УДК 514.752

Н.М. Онищук, О.В. Цоколова

НЕГОЛОНОМНЫЕ ТОРСЫ 2-го РОДА

В трёхмерном евклидовом пространстве рассматриваются 2-мерные распределения, имеющие нулевую полную кривизну 2-го рода, названные неголономными торсами 2-го рода (НТ-2). Дана классификация НТ-2. Изучены свойства инвариантных кривых НТ-2. В исследованиях используется метод внешних форм Картана [1] с привлечением подвижного репера.

Ключевые слова: *неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, векторное поле.*

Двумерное распределение в $\boldsymbol{E}_3$ – это гладкое отображение Δ, сопоставляющее $\forall M \in \boldsymbol{E}_3$ (или области $G \subset \boldsymbol{E}_3$) двумерную плоскость π, проходящую через M [2, с. 683; 3, с. 13; 4, с. 19]. По распределению Δ однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение называется голономным, если соответствующее ему уравнение Пфаффа вполне интегрируемо. В этом случае пространство $\boldsymbol{E}_3$ расслаивается на однопараметрическое семейство поверхностей. Если же соответствующее уравнение Пфаффа не является вполне интегрируемым, то распределение называется неголономным. Его интегральные кривые, проходящие через точку M, касаются в этой точке плоскости π и называются кривыми распределения. Пара (M, π) называется плоским элементом; плоскость π – плоскостью распределения в точке M; прямая l, проходящая через M ортогонально π, – нормалью распределения в точке M. Заметим, что множество всех плоских элементов («график» распределения) представляет собой трёхмерное многообразие, что позволяет использовать метод внешних форм Картана. Множество единичных векторов нормалей распределения Δ образует векторное поле. Таким образом, геометрия неголономного распределения тесно связана с геометрией интегральных кривых не вполне интегрируемого уравнения Пфаффа, а также с геометрией векторного поля.

Как известно (см., напр., [5]), для неголономного распределения Δ определены два важных инварианта: полная кривизна 1-го рода ($\boldsymbol{K}_1$) и полная кривизна 2-го рода ($\boldsymbol{K}_2$). Они совпадают тогда и только тогда, когда Δ голономно. В голономном случае $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{K}_2$ есть гауссова кривизна в точке M той интегральной поверхности, которая через M проходит. Поверхности нулевой гауссовой кривизны – это развёртывающиеся поверхности (или торсы). То есть, если Δ голономно и для него $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{K}_2= 0$, то мы имеем слоение, слоями которого будут торсы. В неголономном случае, конечно же, никакого слоения нет. При $\boldsymbol{K}_1= 0$ ($\boldsymbol{K}_2 \neq 0$) и при $\boldsymbol{K}_2= 0$ ($\boldsymbol{K}_1 \neq 0$) получаем распределения с разной геометрией.

Определение. *Неголономным торсом 2-го рода* (*НТ-2*)*называется гладкое неголономное распределение* Δ *на* $\boldsymbol{E}_3$, *для которого полная кривизна 2-го рода равна нулю.*

Итак, для НТ-2 полная кривизна $\boldsymbol{K}_2 = 0$. Так как $\boldsymbol{K}_2 = k_1^{(2)} k_2^{(2)}$, где $k_1^{(2)}, k_2^{(2)}$ – главные кривизны 2-го рода, то возможны два случая: 1) $k_1^{(2)}=0, \quad k_2^{(2)} \neq 0$, 2) $k_1^{(2)}=0, \quad k_2^{(2)}=0.$ Неголономные торсы 2-го рода, для которых выполняется второе условие имеют нулевую среднюю кривизну и называются минимальными неголономными торсами 2-го рода. Их геометрия исследована в работе [6].

В данной работе рассматриваются НТ-2, для которых средняя кривизна $H \neq 0$, то есть одна из главных кривизн 2-го рода отлична от нуля.

1. Основные формулы для НТ-2

К каждому элементу (M,π) присоединим ортонормированный репер $(M,\vec{e}_i)$, где $\vec{e}_3$ – единичный вектор нормали распределения в точке *M*. Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j, \end{aligned} \tag{1.1}$$

при этом $\vec{r}$ – радиус-вектор точки *M*,

$$\omega_i^j = -\omega_j^i,\ d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j,\ (i,j,k = 1,2,3).$$

Формы Пфаффа ω^i, ω_3^i – главные формы [1, с. 288]. Из них ω^i – базисные формы, поэтому

$$\omega_3^i = A_j^i \omega^j. \tag{1.2}$$

По матрице

$$(A_i^j) = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

определяем оператор ***A***, называемый основным линейным оператором. Для него $A(d\vec{r}) = d\vec{e}_3$.

Плоскость π относительно выбранного репера имеет уравнение $x^3 = 0$, а уравнение Пфаффа, соответствующее распределению $\Delta : M \to \pi$, – это уравнение

$$\omega^3 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда скаляр $\rho = A_2^1 - A_1^2$, называемый скаляром неголономности, равен нулю. Для распределения, о котором идёт речь в данной работе, $\rho \neq 0$.

