n$ является ρ -квазиизометрическим, то f по определению является гомеоморфизмом и, следовательно, $f(D \setminus \{b\}) = G \setminus E'$ есть двусвязная область, где E' есть внутренняя компонента связности дополнения $f(D \setminus \{b\})$ в R^n . Покажем, что при выполнении условий теоремы E' будет являться одноточечным множеством, то есть $E' = \{b'\}$, $b' \in G$.

Обозначим через $B^n(b, r)$ открытый шар в R^n с центром в точке $b \in D \subset R^n$ радиуса $r > 0$, $S^{n-1}(b, r)$ – сферу в R^n : $S^{n-1}(b, r) = \partial B^n(b, r)$. Пусть $f(S^{n-1}(b, r)) = A(r)$. Рассмотрим произвольные отрезки $(b, y) \subset \bar{B}^n(b, r)$, $y \in S^{n-1}(b, r)$, которые представляют собой радиусы шара $B^n(b, r)$. Эти отрезки при отображении f переходят, в силу его ρ -квазиизометричности, в спрямляемые кривые $\gamma(b, r) = f((b, y))$, длины которых в силу леммы 1.1.5 из [3] не больше Kr . Отсюда $\sup \rho_D(f((b, y))) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, следовательно, евклидов диаметр $d(A(r)) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Таким образом, множество $A(r) \subset G$ «стягивается» в точку, то есть $A(r) \rightarrow b' \in G$. Следовательно, $E' = \{b'\}$ есть одноточечное множество, лежащее в области G . Полагая $\tilde{f}(b) = b'$, получим, что отображение $\tilde{f} : D \rightarrow G \subset R^n$ является единственным гомеоморфным продолжением отображения f области D на область G , $\tilde{f}|_{D \setminus \{b\}} = f$.

Осталось доказать, что $\tilde{f} : D \rightarrow G \subset R^n$ есть ρ -квазиизометрия с коэффициентом K . Так как f есть ρ -квазиизометрическое отображение, то, по определению, $\forall x, y \in D \setminus \{b\} \quad K^{-1}\rho_D(x, y) \leq \rho_G(f(x), f(y)) \leq K\rho_D(x, y)$. Для доказательства ρ -квазиизометричности $\tilde{f} : D \rightarrow G \subset R^n$ достаточно показать, что

$$K^{-1}\rho_D(x, b) \leq \rho_G(\tilde{f}(x), \tilde{f}(b)) \leq K\rho_D(x, b),$$

какова бы ни была точка $x \in D \setminus \{b\}$, или, в силу того, что $\tilde{f}(b) = b'$,

$$K^{-1}\rho_D(x, b) \leq \rho_G(\tilde{f}(x), b') \leq K\rho_D(x, b).$$

Выберем последовательность точек $\{x_n\} \in D \subset R^n : x_n \rightarrow b$, $x_n \in D \setminus \{b\}$. Тогда

$$K^{-1}\rho_D(x, x_n) \leq \rho_G(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x_n)) \leq K\rho_D(x, x_n).$$

Так как $x \neq b$ и $x_n \in D \setminus \{b\}$, то ρ -квазиизометрии f и $\tilde{f}$ совпадают в этих точках, то есть выполняется $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\tilde{f}(x_n) = f(x_n)$. Таким образом,

$$K^{-1}\rho_D(x, x_n) \leq \rho_G(f(x), f(x_n)) \leq K\rho_D(x, x_n).$$

Очевидно, что если $x_n \rightarrow b$, то $\tilde{f}(x_n) = f(x_n) \rightarrow b' = \tilde{f}(b)$. Тогда при $n \rightarrow \infty$, используя теорему о предельном переходе из анализа, получим

$$K^{-1} \rho_D(x, b) \leq \rho_G(\tilde{f}(x), b') \leq K \rho_D(x, b).$$

Теорема доказана.

3. Квазиизометрии областей $D \subset R^n$, $n \geq 2$, с бесконечным множеством выколотых точек, имеющих одноточечное предельное множество

В случае квазиконформных отображений вопрос о распределении бесконечно-го множества выколотых точек в образе является достаточно сложным. В случае же ρ -квазиизометрий и δ -квазиизометрий вопрос об этом распределении решается по существу, то есть имеют место следующие теоремы, описывающие всевозможные ситуации.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда последовательность выколотых точек сходится к внутренней точке области.

3.1. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, $\{b_n\}$ – последовательность точек из D , $b_n \rightarrow b \in D$, $E = \{b_n\} \cup \{b\}$ и пусть $f: D \setminus E \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) отображение. Тогда отображение f может быть продолжено до ρ -квазиизометрического (δ -квазиизометрического) отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$, то есть множество E является устранимым, причем в образе $G = \tilde{f}(D)$ последовательность точек $\tilde{f}(b_n)$ фундаментальна по метрике ρ_G (δ_G) и сходится к внутренней точке области G .

