

УДК 512.541

Д.С. Чистяков, О.В. Любимцев

ОБ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ С UA -КОЛЬЦОМ ЭНДОМОРФИЗМОВ

В статье изучаются почти вполне разложимые и сильно неразложимые абелевы группы без кручения ранга 2, кольцо эндоморфизмов которых является кольцом с однозначным сложением.

Ключевые слова: кольцо с однозначным сложением, почти вполне разложимая абелева группа, сильно неразложимая абелева группа без кручения.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей. Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* (UA -кольцом), если на его мультипликативной полу-группе $(R, *)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую ее в кольцо $(R, *, +)$ [1 – 3].

Абелеву группу, имеющую UA -кольцо эндоморфизмов, мы будем называть *End-UA-группой*.

В настоящей статье получено описание почти вполне разложимых и сильно неразложимых *End-UA-групп* без кручения. Далее всюду под словом «группа» понимается абелева группа.

Будем говорить, что группа A *квазиравна* группе B ($A \approx B$), если A квазисодержится в B и B квазисодержится в A (если $nA \subseteq B$, $mB \subseteq A$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}$). Квазиравенство $A \approx \bigoplus_{i \in I} A_i$, где I – конечное множество, называется *квазиразложением*, или *квазипрямым разложением*, группы A . При этом подгруппы A_i называются *квазислагаемыми* группы A . Группа называется *почти вполне разложимой*, если она квазиравна вполне разложимой группе.

Абелеву группу без кручения A можно естественным образом вложить в $\mathcal{Q}$ -пространство $\mathcal{Q} \otimes A$, которое является делимой оболочкой группы A . Естественный образ вложения подразумевает отождествление элемента $a \in A$ с элементом $1 \otimes a \in \mathcal{Q} \otimes A$. Каждый эндоморфизм $\alpha \in E(A)$ единственным образом продолжается до линейного преобразования $1 \otimes \alpha$ $\mathcal{Q}$ -пространства $\mathcal{Q} \otimes A$. Кольцо $E(A)$ содержится в $End_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q} \otimes A)$.

Таким образом, $E(A) = \{\alpha \in End_{\mathcal{Q}}(\mathcal{Q} \otimes A) \mid \alpha A \subseteq A\}$. $\mathcal{Q}$ -алгебра $\mathcal{Q} \otimes E(A)$ называется *кольцом квазиэндоморфизмов группы A* . Далее для кольца $\mathcal{Q} \otimes E(A)$ примем обозначение S .

Заметим, если S – UA -кольцо, то $E(A)$ тоже будет UA -кольцом. Действительно, новое сложение в кольце $E(A)$ индуцирует новое сложение в кольце S .

Псевдоцоколем абелевой группы без кручения A называется сервантная подгруппа, порожденная всеми ее минимальными сервантными вполне характеристическими подгруппами (*pfi*-подгруппами) – обозначим ее $Soc A$.

Прямое слагаемое A ранга 1 называется *полусвязанным*, если в его дополнительном прямом слагаемом найдется прямое слагаемое ранга 1, тип которого сравним с типом A . При этом группу, каждое прямое слагаемое ранга 1 которой полусвязано, назовем *полусвязанной*. Пусть $\Omega(A)$ множество всех типов прямых слагаемых ранга 1 вполне разложимой группы A . Тип $\tau \in \Omega(A)$ назовем *изолиро-*

ванными, если никакой другой тип из $\Omega(A)$ не сравним с τ . Неопределяемые нами понятия можно найти в [4].

Вспомним полезный для дальнейшего изложения результат: *кольцо R будет UA -кольцом тогда и только тогда, когда любой изоморфизм мультипликативных полугрупп колец $\alpha: R \rightarrow S$ является изоморфизмом колец [1 – 3].*

Теорема 1. Пусть G – почти вполне разложимая группа без кручения конечного ранга и $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ – ее полное квазиразложение. Тогда G является End - UA -группой в том и только том случае, если множество $\Omega(A)$ не содержит изолированных типов.

Доказательство. Достаточность. Имеем $S = \bigoplus_{i,j=1}^k e_i S e_j$, где e_i, e_j – идемпотенты кольца S , соответствующие прямым квазислагаемым данного квазиразложения группы G .

Покажем, что кольцо S является UA -кольцом. Согласно [3, теорема 2.12.], достаточно проверить, что

$$L(e_i S e_j) \cap e_i S e_i = 0 \quad (*)$$

или

$$R(e_j S e_i) \cap e_j S e_j = 0, \quad (**)$$

для любого индекса $i, j \in \{1, \dots, k\}$ (здесь $L(e_i S e_j)$ и $R(e_j S e_i)$ – левый и правый аннуляторы подколец $e_i S e_j$ и $e_j S e_i$ соответственно).

