

УДК 519.23

П.В. Трясучёв

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ
ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРИРАЩЕНИЙ ЦЕНЫ АКЦИИ**

В работе будет рассматриваться процесс, описывающий относительные приращения цены акции с помощью обобщённого уравнения Ито. Для описания стохастической динамики были взяты цены акции компании Лукойл за период с 18.04.2008 по 17.04.2009, с интервалами $\Delta t = 1$ мин, 5 мин, 10 мин, 15 мин, 30 мин и 1 час.

Ключевые слова: *стохастический процесс, коэффициент сноса, волатильность, относительные приращения, винеровский процесс, марковский процесс.*

При описании стоимости ценных бумаг на финансовых рынках широко используется модель геометрического броуновского движения [1, 2]. Согласно этой модели, стоимость актива S_t как функция времени t подчиняется стохастическому дифференциальному уравнению Ито вида

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

где постоянные μ и σ соответственно дрейф и волатильность; W_t – стандартный винеровский процесс.

В настоящее время становится ясно, что такая модель не является состоятельной [3] и не учитывает многие важные особенности рынка [4, 5]. Чтобы учесть различного рода наблюдаемые закономерности, были введены модели со стохастической волатильностью [1, 2, 6 – 9], согласно которым волатильность рассматривается как случайная переменная и в общем случае как функция $\sigma = \sigma(Y(t))$ некоторого стохастического процесса $Y(t)$.

В настоящей работе будет рассмотрен стохастический процесс $R(t) = (S_{t+1} - S_t)/S_t$, описывающий относительные приращения цен акций. Существует множество моделей определения его коэффициентов, например метод моментов, метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия, которые путем некоторой процедуры варьирования параметров достаточно хорошо воспроизводят вероятностные плотности ценовых приращений, или описывать отдельные наблюдаемые закономерности, однако сделать однозначный вывод о том, какая из моделей наиболее адекватна предложенным эмпирическим данным, не представляется возможным. Кроме того, не ясно, способна ли какая-либо модель детерминировать весь спектр наблюдаемых эффектов одновременно.

Рассмотрим обобщённую модель Ито [1, 2, 8, 9]

$$dR_t = \mu(R, t)dt + \sigma(t)dW_t, \quad (1)$$

где на функции коэффициента дрейфа и диффузии выдвигаются стандартные условия

$$\begin{aligned} D(\mu(R, t)) &< \infty, \quad t \rightarrow \infty, \\ \sigma(t) &< \infty, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В этой связи представляет интерес получение оценок коэффициентов модели стохастической волатильности непосредственно из эмпирических данных, без привлечения метода наименьших квадратов или максимального правдоподобия.

Анализ динамики относительных приращений для акции

Для описания стохастической динамики были взяты цены акции компании Лукойл за период с 18.04.2008 по 17.04.2009, с интервалами $\tau = 1$ мин, 5 мин, 10 мин, 15 мин, 30 мин и 1 ч, и посчитаны относительные приращения для всех наборов данных. Как видно из рис. 1, плотность распределения для R_t близка к нормальной.

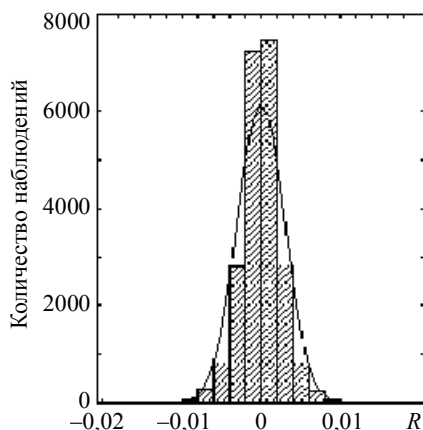


Рис. 1. Плотность распределения относительных приращений для $\tau = 5$ мин. Сплошной линией показана теоретическая плотность распределения, столбцы показывают реальное распределение

Величины R_t будут зависимыми случайными величинами. Данное обстоятельство существенно усложняет процесс эконометрического анализа, так как делает необходимым рассмотрение совместной многомерной плотности распределения $p_N(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2; \dots; R_N, \tau_N)$. Тем не менее, при дополнительных предположениях относительно R_t , выдвинутых в [10], можно рассматривать данные величины как независимые.

