УДК 512.541

Д.С. Чистяков

ЭНДОМОРФНЫЕ НЕРАЗЛОЖИМЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА 3

В работе изучается строение кольца квазиэндоморфизмов эндоморфных абелевых групп без кручения ранга 3.

Ключевые слова: *кольцо квазиэндоморфизмов, однородное отображение модуля, сильно неразложимая абелева группа без кручения.*

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей и V – унитарный левый R-модуль.

Множество $M_R(V) = \{ f : V \to V \mid f(rx) = rf(x),\ r\in R,\ x\in V\}$ является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений. Элементы множества $M_R(V)$ называются R-однородными отображениями. Очевидно, что множество $M_R(V)$ содержит кольцо $E_R(V)$ всех эндоморфизмов R-модуля V.

R-модуль V называется эндоморфным, если $M_R(V) = E_R(V)$ ([1]).

Абелеву группу G будем называть эндоморфной, если она является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов $E(G)$. В этом случае $M_{E(G)}(G) = Z(E(G))$, где $Z(E(G))$ – центр кольца $E(G)$.

Множество A называется сильно R-замкнутым, если для любых $r\in R$, $a\in A$ справедливо $ra\in A$. Непустое подмножество A левого R-модуля V называется сильно R-сервантным, если $0 \neq rv\in A$ влечет $v\in A$ для всех $r\in R$, $v\in V$ ([1]).

Приведем определения, связанные с квазиразложением абелевой группы и кольцом квазиэндоморфизмов.

Пусть A и B – абелевы группы без кручения. Говорят, что A квазисодержится в B, если $nA\subseteq B$ для некоторого натурального числа n. Говорят, что A квазиравна B ($A\approx B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A. Квазиравенство $A\approx\oplus_{i\in I}A_i$, где I – конечное множество, называется квазиразложением или квазипрямым разложением группы A. Подгруппы A_i называются квазислагаемыми группы A. Группа A называется сильно неразложимой, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Абелеву группу без кручения A можно естественным образом вложить в $\boldsymbol{Q}$-пространство $\boldsymbol{Q}\otimes A$, которое является делимой оболочкой группы A. Естественный образ вложения подразумевает отождествление элемента $a\in A$ с элементом $1\otimes a\in \boldsymbol{Q}\otimes A$. Каждый эндоморфизм $\alpha\in E(A)$ единственным образом продолжается до линейного преобразования $1\otimes\alpha$ $\boldsymbol{Q}$-пространства $\boldsymbol{Q}\otimes A$. Кольцо $E(A)$ содержится в $End_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}\otimes A)$.

Таким образом, $E(A)=\{\alpha\in End_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}\otimes A) \mid \alpha A\subseteq A\}$. $\boldsymbol{Q}$-алгебра $\boldsymbol{Q}\otimes E(A)$ называется кольцом квазиэндоморфизмов группы A.

Псевдоцоколем абелевой группы без кручения A называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами (*pfi*-подгруппами) (обозначим ее $Soc\ A$).

Неопределяемые нами понятия можно найти в книгах [2 – 4].

Лемма 1. Пусть G – абелева группа без кручения конечного ранга n и $\{g_1,g_2, \ldots, g_n\}$ – максимальная линейно независимая система элементов группы G. Если существуют такие $\varphi_j \in E(G)$, что $\varphi_j(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n) = \varphi\alpha_j g_j$ для всех $\alpha_i \in \mathbf{Z}$, $i, j = 1,2,\ldots,n$, и $\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n=\varphi$ – мономорфизм, то группа G эндоморфна.

Доказательство. Пусть $f \in M_{E(G)}(G)$. Тогда

$$\varphi_j f(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n) = f(\varphi_j(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n)) =$$
$$= f(\varphi\alpha_j g_j) = \varphi f(\alpha_j g_j),\ j=1,2,\ldots,n.$$

Сложим полученные равенства:

$$(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) f(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \ldots + \alpha_n g_n) = \varphi(f(\alpha_1 g_1)+f(\alpha_2 g_2)+\ldots+f(\alpha_n g_n)).$$

Используя инъективность φ, получаем

$$f(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\ldots+\alpha_n g_n) = f(\alpha_1 g_1)+f(\alpha_2 g_2)+\ldots+f(\alpha_n g_n).$$

Поскольку каждый элемент G может быть записан в виде линейной комбинации элементов $g_1,g_2,\ldots g_n$, то мы делаем вывод, что для любых $x, y \in G$ выполняется равенство

$$f(x+y) = f(x)+f(y).$$

Таким образом, $f \in Z(E(G))$. Лемма доказана.

