МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.8

И.В. Корытов

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

В работе построен элемент равномерно выпуклого пространства, на котором функционал достигает своей нормы. Результат имеет приложение в теории кубатурных формул, где погрешность численного интегрирования представлена линейным функционалом и может быть оценена через его норму. Норма функционала погрешности выражается через такой элемент, называемый экстремальной функцией.

Ключевые слова: *экстремальная функция, весовое пространство Соболева, линейный финитный функционал, интегральное представление функционала, норма функционала, норма экстремальной функции.*

Вопросы, рассматриваемые в данной работе, возникают из задач теории кубатур о построении априорных оценок на классах функций погрешностей формул численного интегрирования функций нескольких переменных. Использование аппарата функционального анализа для построения таких оценок начато С.Л. Соболевым [1]. Согласно этому подходу, кубатурная сумма, приближающая данный интеграл, рассматривается как линейная комбинация дельта-функций. В приближаемом интеграле обобщенной функцией выступает индикатор области интегрирования. Погрешность кубатурной формулы представляет собой разность этих двух линейных функционалов. Константой, оценивающей погрешность, выступает произведение норм функционала в сопряженном и функции в основном пространствах. Поскольку норма функции предполагается заданной, основное внимание уделяется выражению нормы функционала.

Первым функциональным пространством, для которого была решена такая задача, было $L_2^{(m)}$ с ограничением $2m > n$. Ограничение обеспечивает непрерывность основных функций, что необходимо для существования дельта-функций над ними. Благодаря показателю суммируемости $p = 2$ это пространство является гильбертовым, и задача нахождения нормы функционала здесь сводится к решению линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. На этом этапе возникает объект, называемый экстремальной функцией данного функционала и являющийся, по сути, точкой единичной сферы равномерно выпуклого пространства, на котором функционал достигает своей нормы. С точки зрения приближения это самая «плохая» функция класса, поскольку кубатурная формула дает на ней наибольшую погрешность. Эта функция является решением указанного уравнения, и через нее можно выразить норму функционала.

В данной работе рассматривается весовое пространство Соболева с произвольным показателем суммируемости $1 < p < \infty$, и уравнение, решением которого является экстремальная функция, становится в общем случае нелинейным. Поэтому построение экстремальной функции производится без решения этого уравнения, на основе интегрального представления функционала и условии достижимости функционалом своей нормы.

1. Исходные положения

Пространством основных функций в работе выступает весовое пространство Соболева $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$. Весом является положительная на $\mathbf{R}_n$ функция $\omega(x) = \omega(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая обобщенные частные производные $D^\alpha\omega(x)$ до порядка m включительно, такая, что произведения $\omega^{1/p}(x)\,|D^\alpha\varphi(x)|$ суммируемы в p-й степени, $1 < p < \infty$. Здесь $\varphi(x)$ – функция из основного пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Условие $pm > n$ обеспечивает непрерывность основных функций. Норма в пространстве $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ определяется выражением

$$\left\|\varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right\| = \left(\int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega(x) \left| D^\alpha \varphi(x) \right|^p dx \right)^{1/p}. \tag{1}$$

Функционал l над пространством основных функций является линейным финитным с ограниченным носителем $\mathrm{supp}(l) \subseteq \Omega$, где Ω – ограниченная в $\mathbf{R}_n$ область.

Определение (С.Л. Соболев). Экстремальной функцией данного функционала называется функция, для которой выполнено равенство

$$\langle l, \psi_l \rangle = \left\| l \middle| B^* \right\| \, \| \psi_l | B \|,$$

где B – банахово пространство основных функций и B^* – сопряженное ему пространство обобщенных функций [1].

