

Я.В. Славолубова

K-КОНТАКТНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ГРУППАХ ЛИ

В данной статье рассмотрены левоинвариантные K -контактные структуры на группах Ли. Основной результат статьи – теорема 1, устанавливающая выражения тензора Риччи группы Ли G через тензор фактор-пространства $M = G/F_0$, где F_0 – однопараметрическая подгруппа поля Рибба ξ , и теорема 2, устанавливающая связь между тензором $N^{(1)}$ контактной метрической структуры на G и тензором Нейенхайса N соответствующей почти комплексной структуры на $M = G/F_0$.

Ключевые слова: контактные группы Ли, контактные метрические структуры, структура Сасаки, K -контактные структуры.

1. Предварительные сведения

Пусть $G = G^{2n+1}$ – группа Ли размерности $2n+1$ и $L(G)$ – ее алгебра Ли, отождествляемая с касательным пространством $T_e G$ к G в единице e . Левоинвариантная дифференциальная 1-форма η на G является контактной формой, если $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на G . В этом случае (G, η) (соответственно $(L(G), \eta)$) называется контактной группой Ли (соответственно контактной алгеброй Ли). Векторным полем Рибба называется единичное векторное поле ξ на G , удовлетворяющее условиям: $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех X и $\eta(\xi) = 1$. Если (G, η) – контактная группа Ли, то контактной метрической структурой называется четверка (η, ξ, φ, g) , где φ – левоинвариантный аффино́р на G и g – левоинвариантная риманова метрика, для которой имеют место следующие свойства:

$$\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad g(X, Y) = g(\varphi X, Y), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

где I – тождественный эндоморфизм $L(G)$ [1]. Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. В работе [2] приведены способы построения семейств ассоциированных метрик, определяемых аффино́ром φ . На контактном метрическом многообразии определены два тензора: $N^{(1)}$ и $N^{(3)}$ следующими выражениями [1]:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \eta](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi, \quad N^{(3)}(X) = (L_\xi \varphi)X.$$

Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется K -контактной, если поле Рибба ξ порождает группу изометрий метрики g , т.е. поле Рибба ξ является киллинговым относительно метрики g . Таким образом, для K -контактной структуры $L_\xi g = 0$. Поскольку $L_\xi \eta = 0$ для любой контактной структуры и $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$, то контактная метрическая структура является K -контактной тогда и только тогда, когда $L_\xi \varphi = 0$, т.е. когда тензор $N^{(3)}(X)$ обращается

ется в нуль [1]. Отметим также, что контактная метрическая структура является K -контактной тогда и только тогда, когда $\nabla_X \xi = \frac{1}{2} \phi X$ [1].

В случае левоинвариантных структур на группе Ли можно получить следующее условие K -контактности:

$$(L_\xi g)(X, Y) = \xi g(X, Y) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y) = -g([\xi, X], Y) - g(X, [\xi, Y]) = 0.$$

Таким образом, контактная метрическая структура (η, ξ, ϕ, g) является K -контактной, если оператор ad_ξ на алгебре Ли $L(G)$ является кососимметрическим, $g([\xi, X], Y) = -g(X, [\xi, Y])$.

Пусть a_t – однопараметрическая подгруппа, порожденная полем Рибба ξ , $a_t = \exp(t\xi)$. Она действует на группе Ли G справа. При этом действии форма η сохраняется, $L_\xi \eta = 0$. Поскольку форма η является еще и левоинвариантной, то из $L_\xi \eta = 0$ следует, что $ad_\xi^* \eta = 0$ и $Ad_{a_t}^* \eta = \eta$.

Рассмотрим замкнутую подгруппу F , которая сохраняет контактную форму η :

$$F = \{g \in G : Ad_g^*(\eta) = \eta\}.$$

В работе [3] показано, что подгруппа F является одномерной, контактная форма η является формой связности главного расслоения $\pi : G \rightarrow G/F$ и $d\eta$ – форма кривизны. При этом форма $d\eta$ опускается на однородное пространство G/F и является там симплектической формой ω , $\pi^*(\omega) = d\eta$.

Однопараметрическая подгруппа a_t , порожденная полем Рибба ξ , является связанной компонентой F_0 группы изотропии F и поэтому также является замкнутой подгруппой группы Ли G . Следовательно, фактор-пространство $M = G/F_0$ является гладким дифференцируемым многообразием.