Тем не менее, при дополнительных предположениях относительно R_t удастся перейти к последовательности независимых случайных величин (СВ).

Выберем последовательность независимых одинаково распределенных СВ $(\xi_t)_{t \geq 0}$, $E|\xi_t| < \infty$, таких, что

$$R_t = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_t, \quad R_0 = \xi_0, \quad t > 0.$$

Известно [11], что она будет мартингал-разностью на семействе $F_t = \sigma\{\omega; \xi_1, \dots, \xi_t\}$, т.е. почти наверное (п.н.) выполнено следующее равенство:

$$E(\xi_{t+1} | F_t) = 0.$$

Как следствие, R_t будет мартингалом относительно этого семейства σ -алгебр F_t . Поэтому для перехода к исследованию только независимых приращений дос-

точно найти такую $(\xi_t)_{t \geq 0}$. Например, в [12] показано, что в случае существования условного среднего $a = E(R_t | F_t)$ для процесса $(R_t)_{t \geq 0}$ последний представим в виде процесса

$$R_t = a + \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i \xi_{t-i},$$

где $\zeta_i \in \mathbb{R}$; $\sum_{i=0}^{\infty} |\zeta_i| < \infty$; $a = E(R_t | F_t)$ – условное среднее; $(\xi_t)_{t \geq 0} \sim N(0, \sigma_t^2)$ – последовательность независимых, нормально распределенных СВ тогда и только тогда, когда $\alpha + \beta < 1$. Поэтому всюду далее будем предполагать, что R_t независимы, переходя, при необходимости, к рассмотрению последовательности $(\xi_t)_{t \geq 0}$.

Стохастический процесс $R(\tau)$ полностью определяется бесконечным набором совместных плотностей $p_N(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2; \dots; R_N, \tau_N)$, зависящих от N переменных. Существенное упрощение возникает, если $R(\tau)$ есть марковский процесс. В этом случае N -точечная плотность распадается на произведение условных плотностей:

$$p(R_i, \tau_i | R_{i+1}, \tau_{i+1}) = \frac{p_2(R_i, \tau_i; R_{i+1}, \tau_{i+1})}{p_1(R_{i+1}, \tau_{i+1})},$$

где $i = 1, 2, \dots, N-1$ и $p(R_i, \tau_i | R_{i+1}, \tau_{i+1})$ обозначает плотность условной вероятности реализации значения R_i за время τ_i при заданном значении R_{i+1} за время τ_{i+1} . Будем считать, что $\tau_{i+1} > \tau_i$.

Как известно, в случае марковского процесса условные плотности должны удовлетворять уравнению Чэпмена – Колмогорова

$$p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2) = \int p(R_1, \tau_1 | R, \tau) p(R, \tau | R_2, \tau_2) dR, \quad (2)$$

$$\text{где} \quad p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2) = \frac{p(R_1, \tau_1; R_2, \tau_2)}{p(R_2, \tau_2)} \quad (3)$$

Анализируя исходные данные, легко найти условные плотности распределения; проводя численное интегрирование, можно получить следующие результаты, которые представлены на рис. 2 и 3. Из рис. 3 видно, что процесс R – марковский случайный процесс.

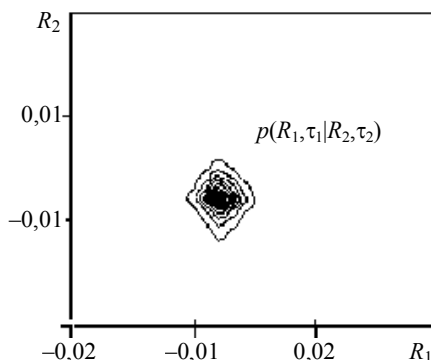


Рис. 2. Двумерная плотность распределения $p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2)$, где $\tau_1 = 10$ мин, $\tau_2 = 15$ мин