В качестве основного принято рассматривать пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций $D(\mathbf{R}_n)$ и пространство обобщенных функций над ним $D^*(\mathbf{R}_n)$. Пространство $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ – замыкание $D(\mathbf{R}_n)$ по норме (1), и для этих пространств выполнено включение $D \subset W_p^{(m)}$. Для пространств обобщенных функций над ними справедливо обратное включение $W_p^{(m)*} \subset D^*$, поэтому утверждения, доказанные для элементов из D^*, будут верными и для элементов из $W_p^{(m)*}$. Множество функционалов погрешности кубатурных формул является подмножеством всех линейных функционалов над весовым пространством Соболева, следовательно, доказанные здесь утверждения будут верны и для них.

2. Фундаментальные решения эллиптических операторов

Приведенные в этом пункте утверждения предваряют доказательство теоремы о представлении функционала в весовом пространстве Соболева.

Рассмотрим два эллиптических оператора

$$(1-\Delta)^m = \sum_{k=0}^{m} \tfrac{m!}{k!(m-k)!} (-1)^k \Delta^k ; \tag{2}$$

$$\sum_{|\alpha| \le m} \tfrac{|\alpha|!}{\alpha!} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \Delta^k , \tag{3}$$

которые совпадают при $m = 1$. При $m > 1$ фундаментальное решение $E(|x|)$ оператора (3) в явном виде не построено. Тем не менее, можно получить оценки его производных в окрестности начала координат и на бесконечности, используя оценки производных фундаментального решения $G_{2m}(|x|)$ оператора (2), сведения о котором приведены в [2]:

$$\left|D^{\alpha}G_{2m}\right| \le C\begin{cases} \dfrac{e^{-|x|}}{|x|^{\frac{n-2m+1}{2}}}, & |x|>1, \qquad \forall n, m, \alpha; \\ 1-\ln|x|, & |x|<1, \quad n-2m+|\alpha|=0, \quad |\alpha|=2k, k\in \mathbf{Z}; \\ \dfrac{1}{|x|^{n-2m+|\alpha|}}, & |x|<1, \quad n-2m+|\alpha|=0, \quad |\alpha|=2k+1, k\in \mathbf{Z} \\ & \text{или} \quad n-2m+|\alpha|>0; \\ 1, & |x|<1, \quad n-2m+|\alpha|<0. \end{cases}$$

Лемма 1. Фундаментальное решение $G_{2m}(|x|)$ оператора (2) принадлежит пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$ при $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Для доказательства требуется установить суммируемость в степени q частных производных всех порядков $|\alpha| \le m$ функции $G_{2m}(|x|)$. На основании приведенных оценок все частные производные убывают на бесконечности по экспоненциальному типу, и несобственные интегралы вне единичного шара от каждой из производных сходятся. Несобственный интеграл от первой из функций, оценивающих производные внутри единичного шара, сходится, а интеграл от единицы является собственным. Интеграл от второй функции, оценивающей производные $D^{\alpha}G_{2m}(|x|)$, возведенной в степень q, сходится при условии $p(2m - |\alpha|) > n$. Таким образом, производные наивысшего порядка оцениваются сходящимся несобственным интегралом при $pm > n$.

Лемма 2. Функция $\lambda(|x|) = \dfrac{\left(1+|x|^2\right)^m}{\sum\limits_{|\alpha|=0}^{m}|x|^{2|\alpha|}}$, $x \in \mathbf{R}_n$, является мультипликатором в L_p при $1 < p < \infty$.

Доказательство. Функция n действительных переменных $\lambda(|x|)$ является отношением полиномов равных степеней. Знаменатель ее не имеет действительных корней, и потому $\lambda(|x|)$ непрерывна на $\mathbf{R}_n$. Так как $\lim\limits_{|x|\to\infty}\lambda(|x|)=1$, то $\lambda(|x|)$ ограничена.

Производные $D^k\lambda(|x|)$, где $k = (k_1, \ldots, k_n)$, ($k_j = 0, 1$; $j = 1, \ldots, n$) также непрерывны и $\lim\limits_{|x|\to\infty} x^k D^k \lambda(|x|) = a_k$, где a_k – отношение коэффициентов при старших степенях числителя и знаменателя, откуда следует ограниченность произведения, стоящего под знаком предела.