В некоторых случаях удается непосредственно указать существование эндоморфизмов φ_j из леммы 1 (см. доказательства теорем 2, 4); это можно сделать и для ряда классов групп, «насыщенных» эндоморфизмами (класс вполне транзитивных групп и др.), см. статью [5].

Для кольца квазиэндоморфизмов абелевой группы G фиксируем обозначение S.

Теорема 2. Пусть G – сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3, такая, что $G \neq Soc\ G$. Группа G не является эндоморфной тогда и только тогда, когда $\dim_Q S=2$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\{g_1,g_2,g_3\}$ – максимальная линейно независимая система элементов группы G и кольцо S имеет вид ([6])

$$S=\left\{\begin{pmatrix} r & 0 & s \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \middle| r,s \in Q\right\}.$$

Тогда $Soc\ G=\langle g_1,g_2\rangle_*$. При этом $\langle g_1\rangle_* = \langle \alpha g/\alpha \in N_0,\ g \in G\rangle_*$ – сервантная оболочка следа $N_0 G$ в группе G, где $N_0 = J(E(G)) \cap E(G)$. Таким образом, группа $A=\langle g_2\rangle_*$ является сильно $E(G)$-сервантной и сильно $E(G)$-замкнутой подгруппой в G. Построим $E(G)$-однородное отображение $f: G \to G$ по следующему правилу:

$$f(g)=\begin{cases} g, g \in A; \\ 0, g \in G \setminus A. \end{cases}$$

Пусть $0 \neq x \in A$, $y \in G \setminus A$. Тогда $f(x+y) = 0 \neq x = f(x)+f(y)$.

Аналогично проводится доказательство для случаев, когда

$$S=\left\{\begin{pmatrix} r & s & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \middle| r,s \in Q\right\},\ S=\left\{\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & s \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \middle| r,s \in Q\right\}.$$

Необходимость. Предположим $\dim_Q S \neq 2$. Тогда кольцо S изоморфно одному из следующих колец ([6]):

$$K_1=\left\{\begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| x,y,z \in Q\right\},$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & ky \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in Q, 0 \neq k \in Q, k = \text{const} \right\},$$

$$K_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in Q \right\}.$$

В каждом случае найдутся эндоморфизмы φ_1, φ_2, φ_3, $\varphi \in E(G)$, удовлетворяющие условию леммы 1.

1) Если $S \cong K_1$, то

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & -r & -r \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$

для некоторого $r \in \mathbf{Q}$.

2) Если $S \cong K_2$, то

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & -r & kr - r \\ 0 & r & -kr \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & r & -kr \\ 0 & 0 & kr \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$

для некоторого $r \in \mathbf{Q}$.

3) Если $S \cong K_3$, то

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & -r & -r \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$

для некоторого $r \in \mathbf{Q}$.

Для кольца K_1 покажем, что отображения φ_1, φ_2, φ_3, φ являются эндоморфизмами группы G. В других случаях рассуждения те же.

Пусть $S \cong K_1$. Рассмотрим идеалы

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| q \in Q \right\}, S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| q \in Q \right\}.$$

Аддитивная группа кольца S есть делимая оболочка аддитивной группы кольца $E(G)$ и $E(G) \cap S_i \neq 0$, $i = 1,2$. Следовательно, найдется такое рациональное число r, что φ_1, φ_2, φ_3, $\varphi \in E(G)$. Таким образом, $dim_Q\, S \neq 2$. Теорема доказана.

Интересно проследить взаимосвязь между свойствами эндоморфности и чистоты модуля.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, M – левый R-модуль. Подмодуль A модуля M называется чистым, если всякая конечная система уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} r_{ij} x_i = a_j \quad (\text{j=1,…,m})$$

с коэффициентами $r_{ij} \in R$ и правыми частями $a_j \in A$, имеющая решение в M, имеет решение и в A.

Модуль называется чисто простым, если он не содержит в себе собственных чистых подмодулей, и чисто полупростым, если он изоморфен прямой сумме чисто простых модулей.

Вполне характеристическая подгруппа A абелевой группы G такая, что модуль A является чистым подмодулем левого $E(G)$-модуля G, называется эндочистым подмодулем группы G.

Подгруппа A группы G называется сервантным подмодулем в левом $E(G)$-модуле G, если всякое уравнение вида $\varphi x=a$, где $\varphi\in E(G)$, $a\in A$, имеющее решение в G, имеет решение и в A.

Понятно, что любой эндочистый подмодуль абелевой группы G является сервантным.