Оператор ***A*** отображает всякий вектор плоскости π в вектор этой же плоскости. Поэтому возникает линейный оператор $\boldsymbol{A}^*$, являющийся сужением оператора ***A*** на плоскость π. Матрица оператора $\boldsymbol{A}^*$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения оператора $\boldsymbol{A}^*$, *взятые с противоположными знаками, являются главными кривизнами 2-го рода, а его собственные векторы – главными направлениями 2-го рода. Произведение главных кривизн 2-го рода – это полная кривизна 2-го рода, а их полусумма – средняя кривизна. Кривая распределения, в каждой точке которой касательный вектор имеет одно из главных направлений 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода. Она характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения описывают торс* [7].

Для НТ-2, по определению, $K_2 = k_1^{(2)} k_2^{(2)} = 0$. Мы исследуем случай, когда $k_1^{(2)} = 0, k_2^{(2)} \neq 0$.

При $k_1^{(2)} = 0$ один из корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1^1 - \lambda & A_2^1 \\ A_1^2 & A_2^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

равен нулю. Ему соответствует собственный вектор $\vec{\xi}(\xi^1, \xi^2, 0)$, определяемый уравнением $A_1^1 \xi^1 + A_2^1 \xi^2 = 0$. Направим вектор $\vec{e}_1$ репера параллельно $\vec{\xi}$, то есть направим вектор $\vec{e}_1$ по главному направлению 2-го рода, соответствующему нулевой главной кривизне 2-го рода. После этого репер $(M; \vec{e}_i)$ становится каноническим. И тогда $A_1^1 = A_1^2 = 0$, $2H = -A_2^2$, $\rho = A_2^1$. Вектор кривизны линии тока $\omega^1 = \omega^2 = 0$ нормалей НТ-2 определится формулой

$$k\vec{n} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2,$$

где $a = A_3^1$, $b = A_3^2$. В новых обозначениях формулы (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_3^1 &= \rho\omega^2 + a\omega^3, \\ \omega_3^2 &= -2H\omega^2 + b\omega^3. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Функции $\rho, H, a, b -$ основные инварианты НТ-2. Внешнее дифференцирование (1.4) и затем применение леммы Картана приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
&\rho\omega_2^1 = \alpha_{11}\omega^1 + (\alpha_{12} - a\rho)\omega^2 + (\alpha_{13} - a^2)\omega^3, \\
&d\rho = \left(\alpha_{12} + \frac{2H\alpha_{11}}{\rho}\right)\omega^1 + \left(\alpha_{22} + \frac{2H\alpha_{12}}{\rho} - 2aH\right)\omega^2 + \\
&\quad + \left(2\rho H + \alpha_{23} + \frac{2H(\alpha_{13} - a^2)}{\rho} - ab\right)\omega^3, \\
&da = \left(\alpha_{13} - \frac{b\alpha_{11}}{\rho}\right)\omega^1 + \left(\alpha_{23} - \frac{b\alpha_{12}}{\rho} + ab\right)\omega^2 + \left(\alpha_{33} + \frac{b(a^2 - \alpha_{13})}{\rho}\right)\omega^3, \\
&2dH = \left(\frac{2H\alpha_{12}}{\rho} - \alpha_{11} - b\rho - 2aH\right)\omega^1 + \beta_{22}\omega^2 + \left(\beta_{23} + 4H^2 + b^2 + \frac{a\alpha_{12}}{\rho} - \alpha_{13}\right)\omega^3, \\
&db = \left(ab + \frac{a\alpha_{11} - 2H\alpha_{13} + 2Ha^2}{\rho}\right)\omega^1 - \beta_{23}\omega^2 - \beta_{33}\omega^3.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Формулы (1.4), (1.5) являются основными формулами для НТ-2 общего вида.

2. Асимптотические линии и линии кривизны 2-го рода для НТ-2

Предложение 1. *Для всякого НТ-2 через каждую точку М проходят две асимптотические линии.*

Доказательство. Асимптотическая линия распределения Δ характеризуется тем, что в каждой её точке соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью распределения, либо это прямая линия. То есть для асимптотических линий имеет место равенство

$$(d^2\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0.$$

Используя формулы (1.1), (1.3), (1.4), получаем дифференциальные уравнения асимптотических линий

$$\begin{aligned} &(\rho\omega^1 - 2H\omega^2)\omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Отсюда видим, что для НТ-2 через каждую точку M проходят две асимптотические линии. ■

Следствие 1. *Всякая точка М для НТ-2 является точкой гиперболического типа.*

Действительно, точка гиперболического типа для неголономного распределения (как и в теории поверхностей) характеризуется тем, что через неё проходят точно две асимптотические линии. С другой стороны, какую бы окрестность точки M гиперболического типа мы не взяли, существуют кривые распределения, проходящие через M и расположенные по обе стороны от плоскости π. ■