Таким образом, функция $\lambda(|x|)$ удовлетворяет требованиям критерия, сформулированного в [2], и является мультипликатором, что доказывает утверждение леммы.

Лемма 3. Фундаментальное решение $E(|x|)$ оператора (3) принадлежит пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$ при $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$.

Доказательство. Функции $E(|x|)$ и $G_{2m}(|x|)$ связаны выражением

$$E(|x|) = F^{-1}\left[\frac{1}{F\left[\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k\Delta^k\right]}\right] = F^{-1}\left[\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m}|2\pi z|^{2k}}\right] =$$

$$= F^{-1}\left[\frac{\left(1+|2\pi z|^2\right)^m}{\sum\limits_{k=0}^{m}|2\pi z|^{2k}}\cdot\frac{1}{\left(1+|2\pi z|^2\right)^m}\right] = F^{-1}\left[\lambda\left(|2\pi z|\right)F\left[G_{2m}\left(|x|\right)\right]\right]. \qquad (4)$$

Здесь и далее F и F^{-1} – прямое и обратное преобразования Фурье. Согласно свойствам мультипликатора $\lambda(|x|)$ [2],

$$E\left(|x|\right) = F^{-1}[\lambda] * G_{2m}\left(|x|\right),$$

и по правилу дифференцирования свертки при всех $|\alpha| \le m$

$$D^\alpha E\left(|x|\right) = F^{-1}[\lambda] * D^\alpha G_{2m}\left(|x|\right). \qquad (5)$$

По определению [2] для мультипликатора $\lambda(|x|)$ и любой функции $f \in L_q(\mathbf{R}_n)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, выполняется неравенство

$$\left\| F^{-1}[\lambda F[f]] \middle| L_q\left(\mathbf{R}_n\right)\right\| \le C\left\| f \middle| L_q\left(\mathbf{R}_n\right)\right\|. \qquad (6)$$

Это неравенство будет справедливым и для весовых норм. Следовательно, на основании (4) – (6) при всех $|\alpha| \le m$ справедлива оценка производных функции $E(|x|)$

$$\left\| D^\alpha E \middle| L_q\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\| \le C\left\| D^\alpha G_{2m} \middle| L_q\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\|,$$

что доказывает утверждение леммы.

3. Представление функционала

Теорема 1. Для любого линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\mathrm{supp}(l) \subseteq \Omega$, при условии $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, существует единственная функция $u \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$, реализующая его представление в виде

$$\langle l, \varphi\rangle = \int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\tfrac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\alpha u\, D^\alpha\varphi\, dx. \qquad (7)$$

Доказательство. Интегрирование по частям в (7) приводит к тому, что функция u должна удовлетворять уравнению

$$\left\langle \sum_{|\alpha|\le m}\tfrac{|\alpha|!}{\alpha!}(-1)^{|\alpha|}D^{2\alpha}u, \varphi\right\rangle = \langle l, \varphi\rangle.$$

Известно [3], что функция, удовлетворяющая уравнению с постоянными коэффициентами, равна свертке $u = E{*}l$ правой части с фундаментальным решением уравнения. Эта функция единственна, так как свертка D^* существует. Покажем далее, что u принадлежит также и пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$, иными словами, является регулярной обобщенной функцией.

Применение неравенства Гельдера к (7) приводит к необходимости существования нормы функции u в пространстве $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$

$$\langle l, \varphi\rangle = \left(\int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\tfrac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega^{-\frac{1}{p-1}}\left|D^\alpha u\right|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\tfrac{|\alpha|!}{\alpha!}\omega\left|D^\alpha\varphi\right|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (8)$$

Рассмотрим пространство $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$ как основное и норму функции u в виде

$$\left\| u \left| W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\| = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left\| D^\alpha u \left| L_q\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Тогда на основании ограниченности всякого линейного функционала в L_q [4] имеем для всех $|\alpha| \le m$

$$\left\| D^\alpha u \left| L_q\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\|^q = \int_{\mathbf{R}_n} \omega^{-\frac{1}{p-1}} \left| D^\alpha E * l \right|^q dx \le M_\alpha^q \int_{\mathbf{R}_n} \omega^{-\frac{1}{p-1}} \left| D^\alpha E \right|^q dx .$$

На основании леммы 3 интеграл, стоящий в правой части неравенства, сходится, если $pm > n$. Отсюда следует принадлежность функции u пространству $W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$.

