УДК 517. 95

Т.К. Юлдашев

О СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО КВАДРАТ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И НЕЛИНЕЙНОЕ ОТРАЖАЮЩЕЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Рассматриваются вопросы однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение. С помощью нелинейного метода ряда Фурье задача сводится к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений. Доказывается сходимость полученного ряда.

Ключевые слова: *квадрат гиперболического оператора, нелинейное отражающее отклонение, счетная система нелинейных интегральных уравнений, обобщенные производные, сходимость ряда.*

1. Постановка задачи

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),u\left(\delta(t,x,u(-t,x)),x\right)\right) \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями

$$\left[\begin{array}{l} u(t,x)_{|t\in(-\infty;-T]}=0,\ u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ u(t,x)_{|t\in[T,\infty)}=0, \\ u_t(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x),\ u_{tt}(t,x)_{|t=0}=\varphi_3(x),\ u_{ttt}(t,x)_{|t=0}=\varphi_4(x); \end{array}\right. \tag{2}$$

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0, \tag{3}$$

где
$$f(t,x,u\vartheta)\in C(D\times R^2),\ \ \varphi_i(x)\in C^5(D_l),$$

$$\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=0,\ \ i=\overline{1,4}\ ,$$

$$D\equiv D_T\times D_l,\ D_T\equiv[-T,T],\ \ D_l\equiv[0,l],\ 0<l<\infty,\quad 0<T<\infty,\ \delta(t,x)\neq t.$$

Отметим, что в работах [1,2] изучены краевые задачи для однородных и линейных дифференциальных уравнений в частных производных третьего и четвертого порядков. В работе [3] обосновано применение метода разделения переменных к смешанным задачам для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

В данной работе используется другая методика применения метода разделения переменных: ищем решение смешанной задачи (1) – (3) в виде ряда Фурье. Обычная методика разделения переменных в случае уравнения (1) не применима, т.е. переменные в этом уравнении не разделяются. А применение ряда Фурье позволяет нам в отличие от других работ (напр.см. [3,4]) отказываться от непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1). Кроме того, такой подход позволяет нам с помощью интегрального тождества свести смешанную задачу к счетной системе нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой легко доказывается методом последовательных приближений.

2. Сведение решение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи (1) – (3) ищем в виде ряда Фурье [5]:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cdot b_n(x), \quad (t,x)\in D, \tag{4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n=1,2,\dots$.

В множестве $\left\{\vec{a}(t)=(a_n(t))\,\middle|\, a_n(t)\in C[-T;T],\ n=1,2,\dots\right\}$ определим операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n(t)\right|^p<\infty$. Это множество обозначим через $B_p(T)$ и снабдим его нормой

$$\|\vec{a}(t)\|_{B_p(T)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n(t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Для каждого элемента $\vec{a}(t)\in B_p(T)$ определим оператор Q следующим образом:

$$Q\vec{a}(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\cdot b_n(x).$$

Обозначим через $E_p(D)$ множество значений оператора Q. Очевидно, что $Q\colon B_p(T)\to E_p(D)$. Обозначим через $W_{k,p}(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x)$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(t,x)$ имеют k-е обобщенные производные по t, принадлежащие $L_p(D_l)$, и обращаются в нуль при $t\ge T-\delta$ ($0<\delta-$ зависит от $\Phi(t,x)$). Для функций из $W_{k,p}(D)$ справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\Phi(t,x)\,dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t}dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial t^2}dx=\lim_{t\to\pm T}\int_0^l\frac{\partial^3\Phi(t,x)}{\partial t^3}dx=0.$$

при $k=4$.

Определение. Если функция $u(t,x)\in E_p(D)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int_0^t\int_0^l\left\{u(s,x)\left[\frac{\partial^4}{\partial s^4}\Phi-2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}dx\,ds=$$

$$=\int_0^l \varphi_1\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)\right]_{t=0} dx-\int_0^l \varphi_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0} dx+$$

$$+\int_0^l \varphi_3\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]_{t=0} dx-\int_0^l \varphi_4[\Phi]_{t=0}\, dx$$

для любого $\Phi(t,x)\in W_{k,p}(D)$, то функция $u(t,x)$ называется решением смешанной задачи (1) – (3).