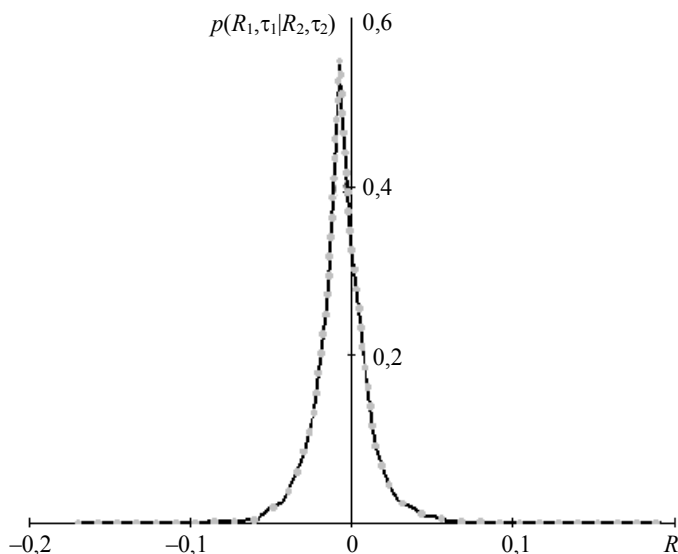


Рис. 3. Условная плотность распределения $p(R_1, \tau_1 | R_2, \tau_2)$, $R_1 = -0,022$. Сплошной линией показана условная плотность, вычисленная по формуле (3), точками – по формуле (2)

Таким образом, с учётом вышесказанного, будем считать, что процесс R подчиняется уравнению (1), где $\mu(R, t)$ – коэффициент сноса, $\sigma(t)$ – волатильность, а dW – приращения для стандартного винеровского процесса.

Коэффициент $\mu(R, t)$ найдём как коэффициент $D_1(R, t)$ уравнения Фоккера–Планка, которое соответствует дифференциальному уравнению (1):

$$\frac{dp(R, t)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial R^2} D_2(R, t) p(R, t) - \frac{\partial}{\partial R} D_1(R, t) p(R, t),$$

где

$$D_1(R, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int_R (R_1 - R_2) p(R_1, t + \Delta\tau | R_2, t) dR_1.$$

Численные значения коэффициента $D_1(R, t)$ представлены на рис. 4, из которого видно, что коэффициент сноса линеен.

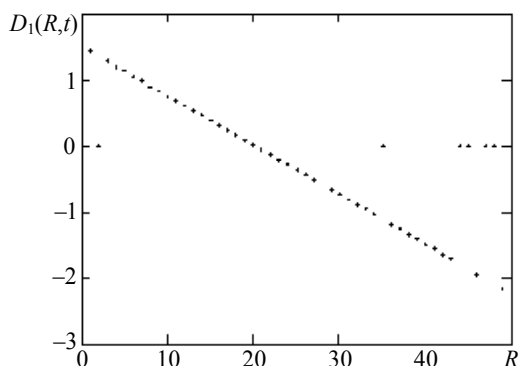


Рис. 4. Численные значения коэффициента сноса

Как не раз оказывалось на практике, волатильность является стохастическим процессом, который описывается следующим уравнением [13]:

$$d\sigma = \alpha(\sigma)dt + \beta(\sigma)dZ, \quad (4)$$

где $\alpha(\sigma)$ – коэффициент сноса для волатильности; $\beta(\sigma)$ – волатильность волатильности, а dZ – приращения винеровского случайного процесса. Будем полагать процесс $\sigma(t)$ стационарным, поэтому параметры уравнения (4) не зависят от времени.

Будем искать волатильность волатильности в виде $v\sigma^\gamma$ [13], для этого возведём левую и правую часть (4) в квадрат и получим

$$(d\sigma)^2 = \beta^2(\sigma)dt,$$

так как $(dZ)^2 = dt$, $(dt)^2 = 0$, $dt \cdot dZ = 0$. Из имеющихся значений волатильности для всех шести временных серий найдём $(\Delta\sigma)^2$, а также среднее значение $M[(\Delta\sigma)^2]$. Таким образом, можно получить следующую зависимость:

$$M[(\Delta\sigma)^2] = \beta^2(\sigma)\Delta t.$$

Положим $\beta(\sigma) = v\sigma^\gamma$, а также напомним, что $\Delta t = \tau$. Затем, логарифмируя, получим

$$\ln(M[(\Delta\sigma)^2]) = \ln(v\tau) + 2\gamma \ln(\sigma).$$

На основе линейной регрессионной модели находим

$$v = 6,178; \gamma = 0,509,$$

результаты представлены на рис. 5.