Доказательство. Так как $\{b_n\}$ сходится к внутренней точке области D , в окрестности которой метрики ρ_D и δ_D совпадают, то доказательство достаточно провести для случая ρ -квазиизометрии. Так как область D содержит множество $E = \{b_n\} \cup \{b\}$, а точки $\{b_n\}$ являются в E изолированными, то, в силу теоремы 2.3, отображение $f: D \setminus E \rightarrow G \setminus E'$ продолжается до ρ -квазиизометрии $\tilde{f}: D \rightarrow G$, то есть точки $\{b_n\}$ являются устранимыми. Так как $b_n \rightarrow b \in D$, то $\{b_n\}$ – фундаментальна по метрике ρ_D в D . Очевидно, что последовательность точек из D , фундаментальная по метрике ρ_D , при ρ -квазиизометрии $\tilde{f}: D \rightarrow G$ переходит в последовательность точек $\tilde{f}(b_n) = b'_n$, фундаментальную по метрике ρ_G . Поэтому $b'_n \rightarrow b' \in G$ и $\tilde{f}(b) = b'$. Таким образом отображение $f: D \setminus E \rightarrow G \setminus E'$, где $E' = \{b'_n\} \cup \{b'\}$, продолжается до ρ -квазиизометрии $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$, и теорема доказана.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда последовательность выколотых точек сходится к точке границы области. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, $b_n \rightarrow b \in \partial D$ – последовательность точек из D , сходящаяся в евклидовой метрике к точке границы области D , $E = \{b_n\}$ и $f: D \setminus E \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) отображение.

В нашем случае возможны следующие случаи.

(i) Пусть $\{b_n\}$ – фундаментальная по метрике ρ_D последовательность точек из D , $b_n \rightarrow b \in \partial D$.

Тогда, в силу изолированности точек $\{b_n\}$ в E , по теореме 2.3 они являются устранимыми и, так как точка b лежит на границе области ∂D , то вопрос о ее устранимости не возникает. Поэтому рассмотрим вопрос только о распределении образов b_n при отображении $\tilde{f}$ в области $G = \tilde{f}(D)$. Очевидно, что если последовательность точек $\{b_n\}$ из D фундаментальна по метрике ρ_D , $\tilde{f}: D \rightarrow G$ по теореме 2.3 является ρ -квазиизометрией, то последовательность точек $\{b'_n = \tilde{f}(b_n)\} \subset G$ также фундаментальна в G по метрике ρ_G и сходится к точке границы области G : $b'_n \rightarrow b' \in \partial G$.

Из анализа известно, что ρ -квазиизометрия $\tilde{f}: D \rightarrow G$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: [D]_\rho \rightarrow [G]_\rho$ [3, п.1.3]. При этом носитель $I(x^*)$ любого элемента $x^* \in [D]_\rho$ является одноточечным множеством на ∂D : $I(x^*) = \{b\}$, $b \in \partial D$ и, если $\{b_n\} \in x^*$, то $d(b_n, b) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Пусть наша последовательность $\{b_n\} \in x^*$, тогда $\tilde{f}: x^* \rightarrow y^*$ и $b'_n = \tilde{f}(b_n) \rightarrow y^* = \tilde{f}(x^*)$, $b'_n \rightarrow b' = I(y^*)$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

3.2. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, $\{b_n\}$ – фундаментальная по метрике ρ_D последовательность точек из D , сходящаяся в евклидовой метрике к точке b границы области ∂D , $E = \{b_n\}$ и $f: D \setminus E \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрия. Тогда отображение f может быть продолжено до ρ -квазиизометрического отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$, то есть множество E является устранимым, причем в образе $G = \tilde{f}(D)$ последовательность точек $\tilde{f}(b_n)$ является фундаментальной по метрике ρ_G и сходится к точке границы ∂G . Кроме того, $\{b_n\} \rightarrow x^* \in [D]_\rho$, $\tilde{f}(b_n) \rightarrow y^* = \tilde{f}(x^*)$, где $\tilde{f}: D \cup \{x^*\} \rightarrow G \cup \{y^*\}$ есть гомеоморфизм.

В случае δ -квазиизометрии, если последовательность точек $\{b_n\}$ фундаментальна по метрике δ_D и лежит на некоторой спрямляемой кривой $\gamma: [0,1] \rightarrow D$, предельное множество которой есть точка $b \in \partial D$, $b_n \rightarrow b$, то, очевидно, что последовательность точек $\{b_n\}$ фундаментальна и по метрике ρ_D и данная ситуация сводится к теореме 3.2. Если же последовательность точек $\{b_n\}$ фундаментальна по метрике δ_D , $b_n \rightarrow b \in \partial D$, но $\{b_n\}$ лежит на неспрямляемой кривой $\Gamma: [0,1] \rightarrow D$, оканчивающейся в точке $b \in \partial D$, то по лемме 1.3.9 из [3] $\Gamma: [0,1] \rightarrow D$ перейдет в такой же путь $\Gamma' = \tilde{f} \circ \Gamma: [0,1] \rightarrow G$, оканчивающийся в точке $b' \in \partial G$, $b' = \tilde{f}(b)$. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

3.3. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, $\{b_n\}$ – фундаментальная по метрике δ_D последовательность точек из D , лежащая на спрямляемой кривой $\gamma: [0,1] \rightarrow D$ (лежащая на неспрямляемой кривой $\Gamma: [0,1] \rightarrow D$) и сходящаяся к точке b границы области ∂D , $E = \{b_n\}$ и $f: D \setminus E \rightarrow R^n$ есть δ -квазиизометрия. Тогда отображение f может быть продолжено до δ -квазиизометрического отображения $\tilde{f}: D \rightarrow R^n$, то есть множество E является устранимым, причем в образе $G = \tilde{f}(D)$ последовательность точек $\tilde{f}(b_n)$ является фундаментальной по метрике δ_G , лежит на спрямляемой кривой

$\gamma' = \tilde{f} \circ \gamma : [0, 1) \rightarrow G$ (лежит на неспрямляемой кривой $\Gamma' = \tilde{f} \circ \Gamma : [0, 1) \rightarrow G$) и сходится к точке границы ∂G . Кроме того, $\{b_n\} \rightarrow x^* \in [D]_\delta$, $\tilde{f}(b_n) \rightarrow y^* = \tilde{f}(x^*)$, где $\tilde{f} : D \cup \{x^*\} \rightarrow G \cup \{y^*\}$ есть гомеоморфизм.