Известно, что $e_i S e_i \cong \mathbb{Q} \otimes E(e_i G)$. Так как A_i является группой ранга 1 без кручения, то имеем изоморфизм $e_i G \cong A_i$. По условию теоремы, для любого индекса $i \in \{1, \dots, k\}$ найдется индекс $j \in \{1, \dots, k\}$, такой, что $t(e_j G) \geq t(e_i G)$ (или наоборот). Покажем, что для любого $0 \neq \varphi \in e_i S e_i$ найдется $\eta \in e_j S e_i$, такой, что $\eta \varphi \neq 0$.

Пусть $\varphi(x) = y \neq 0$ для некоторого $x \in \mathbb{Q} \otimes e_i G$. Найдется $n \in \mathbb{N}$, такой, что $nx \in e_i G$. Далее, $m\varphi(nx) \in e_i G$ для некоторого натурального m , то есть справедливо $m\varphi(nx) \in e_i G$, $m\varphi(nx) = m\varphi(x) = y' \neq 0$, где $y' \in e_i G$.

Пусть $W = e_i V$, $U = e_j V$, где V – делимая оболочка группы G . Если $0 \neq \delta \in e_j S e_i$, то $\delta \in \text{Hom}(W, V)$, причем найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $k\delta(e_i G) \subseteq e_j G \cong A_j$. Следовательно, ограничение $k\delta$ на $e_i G$ есть мономорфизм из $e_i G$ в $e_j G$. Поэтому $k\delta(y') = y'' \neq 0$.

Заметим теперь, что если $\eta(m\varphi) \neq 0$ для некоторого $\eta \in e_j S e_i$, то $\eta \varphi \neq 0$. Положим $\eta = k\delta$. Тогда $\eta(m\varphi)(nx) = \eta(y') = k\delta(y') = y'' \neq 0$ и равенство $(**)$ выполнено. Следовательно, кольцо S является UA -кольцом. На основании сделанного во введении замечания заключаем, что $E(G)$ – UA -кольцо.

Необходимость. Докажем утверждение для случая $A = A_1 \oplus A_2$ (доказательство распространяется на случай большего ранга группы A). Предположим противное: тип $t(A_1)$ не сравним с типом $t(A_2)$. Тогда $e_i S e_j = 0$ при $i \neq j$. Далее, так как A_i – группа ранга 1, то $e_i S e_i \cong \mathbb{Q}$. Следовательно, $S \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

В работе [2] (после следствия 2 к теореме 3) имеется такое замечание: если R не UA -кольцо, то для любого кольца T , в свою очередь, $R \times T$ не является UA -кольцом. Применяя это утверждение к кольцу $S \cong \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, заключаем, что S не UA -кольцо (см. также [1, лемма 2.5]).

Покажем, что $E(G)$, будучи подкольцом в S , также не является UA -кольцом.

Построим мультипликативный автоморфизм φ кольца $E(G)$, полагая $\varphi(a, b) = (-1)^k(a, b)$, где k находится из равенства $a = p^k a'$, $(p, a') = 1$ (наименьший общий делитель p и a' равен 1).

Очевидно, что φ – биекция. Кроме того, если $a_1 = p^u a'_1$, $a_2 = p^v a'_2$, то

$$\begin{aligned} \varphi[(a_1, b_1)(a_2, b_2)] &= \varphi[a_1 a_2, b_1 b_2] = \varphi[p^{u+v} a'_1 a'_2, b_1 b_2] = \\ &= (-1)^{u+v}(a_1 a_2, b_1 b_2) = \varphi[(a_1, b_1)] \varphi[(a_2, b_2)]. \end{aligned}$$

Следовательно, φ сохраняет умножение. Так как $\varphi(p(1,1)) = \varphi(p,p) = -(p,p) \neq \varphi(p,p) = p\varphi(1,1)$, то φ не является кольцевым автоморфизмом кольца $E(G)$. Противоречие. Теорема доказана.

Доказанная теорема находит свое применение в проблеме определяемости абелевых групп.

Говорят, что абелева группа $A \in X$ определяется своим кольцом эндоморфизмов $E(A)$ в классе абелевых групп X , если всякий раз из изоморфизма $E(A) \cong E(B)$, где $B \in X$, следует изоморфизм $A \cong B$. По аналогии вводится понятие определяемости абелевой группы полугруппой эндоморфизмов.