Поскольку $L_\xi g = 0$ и $L_\xi \phi = 0$, то при проекции $\pi : G \rightarrow M = G/F_0$ метрика g и аффинор ϕ опускаются на M и образуют там почти кэлерову структуру (g_M, ω, J) . Почти комплексная структура J определяется следующим образом:

$$J(d\pi(X)) = d\pi(\phi X), \quad X \in T_g G.$$

Другими словами,

$$J(V) = d\pi(\phi(d\pi^{-1}(V))), \quad V \in T_x M,$$

где отображение $d\pi^{-1} : T_x M \rightarrow T_g G$ вектору $V \in T_x M$ ставит в соответствие вектор $d\pi^{-1}(V)$ из площадки контактного распределения $D = \ker(\eta)$. Проекция $\pi : G \rightarrow M = G/F_0$ является тогда римановой субмерсией. Поэтому свойства контактной метрической структуры (η, ξ, ϕ, g) тесно связаны со свойствами почти кэлеровой структуры (g_M, ω, J) на базе $M = G/F_0$.

2. Тензор Риччи

В данном разделе мы приведем явные формулы для вычисления элементов римановой субмерсии $\pi : G \rightarrow M = G/F_0$ в случае левоинвариантной K -контактной структуры (η, ξ, ϕ, g) на группе Ли G^{2n+1} . Напомним, что на M имеется

почти кэлерава структура (g_M, ω, J) , такая, что $\pi^*(g_M) = g$ на горизонтальных векторных полях, $\pi^*(\omega) = d\eta$ и $\pi^*(J) = \Phi$. В качестве горизонтального распределения возьмем контактное распределение, образованное векторами $E_1, \dots, E_{2n}$. Вертикальное распределение порождено полем Рибба ξ . Для единообразия будем обозначать его символом E_{2n+1} . Базис $E_1, \dots, E_{2n+1}$ предполагается ортонормированным. В данном базисе выразим условие K -контактности $L_\xi g = 0$:

$$\begin{aligned} (L_\xi g)(E_i, E_j) &= \xi g(E_i, E_j) - g(L_\xi E_i, E_j) - g(E_i, L_\xi E_j) = \\ &= -g([\xi, E_i], E_j) - g(E_i, [\xi, E_j]) = -C_{2n+1,i}^j - C_{2n+1,j}^i = 0. \end{aligned}$$

Получаем условие K -контактности:

$$C_{2n+1,i}^j + C_{2n+1,j}^i = 0, \quad i, j = 1, \dots, 2n+1.$$

В частности, если $i = 2n+1$, то

$$C_{2n+1,j}^{2n+1} = 0, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Для вычисления тензора Риччи римановой субмерсии $\pi: G \rightarrow M = G/F_0$ используются следующие инварианты: A и T на G [4], значения которых на векторных полях P_1 и P_2 задаются формулами

$$T_{P_1} P_2 = H\nabla_{v_{P_1}} v_{P_2} + v\nabla_{v_{P_1}} H P_2, \quad A_{P_1} P_2 = H\nabla_{H P_1} v_{P_2} + v\nabla_{H P_1} H P_2.$$

Найдем их выражения в нашем случае.

Инвариант T . Из формулы $T_{P_1} P_2 = H\nabla_{v_{P_1}} v_{P_2} + v\nabla_{v_{P_1}} H P_2$ [4] мы видим, что

$$T_X Y = 0, \quad T_X \xi = 0, \quad T_\xi \xi = 0,$$

где X, Y – горизонтальные поля, а ξ – вертикальное поле. Последнее вытекает из свойства $\nabla_\xi \xi = 0$. Поэтому единственная ненулевая компонента тензора T может быть только в случае $T_\xi X$.

Из свойства K -контактности имеем $\nabla_X \xi = \frac{1}{2}\Phi(X)$. Далее, $\nabla_\xi X - \nabla_X \xi = [\xi, X]$.