(ii) Пусть $\{b_n\}$ не является фундаментальной по метрике ρ_D последовательностью точек из D и, кроме того, никакая ее подпоследовательность также не является фундаментальной по метрике ρ_D , $b_n \rightarrow b \in \partial D$.

Очевидно, что по теореме 2.3 множество $E = \{b_n\}$ является устранимым. Так как $\{b_n\}$ не является фундаментальной по метрике ρ_D вместе с любой своей подпоследовательностью, то можно считать, не ограничивая общности, что $\rho_D(b_n, b_m) \geq \alpha > 0, \forall n \neq m$. Тогда по формуле (3) получим $K^{-1}\rho_D(b_n, b_m) \leq \rho_G(\tilde{f}(b_n), \tilde{f}(b_m))$ или, учитывая $b'_n = \tilde{f}(b_n)$, $\rho_G(b'_n, b'_m) \geq K^{-1}\alpha > 0, \forall n \neq m$. Таким образом, последовательность $b'_n = \tilde{f}(b_n)$ в образе $G = \tilde{f}(D)$ также не является фундаментальной по ρ_G . Исходя из этого и учитывая, что $b_n \rightarrow b \in \partial D$, очевидно, что любой путь $\Gamma : [0, 1) \rightarrow D$, содержащий $\{b_n\}$ и оканчивающийся в точке $b \in \partial D$, обязательно неспрямляем. Поэтому в образе $G = \tilde{f}(D)$ точки $b'_n = \tilde{f}(b_n)$ также лежат на неспрямляемом пути $\Gamma' = \tilde{f} \circ \Gamma : [0, 1) \rightarrow G$, для которого предельное множество $C(\Gamma', 1)$ либо одноточечно, либо представляет собой некоторый невырожденный континуум на ∂G . Этот результат можно сформулировать следующим образом:

3.4. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная, гомеоморфная шару область, $\{b_n\}$ – последовательность точек из D , не являющаяся фундаментальной по метрике ρ_D вместе с любой своей подпоследовательностью и сходящаяся к точке b границы области ∂D , $E = \{b_n\}$ и $f : D \setminus E \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрия. Тогда отображение f может быть продолжено до ρ -квазиизометрического отображения $\tilde{f} : D \rightarrow R^n$, то есть множество E является устранимым, причем в образе $G = \tilde{f}(D)$ последовательность точек $\tilde{f}(b_n)$ не является фундаментальной по метрике ρ_G , лежит на неспрямляемой кривой, предельное множество которой либо одноточечно, либо представляет собой некоторый невырожденный континуум.

(iii) Пусть последовательность точек $\{b_n\}$ из D не является фундаментальной по метрике δ_D и, кроме того, никакая ее подпоследовательность также не является фундаментальной по метрике δ_D , $b_n \rightarrow b \in \partial D$.

Очевидно, что по теореме 2.3 множество $E = \{b_n\}$ является устранимым при δ -квазиизометрии. Так как $\{b_n\}$ не является фундаментальной по метрике δ_D вместе с любой своей подпоследовательностью, то можно считать, не ограничивая общности, что выполняется соотношение $\delta_D(b_n, b_m) \geq \alpha > 0, \forall n \neq m$. Тогда по формуле (3) получим $K^{-1}\delta_D(b_n, b_m) \leq \delta_G(\tilde{f}(b_n), \tilde{f}(b_m))$ или, учитывая, что $b'_n = \tilde{f}(b_n)$, $\delta_G(b'_n, b'_m) \geq K^{-1}\alpha > 0, \forall n \neq m$. Таким образом, последовательность $b'_n = \tilde{f}(b_n)$ в образе $G = \tilde{f}(D)$ также не является фундаментальной по метрике δ_D . Кроме того, так как последовательность $\{b_n\}$ не лежит ни на какой кривой $\gamma : [0, 1) \rightarrow D$, оканчивающейся в точке границы, то предельное множество $C(\gamma, 1)$ является невырож-

денным континуумом на ∂D . Поэтому в образе $G = \tilde{f}(D)$ точки $b'_n = \tilde{f}(b_n)$ лежат на неспрямляемом пути $\gamma' = \tilde{f} \circ \gamma : [0, 1) \rightarrow G$, для которого предельное множество $C(\gamma', 1)$ также является невырожденным континуумом на ∂G . Отсюда следует, что предельное множество последовательности $\{b_n\}$ состоит из невырожденного замкнутого подмножества ∂G , не являющегося обязательно континуумом на ∂G . Этот факт можно сформулировать следующим образом:

3.5. Теорема. Пусть $D \subset R^n$ – ограниченная гомеоморфная шару область, $\{b_n\}$ – последовательность точек из D , не являющаяся фундаментальной по метрике δ_D вместе с любой своей подпоследовательностью и сходящаяся к точке b границы области ∂D , $E = \{b_n\}$ и $f : D \setminus E \rightarrow R^n$ есть δ -квазиизометрия. Тогда отображение f может быть продолжено до δ -квазиизометрического отображения $\tilde{f} : D \rightarrow R^n$, то есть множество E является устранимым, причем в образе $G = \tilde{f}(D)$ последовательность точек $\tilde{f}(b_n)$ не является фундаментальной по метрике δ_G и лежит на неспрямляемой кривой, для которой предельное множество не является одноточечным.