Следствие 2. Пусть G – почти вполне разложимая группа без кручения и $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ – ее полное квазиразложение. Если множество $\Omega(A)$ не содержит изолированных типов и группа G определяется своим кольцом эндоморфизмов в некотором классе абелевых групп, то она определяется своей полугруппой эндоморфизмов в этом классе.

Чтобы привести пример группы, не являющейся эндоморфной, обратимся к сильно неразложимым группам без кручения ранга 2, для которых кольцо $E(G)$ не является подкольцом кольца рациональных чисел. Такие группы хорошо изучены (см., напр. [5]). В этой ситуации возможны следующие случаи [5, § 3]:

1. Группа G – сильно неразложима, при этом $\dim_{\mathbf{Q}} S = 2$.

2. Группа G – сильно неразложима, при этом $S \cong \left\{ \begin{pmatrix} q & r \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbf{Q} \right\}$.

Заметим, что, если $S \cong \mathbf{Q}$, то S и, следовательно, $E(G)$ не являются UA -кольцами.

Для доказательства следующего утверждения нам будут полезны некоторые понятия и результаты, касающиеся однородных отображений модулей.

Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей, V – унитарный левый R -модуль.

Множество $M_R(V) = \{f: V \rightarrow V \mid f(rx) = rf(x), r \in R, x \in V\}$ является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений. Элементы множества $M_R(V)$ называются R -однородными отображениями. Очевидно, что множество $M_R(V)$ содержит кольцо $E_R(V)$ всех эндоморфизмов R -модуля V .

В работе [6, Предл. 2.4] доказано, что, если $M_R(V) = E_R(V)$ для всех R -модулей V , то R – UA -кольцо.

Теорема 3. Сильно неразложимая группа G без кручения ранга 2 является End - UA -группой в том и только том случае, когда G не совпадает со своим псевдоцоклем $Soc\ G$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $G = Soc\ G$. Тогда $S \cong \mathbf{Q}$ или S – квадратичное поле, причем $\dim_{\mathbf{Q}} S = 2$. В обоих случаях кольцо S не является UA -кольцом, так как, например, мультипликативный изоморфизм

$$\alpha: S \rightarrow S, \quad \alpha(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ x^{-1}, & x \neq 0 \end{cases}$$

не является изоморфизмом колец. Поэтому G – не End - UA -группа.

Достаточность. Пусть G не совпадает со своим псевдоцоклем $Soc\ G$.

Тогда $S \cong \left\{ \begin{pmatrix} q & r \\ 0 & q \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbf{Q} \right\}$. Пусть V – унитарный левый S -модуль, $f \in M_S(V)$ и

$x, y \in V$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (x+y)\right) = f(x),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} f(x+y) = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(x+y)\right) = f(y).$$

Сложив данные равенства, получим $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Поэтому $f \in E_S(V)$ и $M_S(V) = E_S(V)$. Из работы [6, Предл. 2.4] следует, что кольцо S является UA -кольцом. Следовательно, кольцо $E(G)$ так же является UA -кольцом. Теорема доказана.

Авторы признательны профессору Чехлову А.Р. за полезные замечания, коллективу кафедры алгебры Томского государственного университета за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nelius Chr.-F.* Ring emit eindentiger Addition. Padeborn, 1974.
2. *Stephenson W.* Unique addition rings // *Can. J. Math.* 1969. V. 21. No. 6. P. 1455–1461.
3. *Михалев А.В.* Мультипликативная классификация ассоциативных колец // *Мат. сб.* 1988. Т. 135 (177). № 2. С. 210–224.
4. *Крылов П.А., Михалев А.В., Туганбаев А.А.* Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: ТГУ, 2002.
5. *Arnold D.M.* Finite rank torsion – free abelian groups and rings // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 931. P. 1–191.
6. *B. van der Merwe.* Unique addition modules // *Communications in algebra.* 1999. V. 27(9). P. 4103–4115.

Статья поступила 26.10.2010 г.

Chistyakov D.S., Lyubimcev O.V. ON TORSION – FREE ABELIAN GROUPS WITH UA-RINGS OF ENDOMORPHISMS. In this paper, we study almost completely decomposable and strongly indecomposable torsion – free rank 2 Abelian groups the endomorphism ring of which is a unique addition ring.

Keywords: unique addition ring, almost completely decomposable Abelian group, strongly indecomposable torsion – free Abelian group.

CHISTYAKOV Denis Sergeevich (Nizhny Novgorod Commercial Institute)

E-mail: chistyakovds@yandex.ru

LYUBIMCEV Oleg Vladimirovich (Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering)

E-mail: oleg_lyubimcev@mail.ru