Следствие 2. *Асимптотические линии ортогональны лишь для минимальных НТ-2, а совпадают только в голономном случае.*

Действительно, угол α между асимптотическими линиями определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{2H}{\sqrt{4H^2 + \rho^2}}.$$

Отсюда следует, что $\alpha = 90^\circ$ при Н=0 и $\alpha = 0$ при $\rho = 0$. То есть асимптотические линии ортогональны лишь для минимальных НТ-2 и совпадают только в голономном случае. ■

Предложение 2. *Для НТ-2 общего вида через каждую точку М проходят две линии кривизны 2-го рода, одна из которых является плоской линией, совпадающей с одной из асимптотических линий, а вторая ортогональна второй асимптотической линии.*

Доказательство. Находим линии кривизны 2-го рода. В выбранном нами репере матрица оператора A^* имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & -2H \end{pmatrix}.$$

Находим собственные векторы оператора $\boldsymbol{A}^*$ (это главные направления 2-го рода). Кривизне $k_1^{(2)} = 0$ соответствует вектор $\vec{e}_1$, а кривизне $k_2^{(2)} = 2H -$ вектор $\rho\vec{e}_1 + 2H\vec{e}_2$. Следовательно, линии кривизны 2-го рода определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &(2H\omega^1 + \rho\omega^2)\omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Отсюда видим, что через точку M при $H \neq 0$ проходят две линии кривизны 2-го рода. Одна из них $(\omega^2 = \omega^3 = 0)$ является также и асимптотической линией (ср.(2.1)). Покажем, что она лежит в плоскости π. Вектор $\vec{e}_1 -$ её касательный вектор. Используя формулы (1.1), (1.4), получаем при $\omega^2 = \omega^3 = 0$ следующее равенство: $(\vec{e}_1, d\vec{e}_1, d^2\vec{e}_1) = 0$, которое представляет собой условие того, что линия кривизны 2-го рода, совпадающая с асимптотической линией, есть плоская линия. А так как её соприкасающаяся плоскость совпадает с плоскостью π, то это значит, что она лежит в этой плоскости.

Касательные векторы ко второй асимптотической линии и второй линии кривизны 2-го рода соответственно есть взаимно ортогональные векторы $2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$ и $\rho\vec{e}_1 - 2H\vec{e}_2$. Таким образом, вторая линия кривизны 2-го рода ортогональна второй асимптотической линии. ■

3. Линии кривизны 1-го рода для НТ-2

Если распределение Δ голономно, то оператор $\boldsymbol{A}^*$ симметричен и совпадает в точке M с оператором Вейнгартена той интегральной поверхности уравнения $\omega^3 = 0$, которая проходит через данную точку. Для неголономного Δ оператор $\boldsymbol{A}^*$ не симметричен и его можно разложить на сумму двух операторов $\boldsymbol{B}^*$ и $\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}^*$ – симметричен, а $\boldsymbol{B}$ – кососимметричен.

Собственные значения оператора $\boldsymbol{B}^*$, *взятые с противоположными знаками, называются главными кривизнами 1-го рода, а его собственные векторы – главными направлениями 1-го рода. Произведение главных кривизн 1-го рода – это полная кривизна 1-го рода.*

Обозначим $k_1^{(1)}, k_2^{(1)}$ – главные кривизны 1-го рода, тогда $K_1 = k_1^{(1)} k_2^{(1)}$ – полная кривизна 1-го рода. Для главных кривизн 1-го рода имеет место аналог формулы Эйлера, то есть

$$k_n = k_1^{(1)} \cos^2 \alpha + k_2^{(1)} \sin^2 \alpha, \tag{3.1}$$

где k_n – нормальная кривизна кривой распределения Δ, α – угол между касательной данной кривой и главным направлением 1-го рода, соответствующим кривизне $k_1^{(1)}$ [7, с. 22].

Между полными кривизнами 1-го и 1-го рода имеет место следующая зависимость:

$$K_2 = K_1 + \frac{\rho^2}{4}.$$

Для НТ-2 имеем $K_2 = 0, K_1 < 0$. Последнее ещё раз свидетельствует, что все регулярные точки НТ-2 гиперболического типа.