4. Квазиизометрии областей $D \subset R^n$, $n \geq 2$, с бесконечным множеством выколотых точек, предельное множество которых образует континуум

Пусть $\{b_n\}$ – последовательность точек из D , предельным множеством которой является связный континуум $F \subset D$. Вопрос об устранимости любой точки b_n из множества точек $\{b_n\}$ и их распределении в образе рассмотрен в предыдущих пунктах. Рассмотрим этот же вопрос по отношению к их предельному множеству $F \subset D$.

Исследуем сначала плоский случай, то есть когда $D \subset R^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, $F \subset D$ – предельное множество последовательности точек $\{b_n\}$ из D , являющееся континуумом из $\bar{D}$, и $f : D \setminus F \rightarrow R^2$ есть ρ -квазиизометрическое отображение.

Так как F есть континуум, то мера Лебега $\Lambda_1(F) > 0$. В силу результатов из [1] множество F тогда не является, в общем случае, устранимым для квазиконформных и, в частности, для ρ -квазиизометрических отображений, заданных на $D \setminus F$. Так как $F = \overline{\{b_n\}}$, то для каждой точки $b \in F$ существует подпоследовательность $\{b_{n_k}\} \subset \{b_n\}$, сходящаяся к точке b при $k \rightarrow \infty$ в евклидовом смысле. Причем, в силу теоремы 3.1, как сама последовательность $\{b_n\}$, так и любая ее подпоследовательность, в том числе и $\{b_{n_k}\}$, устранимы при ρ -квазиизометрических отображениях, заданных на $D \setminus \{b_n\}$. Однако, как следует из теоремы 13.2 из [1], в силу неустраимости F в общем случае, точка $b \in F$ не является устранимой для отображения f . Эта ситуация существенно отличается от случая, когда F состоит из единственной точки: $\{b_{n_k}\} \rightarrow b = F$, которая, как было показано выше, является устранимой для f .

Таким образом, следующие ситуации, которые требуют рассмотрения, сводятся к изучению поведения квазиизометрических отображений на $D \setminus F$, где F есть невырожденный континуум в R^2 , являющийся неустраимым. То есть в дальнейшем будут рассмотрены ρ - или δ -квазиизометрические отображения

$f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$, которые могут быть продолжены до гомеоморфизма каких-то пополнений областей $D \setminus F$ и $G \setminus F'$.

Пусть F есть связный континуум, лежащий внутри области D , то есть $d(F, \partial D) > 0$. Возможны две ситуации: либо F имеет внутренние точки, либо F не имеет внутренних точек. Очевидно, при отображении f получим, что $d(F', \partial G) > 0$ и $F' \subset G$ есть невырожденный связный континуум в G , который может иметь внутренние точки или не иметь их.

Пусть $D' = D \setminus F$, тогда $F \subset \partial D'$ является граничной компонентой D' и возникает вопрос о продолжении f на границу области D' . В общем случае этот вопрос решается в [3]. Любое ρ - или δ -квазиизометрическое отображение $f: D' \rightarrow G'$, где $G' = G \setminus F'$, продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: D \cup \tilde{D}' \rightarrow G \cup \tilde{G}'$, где $\tilde{D}'$, $\tilde{G}'$ есть множества граничных элементов областей D' и G' , полученные при пополнении этих областей по какой-либо схеме из [3].

Если F не имеет внутренних точек, а F' имеет, то при любом квазиконформном отображении, а также и при любой квазиизометрии, очевидно, множество F не является устранимым. Однако, если множества F и F' одновременно имеют внутренние точки или одновременно не имеют их, то, возможно, что F является устранимым множеством. Тогда возникает вопрос о нахождении необходимых условий на отображение f и множество F , при которых в рассматриваемых ситуациях множество F является устранимым для данного f .

Рассмотрим простейшие примеры областей $D \subset \mathbb{R}^2$ и множеств F из D , имеющих или не имеющих внутренних точек и являющихся устранимыми при конкретных квазиизометриях:

Пример 1. Пусть область $D = B^2(0, 1)$, $F \subset D$, $F = \overline{B^2(0, 1/2)}$ путем тождественного отображения $f(x) = x$ переводится в область $G = D$, $F' \subset G$, $F' = F$. Очевидно, что F и F' содержат внутренние точки. Тогда квазиизометрия $f: D' \rightarrow D'$, где $D' = D \setminus F$, продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: D' \cup [D']_\rho \rightarrow D' \cup [D']_\rho$ и множество F , очевидно, является устранимым, если $f: D \rightarrow G$ есть тождественное отображение. Приведенный пример доказывает, что существуют квазиизометрии, при которых множество с внутренними точками устраним.

Пусть квазиизометрия $f: D' \rightarrow D'$ не является тождественным отображением. Тогда эта квазиизометрия $f: D' \rightarrow D'$, где $D' = D \setminus \overline{B^2(0, 1/2)}$, продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f}: D' \cup [D']_\rho \rightarrow D' \cup [D']_\rho$, при этом $\tilde{f}$ является квазиизометрией $\partial B^2(0, 1/2) = S^1(0, 1/2)$ на $\partial B^2(0, 1/2) = S^1(0, 1/2)$. Таким образом, вопрос об устранимости $F = \overline{B^2(0, 1/2)}$ сводится к вопросу о продолжении квазиизометрии $\tilde{f}: S^1(0, 1/2) \rightarrow S^1(0, 1/2)$ до квазиизометрии шара $B^2(0, 1/2)$ на $B^2(0, 1/2)$.