Поэтому $\nabla_\xi X = \nabla_X \xi + [\xi, X] = \frac{1}{2}\Phi(X) + [\xi, X]$. Тогда

$$T_\xi X = v[\xi, X].$$

Для выбранного базиса получаем

$$T_{E_{2n+1}} E_j = v[E_{2n+1}, E_j] = C_{2n+1,j}^{2n+1} E_{2n+1} = 0, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

Инвариант A . Из формулы $A_{P_1} P_2 = H\nabla_{H P_1} v_{P_2} + v\nabla_{H P_1} H P_2$ [4] видно, что

$$A_\xi X = 0, \quad A_\xi \xi = 0.$$

Из свойства K -контактности имеем $\nabla_X \xi = \frac{1}{2}\Phi(X)$. Поэтому

$$A_X \xi = H\nabla_X \xi = \frac{1}{2}\Phi(X).$$

В случае двух горизонтальных векторных полей получаем

$$A_X Y = v \nabla_X Y.$$

В базисе $\{E_i\}$, $i = 1, \dots, 2n$, имеем

$$A_{E_i} E_j = v \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^{2n+1} E_{2n+1}, \quad i, j = 1, \dots, 2n. \quad (1)$$

Окончательно получаем следующие ненулевые компоненты тензора A :

$$A_{ij}^{2n+1} = \Gamma_{ij}^{2n+1}, \quad A_{i,2n+1}^s = \frac{1}{2} \varphi_i^s, \quad i, j, s = 1, \dots, 2n.$$

Найдем тензор Риччи для нашего случая римановой субмерсии. При вычислениях будем использовать, что слои римановой субмерсии являются геодезическими линиями. Поэтому вектор средней кривизны слоев N , определяемый как $N = T_\xi \xi$, равен нулю.

Теорема 1. Если левоинвариантная контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе Ли G^{2n+1} является K -контактной, то в ортонормированном базисе $E_1, \dots, E_{2n+1}$, первые $2n$ векторов которого лежат в контактном распределении D , а вектор E_{2n+1} есть поле Рибба ξ , тензор Риччи Ric имеет следующую структуру:

$$Ric_{2n+1,2n+1} = \frac{n}{2}, \quad Ric_{ij} = Ric_{Mij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 2n,$$

$$Ric_{i,2n+1} = -\frac{1}{4} \sum_{j,s=1}^{2n} (2C_{sj}^j C_{si}^{2n+1} + (C_{ji}^s + C_{sj}^i + C_{si}^j) C_{js}^{2n+1}), \quad i = 1, \dots, 2n,$$

где Ric_M – тензор Риччи фактор-пространства $M = G/F_0$.

Доказательство. Найдем выражения всех компонент тензора Риччи $Ric(\xi, \xi)$, $Ric(\xi, X)$ и $Ric(X, Y)$ прямыми вычислениями. Как всегда, символами X, Y мы обозначаем горизонтальные векторы.

Вычисление $Ric(\xi, \xi)$. Поскольку для K -контактных структур кривизна Риччи в направлении ξ равна $\frac{n}{2}$, то $Ric(\xi, \xi) = \frac{n}{2}$.

Вычисление $Ric(X, Y)$. Поскольку $N = 0$, то выражение кривизны Риччи [4]

$$Ric(X, Y) = Ric_M(X, Y) - 2(A_X, A_Y) - (TX, TY) + \frac{1}{2}((\nabla_X N, Y) + (\nabla_Y N, X))$$

принимает вид

$$Ric(X, Y) = Ric_M(X, Y) - 2(A_X, A_Y) - (TX, TY).$$

Найдем компоненты (A_X, A_Y) и (TX, TY) для базисных векторов.

$$(A_{E_i}, A_{E_j}) = (A_{E_i} \xi, A_{E_j} \xi) = \frac{1}{4}(\varphi(E_i), \varphi(E_j)) = \frac{1}{4}(E_i, E_j).$$

$$(TE_i, TE_j) = (v[\xi, E_i], v[\xi, E_j]) = C_{i,2n+1}^{2n+1} C_{j,2n+1}^{2n+1}.$$

Учитывая, что $C_{i,2n+1}^{2n+1} = 0$ получаем следующую формулу:

$$Ric_{ij} = Ric_{Mij} - \frac{1}{2} \delta_{ij}.$$

Вычисление $Ric(X, \xi)$. В базисе $\{E_i\}$, $i = 1, \dots, 2n+1$, формула [4]

$$Ric(X, \xi) = ((\hat{\delta}E)\xi, X) + (\nabla_\xi N, X) - ((\check{\delta}A)X, \xi) - 2(A_X, T_\xi),$$

где $\check{\delta}A = -\sum_i (\nabla_{X_i} A)_{X_i}$ относительно базиса $\{X_i\}$ горизонтального распределения и

$\hat{\delta}T = -(\nabla_\xi T)_\xi$, примет вид

$$Ric(E_i, E_{2n+1}) = ((\hat{\delta}T)E_{2n+1}, E_i) - ((\check{\delta}A)E_i, E_{2n+1}) - 2(A_{E_i}, T_{E_{2n+1}}), \quad i = 1, \dots, 2n.$$

Найдем выражения всех трех слагаемых в правой части.