Определение. *Линией кривизны 1-го рода называется кривая распределения, касательный вектор которой в каждой её точке имеет главное направление 1-го рода.*

Найдём уравнения линий кривизны 1-го рода в каноническом репере, выбранном в **1.** Матрицу $\boldsymbol{A}^*$ представим в виде суммы $\boldsymbol{B}^*$+$\boldsymbol{B}$, то есть в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ 0 & -2H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\rho}{2} \\ \dfrac{\rho}{2} & -2H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\rho}{2} \\ -\dfrac{\rho}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для $\boldsymbol{B}^*$ следующее:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \dfrac{\rho}{2} \\ \dfrac{\rho}{2} & -2H-\lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{3.2}$$

Так как главные кривизны 1-го рода – это собственные числа оператора $\boldsymbol{B}^*$, то из (3.2) получаем

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= H - \sqrt{H^2 + \frac{\rho^2}{4}}, \\ k_2^{(1)} &= H + \sqrt{H^2 + \frac{\rho^2}{4}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Находим главные направления 1-го рода, а по ним уравнения линий кривизны 1-го рода:

$$\begin{aligned} &\rho(\omega^1)^2 - 4H\omega^1\omega^2 - \rho(\omega^2)^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Отсюда видим, что для НТ-2 через каждую точку M проходят две взаимно ортогональных линии кривизны 1-го рода, делящих пополам углы между асимптотическими линиями.

Из (3.1) следует, что *линии кривизны 1-го рода являются экстремалями нормальных кривизн* k_n *кривых распределения* Δ.

4. Множество плоскостей НТ-2

Как было отмечено выше, множество плоских элементов (M,π) образует трёхмерное многообразие. В общем случае множество плоскостей π также зависит от трёх параметров, но их может быть и меньше. Аналог такого положения мы видим в теории поверхностей: для регулярной поверхности общего вида множество касательных плоскостей зависит от двух параметров, но для развёртывающейся поверхности касательные плоскости образуют однопараметрическое семейство. В неголономной геометрии эта особенность имеет место для НТ-2.

Теорема. *Множество плоскостей распределения для НТ-2 зависит от двух параметров.*

Доказательство. Используя формулы (1.4) находим характеристику плоскости π:

$$\begin{aligned} &x^3 = 0, \\ &(\rho\omega^2 + a\omega^3)x^1 + (-2H\omega^2 + b\omega^3)x^2 - \omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Формулы (4.1) содержат лишь две базисные формы. Это значит, что множество плоскостей π НТ-2 зависит лишь от двух параметров, а не от трёх как для распределения общего вида. ■

Находим характеристическую точку M_0 плоскости π. Её координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &x^3 = 0, \\ &ax^1 + bx^2 - 1 = 0, \\ &\rho x^1 - 2Hx^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Обозначим

$$\delta = \begin{vmatrix} \rho & -2H \\ a & b \end{vmatrix}.$$

При $\delta \neq 0$ (и только в этом случае) существует характеристическая точка $M_0 \in \pi$ с координатами $M_0(\frac{2H}{\delta}, \frac{\rho}{\delta}, 0)$. Легко проверить, что M_0 лежит на касательной к той асимптотической линии, которая не совпадает с линией кривизны 2-го рода. Заметим также, что эта касательная является общей характеристикой плоскости π, полученной при смещении по любой кривой распределения Δ, проходящей через точку M_0. Действительно, при $\omega^3 = 0$ из (4.1) получаем прямую

$$\rho x^1 - 2Hx^2 = 0,$$
$$x^3 = 0,$$

представляющую собой касательную линии кривизны 2-го рода

$$2H\omega^1 + \rho\omega^2 = 0,$$
$$\omega^3 = 0.$$

Исключение составляет только линия кривизны 2-го рода, совпадающая с асимптотической линией, вдоль неё плоскость π неподвижна.

При $\delta \neq 0$ точка M_0 либо описывает поверхность, либо неподвижна. В первом случае множество плоскостей π – это множество касательных плоскостей некоторой регулярной поверхности. Во втором случае плоскости π образуют связку с центром в точке M_0.

Если $\delta = 0$, то все плоскости распределения параллельны одной прямой. Действительно, в этом случае направление вектора $2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$ остаётся постоянным так как $d(2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2) \parallel 2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$. Это легко проверить, используя формулы (1.4), (1.5).

Таким образом, *все НТ-2 можно разбить на три класса*: *1*) *НТ-2*, *плоскости которых огибают поверхность*; *2*) *НТ-2*, *плоскости которых образуют связку*; *3*) *НТ-2*, *плоскости которых параллельны одной прямой.*

Определение. *Эквидирекционной линией* (*поверхностью*) *[8*, *с.32] называется линия* (*поверхность*), *в точках которой векторы нормалей распределения параллельны.*

Найдём уравнения, определяющие эквидирекционные линии (поверхности). Для них, по определению, векторы нормалей параллельны, а следовательно, единичные векторы $\vec{e}_3$ постоянны, то есть $d\vec{e}_3 = 0$. Тогда из формул (1.1), (1.4) следует

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 + a\omega^3 &= 0, \\ 2H\omega^2 - b\omega^3 &= 0. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

При $\delta \neq 0$ система (4.3) эквивалентна уравнениям $\omega^2 = \omega^3 = 0$. То есть через каждую точку M проходит одна эквидирекционная линия, совпадающая одновременно с асимптотической линией и линией кривизны 2-го рода.