Пример 2. Пусть область $D = B^2(0, 1)$, $F \subset D$, $F = \{-1/2 \leq x \leq 1/2, y = 0\}$ путем тождественного отображения $f(x) = x$ переводится в область $G = D$, $F' \subset G$, $F' = F$. Очевидно, что F и F' не имеют внутренних точек. Тогда квазиизометрия $f: D' \rightarrow D'$, где $D' = D \setminus F$, продолжается до гомеоморфного отображения

$\tilde{f} : D' \cup [D']_\rho \rightarrow D' \cup [D']_\rho$ и множество F , очевидно, является устранимым, если $f : D \rightarrow G$ есть тождественное отображение.

Пусть квазиизометрия $f : D' \rightarrow D'$ не является тождественным отображением. Выясним необходимое условие, при котором множество F является устранимым для отображения f . В нашей ситуации квазиизометрия $f : D' \rightarrow D'$, где $D' = D \setminus F$, продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f} : [D']_\rho \rightarrow [D']_\rho$. Тогда в общем случае точка $b \in F$ является носителем двух различных элементов $\{x_1^*\}, \{x_2^*\} \in [D']_\rho$, $I(x_1^*) = I(x_2^*) = b$. Следовательно, если F является устранимым для отображения f , то при отображении $\tilde{f} : D' \cup [D']_\rho \rightarrow D' \cup [D']_\rho$ для каждой точки $b \in F$ будет выполняться условие: $\tilde{f}(x_1^*) = y_1^*$, $\tilde{f}(x_2^*) = y_2^*$ и $I(y_1^*) = I(y_2^*) = b'$, где $b' = \tilde{f}(b) \in F'$. Таким образом, имеет место следующее утверждение:

4.1. Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, континуум $F \subset D$ является предельным множеством последовательности точек $\{b_n\}$ из D и $f : D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ есть ρ -квазиизометрия. Тогда связный континуум F , лежащий внутри области D и не имеющий внутренних точек, при отображении f переходит в связный континуум $F' \subset G$. Если F' содержит внутренние точки, то множество F не является устранимым. Если F' не имеет внутренних точек, точка $b \in F$ является носителем двух различных элементов $b = I(x_1^*) = I(x_2^*)$, $\{x_1^*\}, \{x_2^*\} \in [D']_\rho$, где $D' = D \setminus F$, f продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f} : D' \cup [D']_\rho \rightarrow D' \cup [D']_\rho$, при котором для этой точки $b \in F$ выполняется условие: $\tilde{f}(x_1^*) = y_1^*$, $\tilde{f}(x_2^*) = y_2^*$ и $I(y_1^*) = I(y_2^*) = b'$ ($b' = \tilde{f}(b) \in F'$), то возможно, что F является устранимым множеством для квазиизометрии f . При этом, если продолжение f является ρ -квазиизометрией $\tilde{f}$ на множестве F , то F является устранимым множеством; в противном случае F не является устранимым множеством.

Будем говорить, что квазиизометрия $f : D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$, для которой F является устранимым множеством, принадлежит классу $RQI((D, F), (G, F'))$ устранимых квазиизометрий. Очевидно, что не всякая квазиизометрия обладает свойством устранимости относительно F .

Возникает вопрос о свойствах множества F' в образе, в зависимости от условий, накладываемых на F . Другими словами, если F задается некоторыми условиями, то будет ли F' удовлетворять этим условиям при квазиизометрии $f : D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$.

Начнем исследование с простейших ситуаций:

(i) Пусть F – спрямляемая жорданова кривая, лежащая в области $D \subset \mathbb{R}^2$ и $f : D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ – произвольная ρ -квазиизометрия.

Рассмотрим случай, когда F' не содержит внутренних точек, и покажем, что F' является спрямляемой кривой. Так как F – спрямляемая кривая, то, по определению, ее длина $l(F) < \infty$. Пусть $F_k = V_D^\rho(F, \varepsilon_k)$ есть ε_k -окрестности кривой F :

$F = \lim_{\varepsilon_k \rightarrow 0} F_k$. Границами этих ε_k -окрестностей являются спрямляемые кривые γ_k , длины которых $l(\gamma_k) \rightarrow l(F)$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. При ρ -квазиизометрии $f: \gamma_k \rightarrow \gamma'_k$, в силу (2) или (3), их длины удовлетворяют соотношению $K^{-1}l(\gamma_k) \leq l(\gamma'_k) \leq Kl(\gamma_k)$, где K – коэффициент ρ -квазиизометрии f . Так как f есть ρ -квазиизомерия, то γ'_k сходятся равномерно к некоторой кривой $F' \in G$, и по теореме 2 (см. [5, с. 112]) F' является спрямляемой кривой.

Если F' содержит внутренние точки, то, проводя те же рассуждения, что и в предыдущем случае, получим, что граница $\partial F'$ является спрямляемой.