Чистота в абелевых группах изучалась в работах [7, 8]. Следствием результатов этих публикаций и доказанной теоремы является следующее утверждение.

Следствие 3. Сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 3, не совпадающая со своим псевдоцоколем, эндоморфна тогда и только тогда, когда она не содержит сервантных подмодулей.

Абелева группа называется жесткой, если ее кольцо эндоморфизмов является подкольцом поля $\mathbf{Q}$.

Теорема 4. Пусть $G=A\oplus B$, где A – абелева группа без кручения ранга 1, B – жесткая сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 2. Группа G не является эндоморфной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1. $r(Hom\,(A, B))=1$, $Hom\,(B, A) = 0$,
2. $Hom\,(B, A) = Hom\,(A, B) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим следующие четыре случая:

1) $r(Hom\,(A, B)) = 2$ и $Hom\,(B, A) = 0$;
2) $r(Hom\,(B, A)) = 2$ и $Hom\,(A, B) = 0$;
3) $r(Hom\,(B, A)) = 1$ и $Hom\,(A, B) = 0$;
4) $r(Hom\,(B, A)) = r(Hom\,(A, B)) = 1$.

Они в совокупности с равенствами из заключения теоремы полностью исчерпывают возможные значения рангов групп $Hom\,(A, B)$ и $Hom\,(B, A)$.

1) $r(Hom\,(A, B)) = 2$ и $Hom\,(B, A) = 0$.

Подгруппа A является порождающим множеством $E(G)$-модуля G. Тогда для любых $b_1,b_2\in B$ существуют φ, $\phi\in E(G)$, a_1, $a_2\in A$, такие, что $b_1=\varphi a_1$, $b_2=\phi a_2$. Учитывая, что $ma_1=na_2$, для некоторых m, $n\in \boldsymbol{Z}$, $f\in M_{E(G)}(G)$ имеем

$$mf(b_1+b_2) = f(mb_1+mb_2) = f(m\varphi a_1+m\phi a_2) = f(\varphi ma_1+m\phi a_2) = f(\varphi na_2+m\phi a_2)=$$

$$= f((\varphi n+m\phi)a_2) = (\varphi n+m\phi)f(a_2) = \varphi nf(a_2)+m\phi f(a_2) = f(\varphi na_2)+mf(\phi a_2) = mf(b_1)+mf(b_2).$$

Откуда $$f(b_1+b_2) = f(b_1)+f(b_2).$$

Пусть $a\in A$, $b\in B$ и e_A: $G\to A$, e_B: $G\to B$ – проекции, соответствующие прямому разложению группы G. Тогда для любого $f\in M_{E(G)}(G)$ имеем

$$f(a+b) = (e_A+e_B)f(a+b) = e_Af(a+b)+ e_Bf(a+b) = f(e_A(a+b)) + f(e_B(a+b)) = f(a)+f(b).$$

Если a_1, $a_2\in A$, то найдутся $u,v\in\boldsymbol{Z}$, такие, что $ua_1=va_2$. Тогда для любого $f\in M_{E(G)}(G)$ получаем

$$uf(a_1+a_2) = f(ua_1+ua_2) = f(va_2+ua_2)=(v+u)f(a_2) = vf(a_2)+uf(a_2) =$$

$$= f(va_2)+uf(a_2) = uf(a_1)+ uf(a_2).$$

Следовательно, $f(a_1+a_2) = f(a_1)+f(a_2)$.

В ситуациях 2) – 4) группа G эндоморфна. Мы укажем лишь эндоморфизмы φ_1, φ_2, φ_3, φ, удовлетворяющие условию леммы 1.

2) $r(Hom\,(B, A))=2$ и $Hom\,(A, B) = 0$.

Кольцо квазиэндоморфизмов S группы G изоморфно кольцу ([9, теорема 2.2.3])

$$S \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y & w \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y, u, w \in Q \right\}.$$

Тогда эндоморфизмы φ_1, φ_2, φ_3, φ имеют вид

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$

для некоторого $r \in \mathbf{Q}$.

3) $r(Hom\,(B, A))=1$ и $Hom\,(A, B) = 0$.

Из работы [9, доказательство теоремы 2.2.3] следует, что

$$S \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & u & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y, u, \in Q \right\}.$$

В качестве φ_1, φ_2, φ_3, φ возьмем эндоморфизмы

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$

для некоторого $r \in \mathbf{Q}$.

4) $r(Hom\,(B, A)) = r(Hom\,(A,B)) = 1$.