Теорема доказана.

4. Неравенства Гельдера в различных пространствах

В дальнейшем нам потребуется неравенство Гельдера для интегралов в следующей форме. Если $f(x) \in L_p(\mathbf{R}_n)$, $g(x) \in L_q(\mathbf{R}_n)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$,

$$\xi(x) = \frac{|f(x)|}{\left(\int_{\mathbf{R}_n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}}, \quad \eta(x) = \frac{|g(x)|}{\left(\int_{\mathbf{R}_n} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}},$$

где знаменателями дробей выступают нормы заданных функций и $\|\xi(x)\,|L_p(\mathbf{R}_n)\| = 1$, $\|\eta(x)\,|L_q(\mathbf{R}_n)\| = 1$, то выполняется неравенство

$$\int_{\mathbf{R}_n} \xi(x)\eta(x)dx \le 1, \tag{9}$$

которое превращается в равенство, если $\xi^p(x) = \eta^q(x)$.

Лемма 4. Если $f \in L_p(\mathbf{R}_n, \omega)$, $g \in L_q(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, то существуют такие функции ξ_ω и η_ω, что $\|\xi_\omega\,|L_p(\mathbf{R}_n)\| = 1$, $\|\eta_\omega\,|L_q(\mathbf{R}_n)\| = 1$ и выполняется неравенство

$$\int_{\mathbf{R}_n} \xi_\omega \eta_\omega dx \le 1, \tag{10}$$

которое становится равенством при $\xi_\omega^{\,p} = \eta_\omega^{\,q}$.

Доказательство. Из условия следует, что $\omega^{1/p} f \in L_p(\mathbf{R}_n)$, $\omega^{-1/p} g \in L_q(\mathbf{R}_n)$. Тогда согласно вышесказанному существуют функции

$$\xi = \frac{|\omega^{1/p} f|}{\left\| \omega^{1/p} f \left| L_p(\mathbf{R}_n) \right\|} = \omega^{1/p} \frac{|f|}{\left\| f \left| L_p(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|} = \omega^{1/p} \xi_\omega ;$$

$$\eta = \frac{|\omega^{-1/p} g|}{\left\| \omega^{-1/p} g \left| L_p(\mathbf{R}_n) \right\|} = \omega^{-1/p} \frac{|g|}{\left\| g \left| L_q\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)}\right) \right\|} = \omega^{-1/p} \eta_\omega ,$$

принадлежащие как невесовым $\xi \in L_p(\mathbf{R}_n)$, $\eta \in L_q(\mathbf{R}_n)$, так и весовым $\xi_\omega \in L_p(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\eta_\omega \in L_q(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$ пространствам. Отсюда следует, что если верно (9), то верно и (10). Достижение равенства проверяется непосредственной подстановкой.

Лемма доказана.

Лемма 5. Если $f \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $g \in W_q^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, то существуют такие функции $\xi_{\omega,m}$ и $\eta_{\omega,m}$, что $\|\xi_{\omega,m}|L_p(\mathbf{R}_n)\| = 1$, $\|\eta_{\omega,m}|L_q(\mathbf{R}_n)\| = 1$ и выполняется неравенство

$$\int_{\mathbf{R}_n} \xi_{\omega,m}\eta_{\omega,m}dx \le 1, \tag{11}$$

которое становится равенством при $\xi_{\omega,m}^{\ p} = \eta_{\omega,m}^{\ q}$.