(ii) Пусть F – неспрямляемая кривая, лежащая в области $D \subset R^2$ и $f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ – произвольная ρ -квазиизометрия. Так как F – неспрямляемая кривая, то, по определению, ее длина $l(F) = \infty$. Пусть F' не содержит внутренних точек. Как было показано ранее, при ρ -квазиизометрии длина F' не более чем в K раз отличается от длины F . Поэтому, очевидно, $l(F') = \infty$ и F' является неспрямляемой кривой. Если F' содержит внутренние точки, то ее граница $\partial F'$, аналогично, является неспрямляемой кривой.

Далее, пусть F , являющееся предельным множеством последовательности точек $\{b_n\}$ из D , есть связный континуум, лежащий на границе области $D \subset R^2$: $F \subset \partial D$, и $f: D \rightarrow G$ – произвольная ρ -квазиизометрия. Тогда вопрос об устранимости F не возникает. В силу ρ -квазиизометричности f очевидно, что $F' \subset \partial G$, так как F' является предельным множеством точек $b'_n = \tilde{f}(b_n)$, и в общем случае множество F' состоит из конечного или бесконечного числа непересекающихся континуумов. В этом случае вопрос о строении F' нужно рассматривать дополнительно, применяя результаты из [3] о продолжении ρ -квазиизометрии на границу области или специально исследуя этот вопрос. Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение:

4.2. Теорема. Пусть $D \subset R^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, предельное множество $F \subset D$ последовательности точек $\{b_n\}$ из D является спрямляемой (неспрямляемой) жордановой кривой в D и $f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ есть ρ -квазиизометрия. Тогда, если F' не содержит внутренних точек, то F' является спрямляемой (неспрямляемой) кривой в G ; если F' содержит внутренние точки, то граница $\partial F'$ является спрямляемой (неспрямляемой) кривой. Если же F является связным континуумом, лежащим на границе ∂D области D , то F' лежит на границе ∂G области G и в общем случае состоит из конечного или бесконечного числа непересекающихся континуумов.

Рассмотрим теперь случай пространственной области: $D \subset R^n$, $n \geq 3$, есть ограниченная гомеоморфная шару область, $F \subset \bar{D}$ – предельное множество последовательности точек $\{b_m\}$ из D и $f: D \setminus F \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрическое отображение.

Если $\Lambda_{n-1}(F) = 0$, то по теореме 13.2 из [1] множество F является устранимым, кроме случая, когда $F \subset \partial D$.

Пусть либо $\Lambda_{n-1}(F) > 0$ и F имеет размерность $n - 1$, при этом множество F не содержит внутренних точек, либо множество F содержит внутренние точки, при этом $\Lambda_n(F) > 0$. Тогда в этих случаях множество F , вообще говоря, не является

устранимым в силу теоремы 13.2 из [1]. Можно отметить, что если $f: D \rightarrow G$ – ρ -квазиизометрия областей D, G и множество $F \subset D$ является квадрируемым, то, как известно из курса анализа, множество $F' = f(F) \subset G$ также является квадрируемым. В случае же, если $f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ – ρ -квазиизометрия, $\Lambda_{n-1}(F) > 0$ и F не содержит внутренние точки и является квадрируемым множеством, то f продолжается до гомеоморфизма границ $\tilde{f}: D \cup F \rightarrow G \cup \partial F$, при котором F перейдет в квадрируемое множество $\partial F'$, при этом множество F' либо имеет внутренние точки, либо не имеет их и тогда $\partial F' = F'$. Таким образом можно сформулировать следующее утверждение:

4.3. Теорема. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. есть ограниченная гомеоморфная шару область, $F \subset \bar{D}$ – предельное множество последовательности точек $\{b_m\}$ из D и $f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ есть ρ -квазиизометрическое отображение. Тогда, если $\Lambda_{n-1}(F) = 0$ и F лежит внутри области D , то множество F является устранимым. Если $\Lambda_{n-1}(F) > 0$, то множество F не является устранимым, но при этом, если $F \subset D$ является квадрируемым множеством, то $F' = f(F) \subset G$ также является квадрируемым.

Замечание 2. Рассмотренные выше исследования проводились для случая, когда отображение $f: D \setminus F \rightarrow G \setminus F'$ является ρ -квазиизометрией. Как было отмечено ранее, любое δ -квазиизометрическое отображение является одновременно и ρ -квазиизометрическим. Обратное утверждение является неверным, поэтому необходимо рассмотреть основные отличия между δ - и ρ -квазиизометриями. Перечислим эти отличия.

(а) В области D ρ_D -диаметр $\rho_D(F)$ множества $F \subset D$ может быть как угодно большим и при ρ -квазиизометрии выполняется $K^{-1}\rho_D(F) \leq \rho_G(F') \leq K\rho_D(F)$. В то же время δ_D -диаметр $\delta_D(F) \leq d(D) < \infty$ для любого множества $F \subset D$. При δ -квазиизометрии выполняется $K^{-1}\delta_D(F) \leq \delta_G(F') \leq K\delta_D(F)$, а вот при ρ -квазиизометрии это условие на $\delta_D(F)$ и $\delta_G(F')$ выполняться не будет. В частности, возможна ситуация, когда $\rho_D(F) \geq \alpha > 0$, но $\delta_D(F)$ может быть сколь угодно малым. Тогда при ρ -квазиизометрии $\rho_G(F') \geq \alpha K^{-1}$, а при δ -квазиизометрии, если $\delta_D(F) < \varepsilon$, то $\delta_G(F') < K\varepsilon$, то есть $\delta_G(F')$ сколь угодно мал.