При $\delta = 0$ уравнения (4.3) линейно зависимы и мы имеем одно вполне интегрируемое уравнение Пфаффа, а следовательно, через каждую точку M проходит одна эквидирекционная поверхность.

5. НТ-2 общего вида

Определение. *Неголономным торсом 2-го рода общего вида* (*НТ-2 общего вида*) *называется НТ-2*, *плоскости которого огибают регулярную поверхность.*

Отметим, что точки огибающей являются особыми точками распределения.

Основные свойства инвариантных кривых НТ-2 общего вида выявлены выше. Подведём итог сказанному.

а) Через каждую точку M проходят две асимптотические линии. Одна из них совпадает с линией кривизны 2-го рода и является, кроме того, эквидирекционной линией. Эта асимптотическая линия лежит в плоскости π, её вектор кривизны равен $(-\frac{\alpha_{11}}{\rho})\vec{e}_2$. Вторая асимптотическая линия – пространственная кривая, касательная к ней в точке M проходит через точку M_0 огибающей плоскостей распределения Δ.

б) Через точку M проходят две линии кривизны 2-го рода, одна из которых совпадает с асимптотической линией, вторая – ортогональна второй асимптотической. Угол β между линиями кривизны 2-го рода вычисляется по формуле

$$\cos\beta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 4H^2}}. \tag{5.1}$$

Из (5.1) следует, что при H=0 (то есть только для минимальных НТ-2 [6]) через точку проходит только одна линия кривизны 2-го рода. А при $\rho = 0$ (то есть только в голономном случае) линии кривизны 2-го рода ортогональны.

в) Через M проходят две взаимно ортогональные линии кривизны 1-го рода, делящие пополам угол между асимптотическими линиями.

6. Неголономные конусы

Определение. *Неголономным конусом называется НТ-2*, *плоскости которого проходят через одну неподвижную точку.*

Неподвижная точка M_0 называется вершиной неголономного конуса. Она является его особой точкой.

Найдём условия характеризующие неголономные конусы, то есть найдём условия, при которых точка M_0 неподвижна. Имеем $d(\vec{r} + \frac{2H}{\delta}\vec{e}_1 + \frac{\rho}{\delta}\vec{e}_2) = 0,$ где $\delta = \rho b + 2Ha.$

Используем формулы (1.1), (1.4) и (1.5), получим

$$\begin{aligned}
\beta_{22} &= \frac{2H}{\rho}\alpha_{22} - \alpha_{12} + a\rho + \frac{2H}{\rho}\delta,\\
\beta_{23} &= \frac{2H}{\rho}\alpha_{23} - \frac{a\alpha_{12}}{\rho} + a^2 - \frac{b}{\rho}\delta,\\
\beta_{33} &= \frac{2H}{\rho}\alpha_{33} - \frac{a\alpha_{13}}{\rho} + \frac{a^3}{\rho}.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Предложение 1. *Для неголономного конуса асимптотическая линия*, *не совпадающая с линией кривизны 2-го рода*, *является прямой линией*, *проходящей через вершину конуса.*

Доказательство. Асимптотическая линия, не совпадающая с линией кривизны 2-го рода, имеет уравнения

$$\begin{aligned} &\rho\omega^1 - 2H\omega^2 = 0,\\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Чтобы линия (6.2) была прямой, для её касательного вектора должно выполняться условие $d(2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2) \parallel 2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$. Используя формулы (1.4), (1.5), заключаем, что это возможно лишь тогда, когда $\rho\beta_{22} - 2H\alpha_{22} + \rho\alpha_{12} - \rho^2 a - 2H\delta = 0$. Но это равенство выполняется в силу (6.1), то есть тогда, когда точка M_0 неподвижна. ■

Асимптотическая линия, совпадающая с линией кривизны 2-го рода (как и в общем случае), представляет собой плоскую линию, лежащую в плоскости π.

Предложение 2. *Для неголономного конуса линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, является пространственной кривой, лежащей на сфере с центром в точке* M_0.

Доказательство. Линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, имеет уравнения

$$\begin{aligned} &2H\omega^1 + \rho\omega^2 = 0,\\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Вектор $\vec{e}_1 - \dfrac{2H}{\rho}\vec{e}_2$ – её касательный вектор. Для доказательства теоремы достаточно показать, что вдоль кривой (6.3) не равно нулю смешанное произведение

$$(\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2, d(\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2), d^2(\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2)). \tag{6.4}$$