Доказательство. Норма функции (1) в весовом пространстве Соболева может быть представлена в виде

$$\left\|f\left|W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right. = \left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.^p\right)^{1/p}.$$

Из условия следует, что $D^\alpha f \in L_p(\mathbf{R}_n, \omega)$, $D^\alpha g \in L_q(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)})$ при всех $|\alpha| \le m$. Тогда по лемме 4 существуют функции

$$\xi_{\omega,\alpha} = \frac{|D^\alpha f|}{\left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.};\quad \eta_{\omega,\alpha} = \frac{|D^\alpha g|}{\left\|D^\alpha g\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega^{-1/(p-1)})\right\|\right.}.$$

Для этих функций при любом $|\alpha| \le m$ выполняется неравенство (10), из которого следует

$$\int_{\mathbf{R}_n} D^\alpha f D^\alpha g\,dx \le \left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.\left\|D^\alpha g\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega^{-1/(p-1)})\right\|\right..$$

Суммирование по всем $|\alpha| \le m$ дает

$$\int_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}D^\alpha f D^\alpha g\,dx \le$$

$$\le \sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.\left\|D^\alpha g\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega^{-1/(p-1)})\right\|\right.. \tag{12}$$

После применения неравенства Гельдера для сумм к левой части (12) имеем

$$\left(\int_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha f\right|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbf{R}_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha g\right|^q dx\right)^{1/q} \le$$

$$\le \left\|f\left|W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.\left\|g\left|W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n,\omega^{-1/(p-1)}\right)\right\|\right..$$

Применение неравенства Гельдера для сумм к правой части (12) дает такую же оценку. Поэтому искомые функции имеют вид

$$\xi_{\omega,m} = \frac{\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha f\right|^p\right)^{1/p}}{\left\|f\left|W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.} = \left(\frac{\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\xi_{\omega,\alpha}\left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.}{\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left\|D^\alpha f\left|L_p(\mathbf{R}_n,\omega)\right\|\right.^p}\right)^{1/p};$$

$$\eta_{\omega,m} = \frac{\left(\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha g\right|^q\right)^{1/q}}{\left\|g\left|W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n,\omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)\right\|\right.} = \left(\frac{\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\eta_{\omega,\alpha}\left\|D^\alpha g\left|L_q(\mathbf{R}_n,\omega^{-\frac{1}{p-1}})\right\|\right.}{\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left\|D^\alpha f\left|L_q(\mathbf{R}_n,\omega^{-\frac{1}{p-1}})\right\|\right.^q}\right)^{1/q}.$$

Проверка справедливости равенства и неравенства выполняется непосредственной подстановкой найденных функций в (11).

Лемма доказана.

5. Экстремальная функция линейного функционала

Теорема 2. Для всякого линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\mathrm{supp}(l) \subseteq \Omega$, при условии $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, существует экстремальная функция $\psi_l \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, которая имеет вид

$$\psi_l = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \mathrm{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right).$$

Доказательство. Интегральное представление функционала (7) в весовом пространстве оценивалось неравенством Гельдера (8).

Согласно лемме 5, можно ввести функции

$$\xi_{\omega,m} = \frac{\left(\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi \right|^p \right)^{1/p}}{\left\| \varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|}; \quad \eta_{\omega,m} = \frac{\left(\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q \right)^{1/q}}{\left\| E*l \middle| W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)}\right) \right\|},$$

тогда неравенство Гельдера становится равенством при выполнении условий

$$\frac{\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha \varphi \right|^p}{\left\| \varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p} = \frac{\sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q}{\left\| E*l \middle| W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)}\right) \right\|^q}.$$

Для установления условий равенства знаменателей

$$\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| D^\alpha \varphi \right|^p dx = \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q dx$$

будем рассматривать нормы функций в основных пространствах как нелинейные функционалы, заданные на этих пространствах:

$$F(f) = \left\| f \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|, \quad G(g) = \left\| g \middle| W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)}\right) \right\|.$$