Вычисление $(\hat{\delta}T)E_{2n+1}$.

$$(\hat{\delta}T)E_{2n+1} = -(\nabla_{E_{2n+1}} T)_{E_{2n+1}} E_{2n+1} = -(\nabla_{E_{2n+1}} (T_\xi \xi) - T_{\nabla_\xi \xi} E_{2n+1} - T_{E_{2n+1}} (\nabla_\xi \xi)) = 0.$$

Вычисление $(\check{\delta}A)E_i$. Будем использовать формулу (1):

$$\begin{aligned} A_{E_i} E_j &= \nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^{2n+1} E_{2n+1}, \quad i, j = 1, \dots, 2n. \\ (\check{\delta}A)E_i &= -\sum_{j=1}^{2n} (\nabla_{E_j} A)_{E_j} E_i = -\sum_{j=1}^{2n} (\nabla_{E_j} (A_{E_j} E_i) - A_{\nabla_{E_j} E_j} E_i - A_{E_j} (\nabla_{E_j} E_i)) = \\ &= -\sum_{j=1}^{2n} (\nabla_{E_j} (\Gamma_{ji}^{2n+1} E_{2n+1}) - A_{\Gamma_{jj}^s E_s} E_i - A_{E_j} (\Gamma_{ji}^k E_k)) = -\sum_{j=1}^{2n} (\Gamma_{ji}^{2n+1} \nabla_{E_j} \xi - \Gamma_{jj}^s A_{E_s} E_i - \Gamma_{ji}^k A_{E_j} E_k) = \\ &= -\sum_{j=1}^{2n} (\frac{1}{2} \Gamma_{ji}^{2n+1} \varphi(E_j) - \Gamma_{jj}^{2n+1} A_\xi E_i - \sum_{s=1}^{2n} \Gamma_{jj}^s A_{E_s} E_i - \Gamma_{ji}^{2n+1} A_{E_j} \xi - \sum_{s=1}^{2n} \Gamma_{ji}^s A_{E_j} E_s) = \\ &= -\sum_{j=1}^{2n} (\frac{1}{2} \Gamma_{ji}^{2n+1} \varphi(E_j) - \sum_{s=1}^{2n} \Gamma_{jj}^s \Gamma_{si}^{2n+1} \xi - \frac{1}{2} \Gamma_{ji}^{2n+1} \varphi(E_j) - \sum_{s=1}^{2n} \Gamma_{ji}^s \Gamma_{js}^{2n+1} \xi) = \\ &= \sum_{j,s=1}^{2n} (\Gamma_{jj}^s \Gamma_{si}^{2n+1} + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{js}^{2n+1}) \xi. \end{aligned}$$

Вычисление третьей компоненты.

$$(A_{E_i}, T_{E_{2n+1}}) = \sum_{j=1}^{2n} (A_{E_i} E_j, T_{E_{2n+1}} E_j) = \sum_{j=1}^{2n} (\Gamma_{ij}^{2n+1} E_{2n+1}, C_{2n+1,j}^{2n+1} E_{2n+1}) = \sum_{j=1}^{2n} \Gamma_{ij}^{2n+1} C_{2n+1,j}^{2n+1} = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Ric(E_i, E_{2n+1}) &= -((\check{\delta}A)E_i, E_{2n+1}) = -(\sum_{j,s=1}^{2n} (\Gamma_{jj}^s \Gamma_{si}^{2n+1} + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{js}^{2n+1}) \xi, \xi) = \\ &= -\sum_{j,s=1}^{2n} (\Gamma_{jj}^s \Gamma_{si}^{2n+1} + \Gamma_{ji}^s \Gamma_{js}^{2n+1}). \end{aligned}$$

В последнем равенстве выразим символы Кристоффеля через структурные константы:

$$\Gamma_{si}^{2n+1} = \frac{1}{2} (C_{si}^{2n+1} + C_{2n+1,s}^i + C_{2n+1,i}^s) = \frac{1}{2} C_{si}^{2n+1};$$

$$\Gamma_{js}^{2n+1} = \frac{1}{2}(C_{js}^{2n+1} + C_{2n+1,j}^s + C_{2n+1,s}^j) = \frac{1}{2}C_{js}^{2n+1};$$

$$\Gamma_{jj}^s = \frac{1}{2}(C_{jj}^s + C_{sj}^j + C_{sj}^j) = C_{sj}^j; \quad \Gamma_{ji}^s = \frac{1}{2}(C_{ji}^s + C_{sj}^i + C_{si}^j).$$

Таким образом,

$$Ric_{i,2n+1} = -\frac{1}{4} \sum_{j,s=1}^{2n} (2C_{sj}^j C_{si}^{2n+1} + (C_{ji}^s + C_{sj}^i + C_{si}^j) C_{js}^{2n+1}).$$

Теорема доказана.