Пользуясь формулами (1.4), (1.5) и (6.1), находим

$$\begin{aligned} d\left(\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2\right) = \frac{2H}{\rho^2}\left(\frac{2H}{\rho}(\alpha_{12} - a\rho) - \alpha_{11}\right)\left(\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2\right) + \\ + \left(\frac{1}{\rho} + \frac{4H^2}{\rho^3}\right)(\delta\vec{e}_2 + 2H\rho\vec{e}_3). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Подставляем (6.5) в (6.4), получаем

$$\begin{aligned} &\vec{e}_1 - \frac{2H}{\rho}\vec{e}_2, \delta\vec{e}_2 + 2H\rho\vec{e}_3, d\delta\vec{e}_2 + \delta(\omega_2^1\vec{e}_1 + \omega_2^3\vec{e}_3) + (2\rho dH + 2Hd\rho)\vec{e}_3 + 2H\rho(\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2) = \\ &= \delta(\delta\omega_2^3 + \rho 2dH + 2Hd\rho) - 2H\rho(d\delta + 2H\rho\omega_3^2) - 4H^2(\delta\omega_2^1 + 2H\rho\omega_3^1) = \\ &= -\delta\rho(\alpha_{11} + \delta + \frac{4H^2}{\rho^2}(\alpha_{22} + \delta) + 2aH) \neq 0. \end{aligned}$$

Отсюда видим, что в общем случае (при $H \neq 0$) линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, является пространственной кривой.

Далее заметим, что координаты неподвижной точки $M_0(\dfrac{\rho}{\delta}, \dfrac{2H}{\delta}, 0)$ удовлетворяют уравнениям $2Hx^1 + \rho x^2 = 0, x^3 = 0,$ определяющим нормаль кривой (6.3) в произвольной её точке M. Это возможно лишь тогда, когда сама кривая лежит на сфере с центром в точке M_0. ■

Кривизна и кручение линии кривизны 2-го рода, не совпадающей с асимптотической линией, определяются соответственно формулами

$$
\begin{gathered}
k^* = \sqrt{\frac{4H^2(4H^2+\rho^2)+\delta^2}{4H^2+\rho^2}}, \\
\kappa^* = \frac{-\delta\rho(\alpha_{11}+\delta+\dfrac{4H^2}{\rho^2}(\alpha_{22}+\delta)+2aH)}{4H^2(4H^2+\rho^2)+\delta^2}.
\end{gathered} \tag{6.6}
$$

Заметим, что $\kappa^* = 0$ только при $H = 0$, то есть только для минимальных неголономных конусов [6].

7. Неголономные цилиндры

Определение. *Неголономным цилиндром называется НТ-2, плоскости которого параллельны одной прямой.*

Как было отмечено выше, для неголономного цилиндра инвариант $\delta = 0$, а все плоскости π параллельны одной прямой с направляющим вектором $2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$. Условия, выделяющие неголономные цилиндры из НТ-2 общего вида, следующие:

$$
\begin{aligned}
&b\rho + 2aH = 0, \\
&\beta_{22} = a\rho - \alpha_{12} + \frac{2H}{\rho}\alpha_{22}, \\
&\beta_{23} = a^2 + \frac{2H\alpha_{23} - a\alpha_{12}}{\rho}, \\
&\beta_{33} = \frac{a^3 - a\alpha_{13} + 2H\alpha_{33}}{\rho}.
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

Подставив (7.1) в (1.5), получим основные формулы для неголономных цилиндров

$$
\begin{aligned}
&\omega_3^1 = \rho\omega^2 + a\omega^3, \\
&\omega_3^2 = -\frac{2H}{\rho}(\rho\omega^2 + a\omega^3).
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\rho\omega_2^1 = \alpha_{11}\omega^1 + (\alpha_{12} - a\rho)\omega^2 + (\alpha_{13} - a^2)\omega^3, \\
&d\rho = (\alpha_{12} + \frac{2H\alpha_{11}}{\rho})\omega^1 + (\alpha_{22} + \frac{2H}{\rho}(\alpha_{12} - a\rho))\omega^2 + (\alpha_{23} + \frac{2H}{\rho}\alpha_{13} + 2\rho H)\omega^3, \\
&da = (\alpha_{13} + \frac{2aH\alpha_{11}}{\rho^2})\omega^1 + (\alpha_{23} + \frac{2aH}{\rho^2}(\alpha_{12} - a\rho))\omega^2 + (\alpha_{33} + \frac{2aH}{\rho^2}(\alpha_{13} - a^2))\omega^3, \\
&2dH = (\frac{2H}{\rho}\alpha_{12} - \alpha_{11})\omega^1 + (\frac{2H}{\rho}\alpha_{22} + a\rho - \alpha_{12})\omega^2 + \\
&\quad + (\frac{2H}{\rho}\alpha_{23} + \frac{4H^2a^2}{\rho^2} + 4H^2 - \alpha_{13} + a^2)\omega^3.
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

Предложение 1. *Только для неголономного цилиндра через каждую точку М проходит эквидирекционная поверхность, пересекающая плоскость* π *по линии, являющейся одновременно асимптотической линией и линией кривизны 2-го рода.*