(б) Если F есть неспрямляемая кривая из D , оканчивающаяся в некоторой точке $b \in \partial D$, то при δ -квазиизометрии она переходит в неспрямляемую кривую $F' \subset G$, оканчивающуюся в точке $b' \in \partial G$. При ρ -квазиизометрии кривая $F' \subset G$ также является неспрямляемой, но ее предельное множество на ∂G может являться невырожденным континуумом.

(с) В силу условия (1) из фундаментальности последовательности $\{x_m\} \subset D$ по метрике ρ_D следует ее фундаментальность и по метрике δ_D . Обратное в общем случае неверно. Если последовательность $\{x_m\}$ является фундаментальной по метрике ρ_D , $f: D \rightarrow G$ есть ρ -квазиизометрия, то последовательность $\{y_m = f(x_m)\}$ также фундаментальна по метрике ρ_G . В частности, если $f: D \rightarrow G$ есть δ -квазиизометрия (она автоматически является ρ -квазиизометрией), то ρ_D -фундаментальная последовательность при δ -квазиизометрии также переходит в ρ_G -фундаментальную последовательность. Если $\{x_m\}$ – фундаментальна по метри-

ке δ_D , то при δ -квазиизометрии $f: D \rightarrow G$ она переходит в последовательность $\{y_m = f(x_m)\}$, являющуюся фундаментальной по метрике δ_G . А при ρ -квазиизометрии фундаментальная по δ_D последовательность не обязана переходить в фундаментальную по δ_G , а тем более по ρ_G , последовательность.

**5. Распределение счетного множества
выброшенных континуумов в ограниченной области $D \subset R^n$, $n \geq 2$,
при квазиизометрических отображениях**

Пусть $\{F_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, – последовательность невырожденных континуумов из D , предельным множеством которых является невырожденный связный континуум $F \subset \bar{D}$. Рассуждения из предыдущего пункта показывают, что каждое множество F_m из последовательности $\{F_m\}$ и сама последовательность $\{F_m\}$ не являются устранимыми при квазиизометрических отображениях в общем случае. Обозначим $D' = D \setminus (\cup F_m)$, $G' = G \setminus (\cup F'_m)$. Рассмотрим вопрос о поведении $\{F'_m\}$ при ρ -квазиизометрическом отображении $f: D' \rightarrow G'$.

Исследуем сначала плоский случай.

(i) Пусть $D \subset R^2$ есть ограниченная гомеоморфная кругу область, $\{F_m\}$ – последовательность невырожденных континуумов из D , которая сходится к некоторому множеству $F \subset D$ по метрике Хаусдорфа: $\lim_{m \rightarrow \infty} r_H^\rho(F_m, F) = 0$, и $f: D' \rightarrow G'$ есть ρ -квазиизометрическое отображение.

Пусть последовательность $\{F_m\}$ состоит из спрямляемых кривых, длины которых равномерно ограничены, то есть $l(F_m) \leq S < \infty$. Тогда по теореме 2 (см. [5, с. 112]) кривая F , к которой сходится $\{F_m\}$ по метрике Хаусдорфа, является спрямляемой (здесь под F_m и F будем понимать траектории кривых F_m и F соответственно). Пусть множества $\{F'_m\}$ из G не содержат внутренних точек для любого m . Тогда, как было показано ранее, спрямляемые кривые $\{F_m\}$ при квазиизометрии $f: D \setminus (\cup F_m) \rightarrow R^2$ перейдут в спрямляемые кривые $\{F'_m\}$. При этом

$\lim_{m \rightarrow \infty} r_H^\rho(F'_m, F') = 0$ и F' является спрямляемой кривой в G . Следует отметить,

что, так как предельное множество F лежит внутри области D , то вопрос о его устранимости остается открытым, то есть должен решаться для каждого конкретного случая (см. п. 4).

Пусть каждая из $\{F'_m\}$ имеет внутренние точки. Тогда при квазиизометрии f их границы $\partial F'_m$ будут спрямляемыми кривыми и $\{\partial F'_m\} \rightarrow \partial F'$, длина которой $l(\partial F') < \infty$. Очевидно, что в этом случае вопрос об устранимости предельного множества не возникает.

Далее рассмотрим случай, когда $\{F_m\} \subset D$, $F_k \cap F_i = \emptyset$, $\forall k \neq i$, и каждая из F_m имеет внутренние точки. В силу ограниченности D необходимо рассмотреть вопрос о дополнительных условиях на $\{F_m\}$. Обозначим $h(F) = \sup\{2r\}$, где точная верхняя грань берется по всем открытым шарам $B^2(x, r)$, целиком лежащим в F . Так как множества F_m попарно не пересекаются, то, в силу ограниченности области D , очевидно $\lim_{m \rightarrow \infty} h(F_m) = 0$. Тогда, если множества F'_m имеют внутренние

точки, то $\{F'_m\}$ обладает этим же свойством: $\lim_{m \rightarrow \infty} h(F'_m) = 0$, в силу ограниченности области $G = f(D)$.

В случае, когда предельное множество F последовательности континуумов $\{F_m\}$ из D лежит на границе ∂D области D , то вопрос о его устранимости, естественно, не возникает. Причем, очевидно, в силу квазиизометричности f , предельным множеством последовательности $\{F'_m\}$ является множество $F' \subset \partial G$.

