

УДК 517.982

М.А. Садыбеков, А.М. Сарсенби

ОБ ОДНОМ НЕОБХОДИМОМ УСЛОВИИ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ НОРМИРОВАННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассматривается полная, минимальная, почти нормированная последовательность $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H , такая, что их скалярные произведения обладают свойством $|\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle| \geq \alpha$, $\alpha > 0$ для всех достаточно больших номеров k, j . Доказывается, что данная последовательность не является безусловным базисом в H .

Ключевые слова: гильбертово пространство, почти нормированная последовательность, безусловный базис, базис Рисса, биортогональная система, необходимое условие базисности.

Пусть H – гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. В пространстве H рассмотрим полную и минимальную последовательность элементов φ_k . Хорошо известно, что если система $\{\varphi_k\}$ является ортогональной, то она образует базис пространства H . В противном случае, только свойства полноты и минимальности системы не обеспечивают ее базисности. Проверка базисности, несмотря на существование различных абстрактных критериев базисности, для конкретных систем составляет существенную трудность. Поэтому получение легко проверяемых необходимых условий базисности представляет собой весьма актуальную задачу. Одному виду таких условий и посвящена настоящая публикация. Работа примыкает к результатам исследований, опубликованным в [1, 2].

Одно из легко проверяемых условий базисности нормированных систем получено в [1].

Теорема 1. [1] Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная нормированная последовательность векторов в гильбертовом пространстве l_2 , такая, что скалярные произведения $|\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle| \geq \alpha$, $\alpha > 0$ при $k \neq j$, $k, j \in \mathbb{N}$. Тогда данная последовательность векторов не является базисом в l_2 .

В этой же работе приведен простой и вместе с тем наглядный пример последовательности нормированных векторов гильбертова пространства l_2 (скалярные произведения между двумя элементами которой равны некоторому числу $\alpha > 0$), не являющейся базисом в l_2 .

В настоящей работе рассмотрим системы, у которых скалярные произведения (φ_k, φ_j) могут принимать значения разного знака или даже комплексные значения. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример 1. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис Рисса [3] гильбертова пространства H . Рассмотрим последовательность $\varphi_k = g_1 + g_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Покажем, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, являясь полной и почти нормированной, не образует базиса в H .

Проверим сначала, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ является полной. Предположим, что она не полна. Тогда существует элемент $\varphi_0 \in H$, $\varphi_0 \neq 0$, ортогональный всем элементам системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда

$$(\varphi_0, \varphi_k) \equiv (\varphi_0, g_1) + (\varphi_0, g_{k+1}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому $(\varphi_0, g_k) = (\varphi_0, g_j)$ для всех $k, j > 1$. Так как система $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис Рисса, то существует единственная биортогональная ей система $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, также образующая базис Рисса в H . Величины (φ_0, g_k) являются коэффициентами Фурье биортогонального разложения элемента φ_0 по базису Рисса $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$. Поэтому $\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_0, g_k) = 0$. Следовательно, $(\varphi_0, g_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Отсюда $\varphi_0 = 0$.

Полученное противоречие доказывает полноту системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Покажем, что она не образует базиса. Предположим, что эта система – базис в H . Тогда элемент g_1 также может быть представлен в виде разложения по этому базису:

$$g_1 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k.$$

Отсюда
$$0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k - 1 \right) g_1 + \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-1} g_k.$$

В силу базисности системы $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ это эквивалентно

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} C_k = 1, \\ C_k = 0, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что данная система уравнений не имеет решения. Следовательно, система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является базисом.

Отметим, что в отличие от приведенного примера системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенные по формулам

$$\varphi_{2k-1} = g_{2k-1}, \quad \varphi_{2k} = g_{2k} + \alpha g_{2k-1},$$

где $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ – безусловный базис, могут образовывать базис. Как следует из результатов нашей работы [4], система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует безусловный базис тогда и только тогда, когда

$$\|g_{2k-1}\| \leq C \|g_{2k}\|.$$

Легко видеть, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ из примера 1 обладает тем свойством, что $\|(\varphi_k, \varphi_j)\| \geq \alpha$, $\alpha > 0$ для всех достаточно больших номеров k, j . Следующая теорема показывает, что именно наличие данного свойства является причиной небазисности системы.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – полная, минимальная, почти нормированная последовательность элементов гильбертова пространства H , такая, что скалярные

произведения

$$|(\varphi_k, \varphi_j)| \geq \alpha, \quad \alpha > 0 \quad (1)$$

для всех достаточно больших номеров k, j . Тогда данная последовательность векторов не является безусловным базисом в H .

Доказательство. Предположим противное – что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует безусловный базис в H . Так как эта система – почти нормированная, то она образует базис Рисса в H [3]. Следовательно, биортогонально сопряженная система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ также образует базис Рисса в H .

Пусть (1) выполнено для всех номеров $k, j > N_0$. Элемент $\varphi_k, k > N_0$, представим в виде биортогонального разложения по базису Рисса $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\varphi_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_k, \psi_j) \psi_j. \quad (2)$$

Так как система $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – почти нормированная, то коэффициенты биортогонального разложения (2) принадлежат пространству l_2 . Однако это противоречит условию (1) теоремы. Полученное противоречие доказывает, что система $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ не может образовывать безусловного базиса в H . Теорема доказана.

Отметим, что результат данной работы наглядно демонстрирует, что полнота и минимальность системы (даже для случая почти нормированных систем) еще не гарантирует ее базисности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хмылева Т.Е., Бухтина И.П. О некоторой последовательности элементов в гильбертовом пространстве, не являющейся базисом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 58–62.
2. Хмылева Т.Е., Иванова О.Г. О некоторых системах в гильбертовом пространстве, не являющихся базисом // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 53–60.
3. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Ученые записки МГУ. 1951. Т. 4. Вып. 148. С. 69–107.
4. Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Применение оценок антиаприорного типа в теории базисов пространства L_2 // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44. № 6. С. 665–671.

Статья принята в печать 10.01.2011 г.

Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M. ON A NECESSARY CONDITION FOR A SYSTEM OF NORMALIZED ELEMENTS TO BE A BASIS IN A HILBERT SPACE. In this paper we consider a complete, minimal, almost normalized sequence $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ of elements of a Hilbert space H such that their inner products have the property $|(\varphi_k, \varphi_j)| \geq \alpha, \alpha > 0$ for all sufficiently large numbers k, j . It was proved that this sequence is not an unconditional basis in H .

Keywords: Hilbert space, almost normalized sequence, unconditional basis, Riesz basis, biorthogonal system, necessary condition for the basis

SADYBEKOV Makhmud Abdysametovich (South-Kazakhstan State University)

E-mail: makhmud-s@mail.ru

SARSENBI Abdizhahan Manapovich (South-Kazakhstan State University)

E-mail: abzhahan@mail.ru