Доказательство. Эквидирекционные линии определяются уравнениями (4.3). Эти уравнения линейно зависимы лишь при $\delta = 0$, то есть только для неголономных цилиндров. При этом уравнение

$$\rho\omega^2 + a\omega^3 = 0 \tag{7.4}$$

вполне интегрируемо. Это означает, что через каждую точку M проходит одна эквидирекционная поверхность. Асимптотические линии, совпадающие с линиями кривизны 2-го рода, имеют уравнения

$$\omega^2 = \omega^3 = 0 \tag{7.5}$$

и, как видим, принадлежат эквидирекционной поверхности (7.4). С другой стороны, линии (7.5) лежат в плоскостях π. ■

Предложение 2. *Асимптотическая линия неголономного цилиндра, не совпадающая с линией кривизны 2-го рода, представляет собой прямую линию, параллельную неподвижной прямой цилиндра.*

Доказательство. Асимптотическая линия, не совпадающая с линией кривизны 2-го рода, имеет уравнения

$$\begin{aligned} &\rho\omega^1 - 2H\omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Её касательный вектор $2H\vec{e}_1 + \rho\vec{e}_2$ в любой её точке параллелен вектору неподвижной прямой цилиндра. Это возможно лишь тогда, когда данная линия есть прямая линия. ■

Предложение 3. *Линия кривизны 2-го рода неголономного цилиндра, не совпадающая с асимптотической линией, является плоской линией, лежащей в плоскости, ортогональной прямолинейной асимптотической.*

Доказательство. Линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, определяется уравнениями

$$\begin{aligned} &2H\omega^1 + \rho\omega^2 = 0, \\ &\omega^3 = 0. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Вычислим кривизну и кручение линии (7.7), получим $k = 2H, \kappa = 0$. Таким образом, данная линия – плоская линия. Плоскость, в которой она лежит, это плоскость

$$2Hx^1 + \rho x^2 = 0, \tag{7.8}$$

ортогональная направляющему вектору прямолинейной асимптотической линии. ■

Предложение 4. *Линия кривизны 2-го рода неголономного цилиндра, не совпадающая с асимптотической линией, является геодезической прямейшей линией.*

Доказательство. Плоскость (7.8), в которой лежит данная линия кривизны 2-го рода, является её соприкасающейся плоскостью. Из (7.8) видим, что она проходит через нормаль распределения, то есть линия (7.7) – геодезическая прямейшая. ■

Как было отмечено выше, всякая линия кривизны 2-го рода характеризуется тем, что вдоль неё нормали распределения образуют торс. Так как для неголономного цилиндра линия кривизны 2-го рода, совпадающая с асимптотической линией, является также эквидирекционной линией, то это значит, что вдоль неё нормали распределения описывают цилиндр. Для второй линии кривизны 2-го рода нормали (при $H \neq \mathrm{const}$) описывают торс, точка ребра возврата которого имеет координаты $(0, \frac{1}{2H}, 0)$, при этом $2H$ есть кривизна в соответствующей точке данной линии кривизны 2-го рода. Заметим, что при $H = \mathrm{const} \neq 0$ линия кривизны 2-го рода, не совпадающая с асимптотической линией, становится окружностью, а нормали вдоль неё образуют пучок с центром в центре окружности. Существование таких неголономных цилиндров не очевидно. Переходим к доказательству соответствующей теоремы.

Теорема. *С произволом одной функции двух аргументов существуют неголономные цилиндры постоянной не равной нулю средней кривизны.*

Доказательство. При доказательстве теоремы применяется достаточный признак Кэлера [1]. Если $H = \mathrm{const} \neq 0$, то из (7.3) следует

$$\alpha_{11} = 2aH + \frac{4H^2}{\rho^2}\alpha_{22},\ \alpha_{12} = a\rho + \frac{2H}{\rho}\alpha_{22},\ \alpha_{13} = a^2(1+\frac{4H^2}{\rho^2}) + 4H^2 + \frac{2H}{\rho}\alpha_{23}.$$

Используя эти равенства, приведём систему (7.3) к виду

$$\begin{aligned}
&\omega_2^1 = \frac{2Hd\rho}{4H^2+\rho^2},\\
&\frac{\rho^2 d\rho}{4H^2+\rho^2} = (\frac{2H}{\rho}\alpha_{22} + a\rho)\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + \alpha_{23}\omega^3 + 2H\rho(1+\frac{a^2}{\rho^2})\omega^3,\\
&da = (\frac{2H}{\rho}\alpha_{23} + a^2 + 4H^2 + \frac{4H^2a^2}{\rho^2})\omega^1 + \alpha_{23}\omega^2 + \alpha_{33}\omega^3 + \frac{4H^2 a d\rho}{\rho(4H^2+\rho^2)}.
\end{aligned} \tag{7.9}$$