3. Связь между тензорами $N^{(1)}$ и N

При римановой субмерсии $\pi: G \rightarrow M = G/F_0$ контактной метрической структуре (η, ξ, ϕ, g) соответствует почти кэлерава структура (g_M, ω, J) на базе $M = G/F_0$. В этом разделе найдем связь между тензором кручения контактной структуры $N^{(1)}$ на группе Ли G и тензором Нейенхейса N почти комплексной структуры J на G/F_0 . Тензор $N^{(1)}$ выражается формулой

$$N^{(1)}(X, Y) = [\phi, \phi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi.$$

Здесь кручение Нейенхейса $[\phi, \phi]$ тензорного поля ϕ типа $(1, 1)$ является тензорным полем типа $(1, 2)$, заданным формулой

$$[\phi, \phi](X, Y) = \phi^2[X, Y] + [\phi X, \phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X, \phi Y].$$

Напомним также выражение тензора Нейенхейса:

$$N(X, Y) = [JX, JY] - [X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY].$$

Хорошо известно [1], что почти комплексная структура J интегрируема, т.е. является комплексной структурой, если ее тензор Нейенхейса равен нулю, $N(X, Y) = 0$.

Как известно, левоинвариантное векторное поле X на группе G отождествляется с его значением в единице, $X \equiv X(e) \in T_e G \equiv L(G)$. При проекции $\pi: G \rightarrow M = G/F_0$ левоинвариантные векторные поля на группе G не проектируются в векторные поля на $M = G/F_0$, поскольку группа F_0 действует справа на G . Однако с каждым левоинвариантным векторным полем X можно ассоциировать правоинвариантное векторное поле, порожденное элементом $X(e) \in T_e G$. Будем обозначать такое поле символом X^r . Как известно [5], $[X^r, Y^r] = -[X, Y]^r$. Правоинвариантное векторное поле X^r опускается до векторного поля на $M = G/F_0$. Обозначим $X^M = d\pi(X^r)$. Очевидно, что

$$[X^M, Y^M] = d\pi([X^r, Y^r]) = -d\pi([X, Y]^r).$$

Лемма 1. Для K -контактной метрической структуры на группе Ли G для любых касательных векторов $X, Y \in T_g G, \forall g \in G$ имеет место следующая формула:

$$d\pi(N^{(1)}(X, Y)) = N(d\pi(X), d\pi(Y)).$$

Доказательство. Для вычисления тензоров $N^{(1)}(X, Y)$ и $N(X, Y)$ продолжим векторы $X, Y \in T_g G$ до правоинвариантных векторных полей X^r, Y^r на G . Вычислим тензор $N^{(1)}(X^r, Y^r)$,

$$\begin{aligned} N^{(1)}(X^r, Y^r) &= \varphi^2[X^r, Y^r] + [\varphi X^r, \varphi Y^r] - \varphi[\varphi X^r, Y^r] - \varphi[X^r, \varphi Y^r] + d\eta(X^r, Y^r)\xi = \\ &= \varphi^2[X^r, Y^r] - \eta([X^r, Y^r])\xi + [\varphi X^r, \varphi Y^r] - \varphi[\varphi X^r, Y^r] - \varphi[X^r, \varphi Y^r] = \end{aligned}$$

Из свойства $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ контактной метрической структуры мы получаем далее:

$$= -[X^r, Y^r] + [\varphi X^r, \varphi Y^r] - \varphi[\varphi X^r, Y^r] - \varphi[X^r, \varphi Y^r].$$