Тогда после цепочки преобразований получим следующее:

$$(F(\varphi))^p = \left\| \varphi \middle| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega) \right\|^p =$$

$$= (G(E*l))^q = \left\| E*l \middle| W_q^{(m)}\left(\mathbf{R}_n, \omega^{-1/(p-1)}\right) \right\|^q =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-\frac{1}{p-1}+1-1} \left| D^\alpha (E*l) \right|^{\frac{p}{p-1}} dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \omega^{-\frac{p}{p-1}} \left| D^\alpha (E*l) \right|^{\frac{p}{p-1}} dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left|\omega^{-1} D^\alpha (E*l)\right|^{\frac{p}{p-1}} dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{\frac{1}{p-1}} \right)^p dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right)^p dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \int\limits_{\mathbf{R}_n} \omega \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right)^p dx =$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left\| \omega^{1/p} \left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right| L_p(\mathbf{R}_n) \right\|^p .$$

Предположим существование такой функции, что

$$D^\alpha \varphi = \left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right), \quad |\alpha| \le m.$$

Тогда последней записью в предыдущей выкладке будет норма такой функции в пространстве $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$.

Покажем, что для непрерывного ограниченного функционала существует функция, для которой выполняются последние соотношения при всех значениях мультииндекса.

Пусть φ_k – последовательность функций из пространства $W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$, сходящаяся по норме к функции φ, т.е. $\| \varphi_k - \varphi \| \to 0$, $k \to \infty$. Тогда из неравенства Минковского в аксиомах нормы следует

$$| f(\varphi_k) - f(\varphi) | = | \, \| \varphi_k \| - \| \varphi \| \, | \le \| \varphi_k - \varphi \| \to 0, \; k \to \infty,$$

что означает непрерывность функционала. Его ограниченность следует из конечности нормы. Из сказанного видно, что равенство функционалов равносильно равенству функций, на которых они определены.

Далее установим вид функции, поскольку на текущий момент имеем лишь систему дифференциальных уравнений с частными производными, но не саму функцию φ. Это можно выполнить при помощи известной схемы построения интегрального представления функции через свертку с дельта-функцией:

$$\varphi = \delta * \varphi = LE * \varphi = \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^{2\alpha} E * \varphi.$$

Здесь L – оператор (3), а E – его фундаментальное решение. После интегрирования по частям получаем

$$\varphi = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * D^\alpha \varphi = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right).$$

Таким образом, на функции φ достигается равенство в оценочном неравенстве, и полученная функция является для данного функционала экстремальной, т.е. $\psi_l = \varphi$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Экстремальная функция $\psi_l \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)$ линейного финитного функционала $l \in W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)$, $\mathrm{supp}(l) \subseteq \Omega$, при условии $pm > n$, $1/p + 1/q = 1$, $1 < p < \infty$, единственна.

Доказательство. Пусть l – данный фиксированный функционал, ψ_l – его экстремальная функция, s – произвольный функционал из того же пространства, что и l. Произвольный функционал s на произвольной функции f из основного пространства удовлетворяет неравенству

$$\left|\langle s, f\rangle\right| \le \left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\| \left\| f \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Неравенство справедливо, если в качестве основной выступает экстремальная функция другого функционала, в том числе и l:

$$\left|\langle s, \psi_l\rangle\right| \le \left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\| \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Если функционал нормировать, то правая часть не будет зависеть от s:

$$\left|\left\langle \frac{s}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| \le \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Заметим, что при $s = l$ неравенство становится равенством

$$\left|\left\langle \frac{l}{\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| = \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Далее, верным будет неравенство

$$\left|\left\langle \frac{s}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| \le \sup_s \frac{\left|\langle s, \psi_l\rangle\right|}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|} \le \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Но также и

$$\left|\left\langle \frac{l}{\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| \ge \left|\left\langle \frac{s}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right|,$$

$$\left|\left\langle \frac{l}{\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| \ge \sup_s \frac{\left|\langle s, \psi_l\rangle\right|}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}.$$