(ii) Рассмотрим далее случай, когда $D \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная гомеоморфная кругу область, $F \subset \bar{D}$ – топологический предел последовательности континуумов $\{F_m\}$ из D , и $f: D \setminus (\cup F_m) \rightarrow \mathbb{R}^2$ есть ρ -квазиизометрия. В случае если $r_H^\rho(F_m, F_k) \rightarrow 0$, $m, k \rightarrow \infty$, то, очевидно, что и для образов $r_H^\rho(F'_m, F'_k) \rightarrow 0$, $m, k \rightarrow \infty$. Этот случай был рассмотрен в (i). Поэтому далее предполагаем, что $r_H^\rho(F_m, F_k) \geq r_0 > 0$, $\forall m \neq k$. Тогда в силу квазиизометричности f выполняется, что $r_H^\rho(F'_m, F'_k) \geq r_0 / K$, $\forall m \neq k$, и последовательность $\{F'_m\}$, в общем случае, не сходится ни к какому предельному множеству ни топологически, ни по метрике Хаусдорфа. Но по теореме 1.13 из этой последовательности можно выделить сходящуюся топологически подпоследовательность, предельным множеством которой по теореме 1.14 является связное множество. Таким образом, последовательность $\{F'_m\}$ разбивается на сходящиеся топологически подпоследовательности.

Пусть последовательность $\{F_m\}$ состоит из спрямляемых кривых, длины которых ограничены в совокупности, $l(F_m) \leq C < \infty$, при этом тогда и для $\rho_{D'}$ -диаметров кривых $\{F_m\}$ имеем

$$\rho_{D'}(F_m) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\rho_{D'}(A), A \subset D', r_H(A, F_m) < \varepsilon\} \leq C < \infty.$$

В силу теоремы 1.14 предельное множество $F = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m$ есть связное множество. Кроме того, если $\rho_{D'}$ -диаметры кривых $\{F_m\}$ ограничены снизу, то есть $r_{D'}(F_m) \geq \alpha > 0$, то F является или невырожденным связным континуумом, или одноточечным множеством (см. замечание 2), лежащим либо внутри области D , либо на границе области ∂D . Если же $r_{D'}(F_m) \rightarrow 0$, то F является одноточечным множеством. В силу квазиизометричности $f: D' \rightarrow G'$ будем иметь: $K^{-1}C \leq l(F'_m) \leq KC$, то есть последовательность $\{F'_m\}$ состоит из спрямляемых кривых. Тогда и для $\rho_{G'}$ -диаметров выполняется, что $\rho_{G'}(F'_m) \leq KC$, то есть $\rho_{G'}$ -диаметры кривых $\{F'_m\}$ ограничены. Предельным множеством каждой топологически сходящейся подпоследовательности $\{F'_{m_k}\} \subset \{F'_m\}$ является либо невырожденное связное множество, либо одноточечное множество из $\bar{D}$ (см. замечание 2).

Пусть последовательность $\{F_m\}$ состоит из неспрямляемых кривых. По теореме 1.14 предельное множество $F = \lim_{m \rightarrow \infty} F_m$ есть связное множество, и в силу квазиизометричности $f: D' \rightarrow G'$, очевидно, что последовательность $\{F'_m\}$ состоит из неспрямляемых кривых. Если при этом $\rho_{D'}(F_m) \geq \alpha > 0$, то и

$\rho_{G'}(F'_m) \geq K^{-1}\alpha > 0$, и, следовательно, для любой топологически сходящейся подпоследовательности $\{F'_{m_k}\} \subset \{F'_m\}$ имеем $\rho_G(F') \geq K^{-1}\alpha > 0$, то есть каждое $F' = \lim_{m \rightarrow \infty} F'_{m_k}$ является невырожденным континуумом или одноточечным множеством в области G' (см. замечание 2).

Далее пусть $D \subset R^n$, $n \geq 3$, есть ограниченная гомеоморфная шару область, $F \subset D$ – предельное множество последовательности континуумов $\{F_m\}$ из D и $f: D \setminus \cup F_m \rightarrow R^n$ есть ρ -квазиизометрическое (δ -квазиизометрическое) отображение. Тогда возможны те же самые ситуации, что и в плоском случае, только вместо спрямляемых кривых нужно рассматривать квадрируемые множества F_m и учесть отличия между δ - и ρ -квазиизометриями, то есть необходимо использовать результаты теоремы 4.3 и замечания 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев А.В. Пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Изд-во Новосибир. ун-та, 1975.
2. Асеев В.В., Сычев А.В. О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15. № 6. С. 1213–1227.
3. Кармазин А.П. Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей: монография. Сургут: Изд-во Сургутск. ун-та, 2008.
4. Куратовский К. Топология: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1966; Т. 2. М.: Мир, 1969.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теорий функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

Статья принята в печать 14.12.2010 г.

Karmazin A. P., Mukhutdinova D. R. REMOVABLE SETS AND THE DISTRIBUTION OF INTRINSIC BOUNDARY COMPONENTS UNDER QUASI-ISOMETRIES OF DOMAINS IN R^n . The paper deals with various cases and conditions for removability of sets under quasi-isometrical maps. The distribution of intrinsic boundary components of domains in R^n is studied.

Keywords: quasi-isometrical maps, intrinsic metrics, infinitely connected domains, removed sets, distribution of boundary components.

KARMAZIN Aleksandr Petrovich (Surgut State University)

E-mail: kap@kpm.surgu.ru

MUKHUTDINOVA Dina Rimovna (Surgut State University)

E-mail: manilir@mail.ru