Векторное поле X^r правоинвариантно, а аффинор φ левоинвариантен. Поэтому пока ничего нельзя сказать о типе поля φX^r . Однако можно заметить, что оно проектируется в поле $J(X^M)$:

$$d\pi(\varphi X^r) = J(d\pi(X^r)) = J(X^M).$$

Поэтому можно применить проектирование $d\pi$ к тензору $N^{(1)}(X^r, Y^r)$:

$$\begin{aligned} d\pi(N^{(1)}(X^r, Y^r)) &= -d\pi([X^r, Y^r]) + d\pi([\varphi X^r, \varphi Y^r]) - d\pi(\varphi[\varphi X^r, Y^r]) - d\pi(\varphi[X^r, \varphi Y^r]) = \\ &= -[X^M, Y^M] + [d\pi(\varphi X^r), d\pi(\varphi Y^r)] - J(d\pi([\varphi X^r, Y^r])) - J(d\pi([X^r, \varphi Y^r])) = \\ &= -[X^M, Y^M] + [JX^M, JY^M] - J[d\pi(\varphi X^r), d\pi(Y^r)] - J[d\pi(X^r), d\pi(\varphi Y^r)] = \\ &= -[X^M, Y^M] + [JX^M, JY^M] - J[JX^M, Y^M] - J[X^M, JY^M] = N(X^M, Y^M). \end{aligned}$$

Мы получим следующий результат:

$$d\pi(N^{(1)}(X^r, Y^r)) = N(X^M, Y^M),$$

из которого и вытекает утверждение теоремы.

Лемма 2. Для любых касательных векторов $X, Y \in T_g G, \forall g \in G$ значения тензора кручения $N^{(1)}(X, Y)$ контактной метрической структуры лежит в контактном распределении, т.е. $\eta(N^{(1)}(X, Y)) = 0$.

Доказательство. Найдем проекцию тензорного поля $N^{(1)}$ на направление $\mathbf{R}\xi$. Для этого достаточно вычислить $\eta(N^{(1)}(X, Y))$. Поскольку

$$N^{(1)}(X, Y) = \varphi^2[X, Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y] + d\eta(X, Y)\xi,$$

$$\text{то} \quad \eta(N^{(1)}(X, Y)) = \eta([\varphi X, \varphi Y]) + d\eta(X, Y) = -d\eta(\varphi X, \varphi Y) + d\eta(X, Y) = 0.$$

Для доказательства последнего равенства воспользуемся свойствами контактной метрической структуры: $d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y)$ и $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$. Получаем

$$d\eta(\varphi X, \varphi Y) = g(\varphi(\varphi X), \varphi Y) = g(\varphi X, Y) - \eta(\varphi X)\eta(Y) = g(\varphi X, Y) = d\eta(X, Y).$$

Таким образом, вертикальная $\mathbf{R}\xi$ -компонента тензора $N^{(1)}(X, Y)$ всегда равна нулю. А поскольку горизонтальная D -компонента тензора $N^{(1)}(X, Y)$, согласно лемме 1, проектируется в тензор Нейенхейса, то получаем теорему:

Теорема 2. Тензор кручения $N^{(1)}(X, Y)$ K -контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) равен нулю тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса $N(X, Y)$ почти комплексной структуры многообразия $(G/F_0, g_M, \omega, J)$ равен нулю. Поэтому контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) является сасакиевой (нормальной) тогда и только тогда, когда многообразие $(M = G/F_0, g_M, \omega, J)$ является кэлеровым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry // Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1976.
2. Смоленцев Н.К. Пространства римановых метрик // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНТИ, 2003. Т. 31. С. 69–146.
3. Khakimjanov, Yu., Goze M., Medina A. Symplectic or Contact Structures on Lie Groups // arXiv.org/ math.DG/0205290, 2002, 18 p.
4. Бессе. А. Многообразия Эйнштейна: в 2 т. Т. II: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 384 с.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1 и Т. 2. М.: Наука, 1981. 344 с.

Статья принята в печать 30.12.2010г.

Slavolyubova Y. V. K-CONTACT STRUCTURES ON LIE GROUPS. In this paper, left invariant K -contact structures on Lie groups are considered. The main results are Theorem 1 expressing the Ricci tensor of a Lie group G by the Ricci tensor of a quotient space $M = G/F_0$, where F_0 is a one-parametrical subgroup of the Reeb field ξ , and Theorem 2 establishing the connection between the tensor $N^{(1)}$ of a contact metric structure on G and the Nijenhuis tensor N of the corresponding almost complex structure on $M = G/F_0$.

Keywords: contact Lie groups, contact metric structures, Sasakian structure, K -contact structures.

SLAVOLYUBOVA Yaroslavna Viktorovna (Kemerovo institute (branch) of Russian state university of trade and economics)
E-mail: jar1984@mail.ru