По определению норма экстремальной функции равна

$$\left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\| = \sup_{s \ne 0} \frac{\left|\langle s, \psi_l\rangle\right|}{\left\| s \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}.$$

Отсюда

$$\left|\left\langle \frac{l}{\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|}, \psi_l \right\rangle\right| \ge \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right.\right\|.$$

Следовательно,

$$\left|\left\langle \frac{l}{\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega) \right\| \right.}, \psi_l \right\rangle\right| = \left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega) \right\| \right.,$$

и экстремальная функция ψ_l является единственной.

Теорема доказана.

Далее покажем, как экстремальная функция используется для построения нормы функционала и чему равна норма самой экстремальной функции.

Произвольный функционал s на экстремальной функции функционала l равен

$$\langle s,\psi_l\rangle = \int_{\mathbf{R}_n} s \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha E * \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right) dx =$$

$$= \int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} D^\alpha (E*s) \left(\left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right) dx.$$

После применения неравенства Гельдера

$$|\langle s,\psi_l\rangle| \le \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*s) \right|^q dx \right)^{1/q} \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| \left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{1/(p-1)} \operatorname{sgn}\left(\frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right) \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Равенство достигается, когда функционал l воздействует на свою экстремальную функцию:

$$|\langle l,\psi_l\rangle| = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q dx \right)^{1/q} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^{p/(p-1)} dx \right)^{1/p},$$

отсюда

$$\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega) \right\| \right. = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q dx \right)^{1/q},$$

$$\left\| \psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n,\omega) \right\| \right. = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega^{-1/(p-1)} \left| D^\alpha (E*l) \right|^q dx \right)^{1/p}$$

или

$$\left\| l \left| W_p^{(m)*}(\mathbf{R}_n,\omega) \right\| \right. = \left(\int_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| \frac{D^\alpha (E*l)}{\omega} \right|^q dx \right)^{1/q},$$

$$\left\|\psi_l \left| W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega)\right\| = \left(\int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| \frac{D^\alpha (E * l)}{\omega} \right|^q dx \right)^{1/p} .$$

В заключение отметим, что нормы функционала и его экстремальной функции, находясь в произведении, оценивают функционал на любой функции из основного пространства, иными словами, обеспечивают оценку функционала на рассматриваемом классе функций. Произведение этих норм равно функционалу на своей экстремальной функции и представляет, таким образом, константу, оценивающую данный функционал на классе функций:

$$\left|\langle l, f\rangle\right| \le \left|\langle l, \psi_l\rangle\right| = \int\limits_{\mathbf{R}_n} \sum_{|\alpha| \le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \omega \left| \frac{D^\alpha (E * l)}{\omega} \right|^q dx, \; f \in W_p^{(m)}(\mathbf{R}_n, \omega).$$

В литературных источниках подобные выражения носят название «явного вида». Под этим подразумевается, что если известно выражение функционала и выражение фундаментального решения, то имеется возможность либо аналитически, либо численно получить данную оценку в виде числа. Для функционала, представляющего погрешность некоторого численного метода, такая константа указывает как на конечность погрешности в теоретических выводах, так и на границы абсолютной погрешности этого метода в случае возможности численной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
4. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 28.10.2010 г.

Korytov I.V. THE EXTREME FUNCTION OF A LINEAR FUNCTIONAL IN THE WEIGHTED SOBOLEV SPACE. The element of the uniformly convex space on which a functional reaches its norm is constructed. The result finds an application in the theory of cubature formulas where the error of numerical integration is represented by a linear functional and may be estimated via its norm. The norm of the error functional is expressed through such element which is called an extreme function.

Keywords: extreme function, weighted Sobolev space, linear compactly supported functional, integral representation of a functional, norm of a functional, norm of an extreme function

KORYTOV Igor Vitalievich (Irkutsk State University)
E-mail: kor2003@inbox.ru