Замыкаем систему (7.9), получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{2H}{\rho}d\alpha_{22}\wedge\omega^1 + d\alpha_{22}\wedge\omega^2 + d\alpha_{23}\wedge\omega^3 + A_1\omega^1\wedge\omega^2 + B_1\omega^2\wedge\omega^3 + C_1\omega^3\wedge\omega^1 = 0,\\
&\frac{2H}{\rho}d\alpha_{23}\wedge\omega^1 + d\alpha_{23}\wedge\omega^2 + d\alpha_{33}\wedge\omega^3 + A_2\omega^1\wedge\omega^2 + B_2\omega^2\wedge\omega^3 + C_2\omega^3\wedge\omega^1 = 0,
\end{aligned} \tag{7.10}$$

где A_i, B_i, C_i – функции от $\alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{33}, a, \rho, H$. В частности,

$$\begin{aligned}
&B_1 = (\frac{16H^3}{\rho^2}(1+\frac{a^2}{\rho^2}) + 2H(1-\frac{a^2}{\rho^2}))\alpha_{22} + \frac{4H^2}{\rho^3}\alpha_{22}\alpha_{23} + \frac{8Ha}{\rho}\alpha_{23} + 8H^2a(1+\frac{a^2}{\rho^2}) - a\rho^2,\\
&C_1 = \frac{4H^2}{\rho}(\frac{a^2}{\rho^2} - 1 - \frac{8H^2a^2}{\rho^4} - \frac{8H^2}{\rho^2})\alpha_{22} - \frac{8H^3}{\rho^4}\alpha_{22}\alpha_{23} + 2a\alpha_{23} + \rho\alpha_{33} + 2Ha\rho + \frac{2Ha^3}{\rho} -\\
&\quad - \frac{8H^3a}{\rho}(1+\frac{a^2}{\rho^2}),\\
&A_2 = 2a\alpha_{23}(-1-\frac{8H^2}{\rho^2}) - \rho\alpha_{33} - \frac{2a^3H}{\rho}(\frac{4H^2}{\rho^2}+1) - \frac{8aH^3}{\rho}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Положим

$$d\alpha_{22} = \lambda_1\omega^1 + \mu_1\omega^2 + \nu_1\omega^3,$$
$$d\alpha_{23} = \lambda_2\omega^1 + \mu_2\omega^2 + \nu_2\omega^3, \tag{7.12}$$
$$d\alpha_{33} = \lambda_3\omega^1 + \mu_3\omega^2 + \nu_3\omega^3.$$

Строим цепь интегральных элементов $E_1 \subset E_2 \subset E_3$. Для E_1 положим $\omega^1 = \omega^2 = 0$. Тогда параметры $\nu_i\,(i = 1,2,3)$ останутся свободными, следовательно, $r_1 = 3$ (обозначения соответствуют принятым в [1]). Для E_2 положим $\omega^1 = 0$ и подставим (7.12) в (7.10), получим $\mu_2 = \nu_1 - B_1, \mu_3 = \nu_2 - B_2$. Остаётся свободным μ_1, то есть $r_2 = 1$, а характер $s_1 = r_1 - r_2 = 2$. И, наконец, подставляем (7.12) в (7.10), получаем

$$\lambda_1 = \frac{2H}{\rho}\mu_1 - A_1,\ \lambda_2 = \frac{2H}{\rho}\nu_1 + C_1,\ \lambda_3 = \frac{2H}{\rho}\nu_2 + C_2,$$

$$\frac{2H}{\rho}B_1 + A_2 + C_1 = 0. \tag{7.13}$$

Равенство (7.13) в силу (7.11) является тождеством. Поэтому $r_3 = 0$, характер $s_2 = r_2 - r_3 = 1, s_1 + s_2 = 3$. Достаточный признак Кэлера выполнен. Неголономный цилиндр с постоянной не равной нулю средней кривизной существует с произволом одной функции двух аргументов. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М. – Л.: ГИТТЛ, 1948.
2. *Дубровин Б.*А., *Новиков С.П.*, *Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
3. *Вершик А.М.*, *Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи // Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 16. С. 7 – 85.
4. *Кобаяси Ш.*, *Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981.
5. *Синцов Д.М.* Работы по неголономной геометрии. Киев: Вища школа, 1972.
6. *Онищук Н.М.*, *Цоколова О.В.* Минимальные неголономные торсы 2-го рода // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 3(7). С. 42–55.
7. *Аминов Ю.А.* Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990.
8. *Слухаев В.В.* Геометрия векторных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.

Статья принята в печать 30.10.2010 г.

Onishuk N. M., *Tsokolova O. V.* NON-HOLONOMIC TORSES OF THE SECOND KIND. Two-dimensional non-holonomic distributions of zero total curvature of the second kind (NT-2) are considered using Cartan's method and moving frames in the three-dimensional Euclidean space. Classification of NT-2 is presented and properties of invariant NT-2 curves are studied.

Keywords: non-holonomic geometry, distribution of planes, Pfaffian equation, vector field.

ONISHUK Nadezhda Maksimovna (Tomsk State University)
E-mail: onichuk.nadezhda@yandex.ru
TSOKOLOVA Olga Vyacheslavovna (Tomsk State University)
E-mail: tov234@yandex.ru