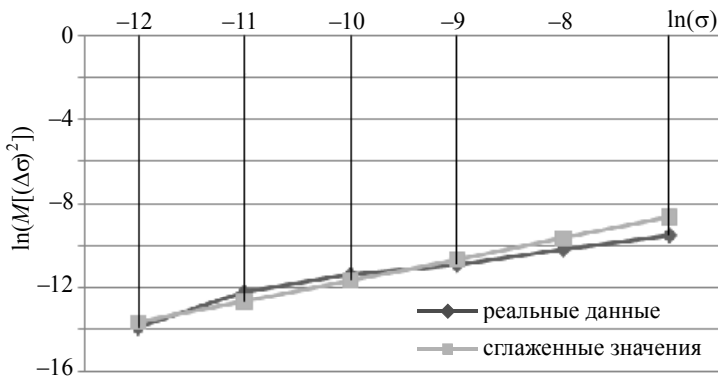


Рис. 5. Зависимость $\ln(M[(\Delta\sigma)^2])$ от $\ln(\sigma)$

Таким образом, $\beta(\sigma) = v\sigma^\gamma$.

Чтобы определить $\alpha(\sigma)$, рассмотрим плотность вероятности $p(\sigma, t)$. Плотность этой вероятности определяет уравнение Фоккера–Планка

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\beta^2 p) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha p). \quad (5)$$

Теперь предположим, что нам известна плотность вероятности $p(\sigma, t)$ в стационарном состоянии, обозначим её $p_\infty(\sigma)$, тогда уравнение (5) переписывается следующим образом:

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\beta^2 p_\infty) - \frac{\partial}{\partial \sigma} (\alpha p_\infty). \quad (6)$$

Проинтегрировав один раз уравнение (6), получаем выражение для коэффициента сноса волатильности

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{2p_\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\beta^2 p_\infty).$$

Распределение $p_\infty(\sigma)$, как видно из рис. 6, логнормальное. Тогда аналитическое выражение для данной плотности примет вид

$$p_\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} e^{-\frac{\ln^2\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)}{2a^2}}.$$

где $\ln \bar{\sigma}$ характеризует математическое ожидание $\ln \sigma$, а a – дисперсию. Графики, полученные для $\alpha(\sigma)$, можно увидеть на рис. 7.

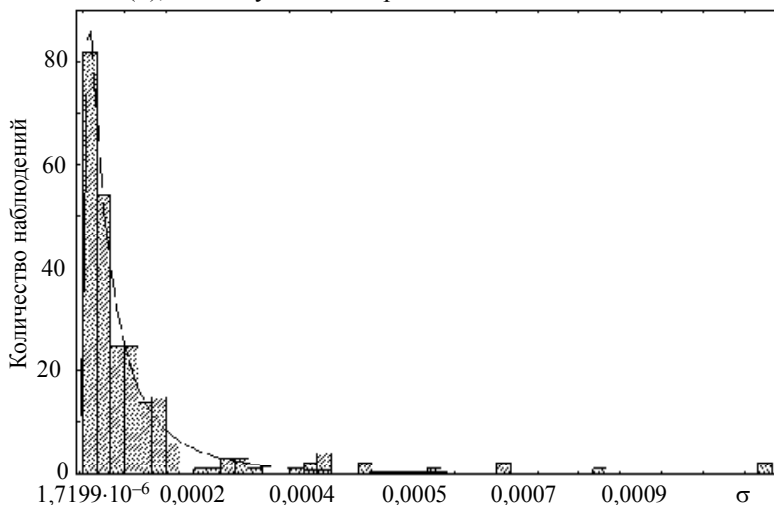


Рис. 6. Плотность распределения волатильности ($\tau=15$ мин)