Кольцо S имеет вид ([9, теорема 2.2.3]):

$$S \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & u & 0 \\ w & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \middle| x, y, u, w \in Q \right\}.$$

Тогда в качестве искомых эндоморфизмов достаточно взять следующие:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \in E(G),$$ для некоторого $r \in \boldsymbol{Q}$.

Достаточность. 1) Пусть $r(Hom\,(A, B))=1$, $Hom\,(B, A) = 0$.

Рассмотрим $B' = \sum\limits_{\alpha \in Hom(A,B)} \alpha A$ – след A в B. Тогда B' – сервантная подгруппа в группе B ранга 1. Пусть $B' = \langle b' \rangle_*$ и элементы b' , b'' образуют максимальную линейно независимую систему элементов в B. Тогда подгруппа $B''= \langle b'' \rangle_*$ является сильно $E(G)$-замкнутым и сильно $E(G)$-сервантным подмножеством.

Построим $E(G)$-однородное отображение f:$G \to G$ по следующему правилу:

$$f(g) = \begin{cases} g, g \in B''; \\ 0, g \in G \setminus B''. \end{cases}$$

Пусть $0 \neq x \in B''$, $y \in G \setminus B''$. Тогда $f(x+y)=0 \neq x=f(x)+f(y)$. Группа G не эндоморфна.

2) Пусть $Hom\ (B, A)=Hom\ (A, B) = 0$.

В этом случае $\boldsymbol{Q}\otimes E(A\oplus B)\cong \boldsymbol{Q}\otimes E(A)\oplus\boldsymbol{Q}\otimes E(B)$. Принимая во внимание изоморфизмы $\boldsymbol{Q}\otimes E(A)\cong\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}\otimes E(B)\cong\mathbf{Q}$, заключаем, что $S\cong\mathbf{Q}\oplus\mathbf{Q}$. Так как $Hom(B, A) = Hom\ (A,B) = 0$, то G разлагается в прямую сумму модулей A и B. Пусть H – сервантная подгруппа ранга 1 группы B, $\varphi \in E(G)$, $h\in H$. Предположим, что $\varphi(h) = \frac{k}{l}h$ для некоторых k, $l\in\boldsymbol{Z}$. Отсюда $l\varphi(h)=kh$, $\varphi\ (h)\in H$. Предположим, что $\varphi(x) = y$ для некоторых $y\in H$, $x\in G$. Можем записать $\frac{k}{l}x = y$. Тогда $kx =ly$, $x\in H$. Следовательно, подгруппа H является сильно $E(G)$-замкнутым и сильно $E(G)$-сервантным подмножеством в G. Построим $E(G)$-однородное отображение $f: G\to G$ по следующему правилу:

$$f(g) = \begin{cases} g, g \in H; \\ 0, g \in G \setminus H. \end{cases}$$

Пусть $0 \neq x\in H$, $y\in G\backslash H$. Тогда $f(x+y) = 0 \neq x = f(x)+f(y)$. Таким образом, группа G не является эндоморфной. Теорема доказана.

Автор благодарен доценту Любимцеву О.В. за постановку задачи и профессору Чехлову А.Р. за ценные замечания по доказательству теорем, а также кафедре алгебры Томского государственного университета за внимание к работе автора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hausen J. and Johnson J.A.* Centralizer near-rings that are rings // J. Austr. Math. Soc. 1995. V. 59. P. 173–183.
2. *Крылов П.А.*, *Михалев А.В.*, *Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: ТГУ, 2002.
3. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 2. М.: Мир, 1977.
5. *Крылов П.А.*, *Чехлов А.Р.* Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Труды Института математики и механики. 2001. Т. 7. № 2. С. 194–207.
6. *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 763–773.
7. *Турманов М.А.* Эндочистые подмодули абелевых групп без кручения ранга 2 // Абелевы группы и модули. Томск: ТГУ, 1990. С. 119–124.
8. *Турманов М.А.* О чистоте в абелевых группах // Фундамент. и прикл. математика. 2004. Т. 10. № 2. С. 225–238.
9. *Чередникова А.В.* Кольца квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 3: дис. … к.ф.-м.н. М.: МПГУ, 1999.

Статья принята в печать 24.12.2010г.

Chistyakov D.S. ENDOMORPHIC INDECOMPOSABLE TORSION-FREE ABELIAN GROUPS OF RANK 3. In this paper, the structure of the quasi-endomorphism ring of endomorphic torsion-free Abelian groups of rank three is studied.

Keywords: quasi-endomorphism ring, homogeneous map of a module, strongly indecomposable torsion-free Abelian group

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Nizhny Novgorod Commercial Institute)
E-mail: chistyakovds@yandex.ru