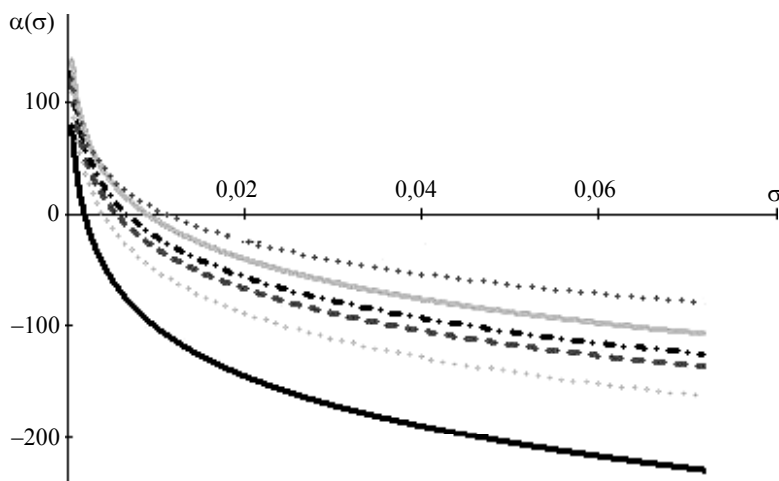


Рис. 7. Коэффициент сноса для волатильности. На графике снизу-вверх представлены коэффициенты сноса для $\tau = 1, 5, 10, 15, 30, 60$ мин

В настоящее время знания о случайном и детерминированном характере процессов, лежащих в основе эволюции финансовых рынков, в значительной мере ограничены. При условии, что относительные ценовые приращения R представляют собой марковский процесс на временной шкале t , было показано, что непосредственно из эмпирических данных могут быть получены коэффициенты обобщённого уравнения Ито (1). В частности, были посчитаны коэффициенты α и β для процесса стохастической волатильности, что позволяет строить краткосрочные прогнозы и доверительные интервалы для волатильности, которые широко используются для оценивания опционов и прогнозирования цены активов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hull J., White A. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities // J. Finance. 1987. V. XLII. P. 281–300.
2. Dragulescu A., Yakovenko V.M. Probability distribution of returns in the Heston model with stochastic volatility // Quant. Finance. 2002. V. 2. P. 443–453.
3. Cont R. Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues // Quant. Finance. 2001. V. 1. P. 223–236.
4. Friedrich R., Peinke J., Renner Ch. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 5224–5227.
5. Ivanova K., Ausloos M., and Takayasu H. Deterministic and stochastic influences on Japan and US stock and foreign exchange markets. A Fokker-Planck approach // arXiv:cond-mat/0301268.
6. Stein E.M. and Stein J.C. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach // Rev. Financial Studies. 1991. V. 4. P. 727–752.
7. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // Rev. Financial Studies. 1993. V. 6. P. 327–343.
8. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Описание российского фондового рынка в рамках модели Гестона // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 10. С. 31–38.
9. Remer R., Mahnke R. Application of Heston model and its solution to German DAX data // Physica A. 2004. V. 344. P. 236–239.
10. Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. 574 с.
11. McNeil A.J., Frey R., Embrechts P. Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.
12. Бухбиндер Г.Л., Чистилин К.М. Стохастическая динамика котировок акций РАО ЕЭС // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 2. С. 119–125.
13. Wilmott P., Oztukel A. Uncertain parameters, an empirical stochastic volatility model and confidence limits // Int. J. Theor. Appl. Fin. 1998. V. 1. P. 175–198.

Статья поступила 01.12.2010 г.

Tryasuchev P.V. STOCHASTIC MODEL OF DYNAMIC RELATIVE INCREMENTS STOCK PRICE. In this paper, the process of relative increment of stock price is considered. The process is described using the generalized Ito equation. Stochastic dynamics was described with Lukoil stock prices during the period of 18.04.2008 up to 17.04.2009, with intervals $\Delta t = 1 \text{ min}, 5 \text{ min}, 10 \text{ min}, 15 \text{ min}, 30 \text{ min}, \text{ and } 60 \text{ min}$.

Keywords: Stochastic process, drift, volatility, relative increments, Wiener process, Markov process.

TRYASUCHEV Petr Vladimirovich (Tomsk Polytechnic University)

E-mail: pet3001@yandex.ru