Согласно определению, решение задачи (1) – (3) разлагается в ряд Фурье по собственным функциям дифференциального оператора $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ почти для всех $t\in D_T$, причем единственным образом. Если $u(t,x)$ является решением смешанной задачи (1) – (3), то имеет место разложение (4) почти при всех $t\in D_T$ в смысле $L_q(D)$ и

$$a_n(t)=\int_0^l u(t,x)b_n(x)\,dx\,,$$

$$G_n(t,s)=\frac{1}{2\lambda_n^2}\Big(\lambda_n(t-s)\cos\lambda_n(t-s)+\sin\lambda_n(t-s)\Big).\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l},\ n=1,2,\dots .$$

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1. Функция $f(t,x,u,\vartheta)$ непрерывна.

2. $\left\|\vec{\omega}(t)\right\|_{B_p(T)}<\infty.$

Тогда коэффициенты Фурье $a_n(t)$ решения смешанной задачи (1) – (3) по собственным функциям $b_n(x)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений:

$$a_n(t)=\omega_n(t)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)\times$$
$$\times b_n(x)G_n(t,s)\,dx\,ds,\ t\in D_T, \tag{5}$$

где
$$\omega_n(t)=\frac{2\lambda_n^2\varphi_{1n}-t(\lambda_n^2\varphi_{2n}+\varphi_{4n})\varphi_{2n}+\varphi_{3n}}{2\lambda_n^2}\cos\lambda_n t+$$
$$+\frac{\lambda_n^4 t\varphi_{1n}+3\lambda_n^2\varphi_{2n}+\lambda_n^2 t\varphi_{3n}+\varphi_{4n}}{2\lambda_n^3}\sin\lambda_n t,$$

$$G_n(t,s)=\frac{1}{2\lambda_n^2}\Big(\lambda_n(t-s)\cos\lambda_n(t-s)+\sin\lambda_n(t-s)\Big). \tag{5$_1$}$$

Доказательство. Согласно определению решения смешанной задачи (1) – (3), имеем

$$\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)\cdot b_n(x)\left[\frac{\partial^4}{\partial s^4}\Phi-2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)+\frac{\partial^4}{\partial x^4}\Phi\right]-f\,\Phi\right\}dx\,ds=$$

$$=\int_0^l\varphi_1\left[\frac{\partial^3}{\partial t^3}\Phi-2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right)\right]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi-2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi\right]_{t=0}dx+$$

$$+\int_0^l\varphi_3\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi\right]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_4\left[\Phi\right]_{t=0}dx. \qquad (6)$$

Пусть в (6) $\Phi=\Phi_m(t,x)=g(t)b_m(x)\in W_{k,p}(D)$, где $0\neq g(t)\in C^3(D_T)$. Тогда имеем

$$\int_0^t\int_0^l\left\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)\cdot b_n(x)\times\right.$$

$$\times\left[g^{IV}(s)b_m(x)+2\lambda_m^2 g''(s)b_m(x)+\lambda_m^4 g(s)b_m(x)\right]-$$

$$\left.-f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)g(s)b_m(x)\right\}dx\,ds=0.$$

Учитывая, что система функций $\left\{b_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормирована, из последнего равенства имеем

$$\int_0^t\left[a_n(s)\cdot\left(g^{IV}(s)b_m(x)+2\lambda_m^2 g''(s)b_m(x)+\lambda_m^4 g(s)b_m(x)\right)-\right.$$

$$\left.-\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)g(s)b_n(x)\,dx\right]ds=0.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойство обобщенного решения, имеем

$$\int_0^t g(s)\left[a_n^{IV}(s)+2\lambda_m^2 a_n''(s)+\lambda_m^4 a_n(s)-\right.$$

$$\left.-\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)b_n(x)\,dx\right]ds=0. \qquad (7)$$

Так как $g(t)$ любая функция, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, то $a_n(t)$ имеет обобщенные производные третьего порядка по t в смысле Соболева на интервале D_T. Поскольку $g(t)\neq 0$ для всех $t\in D_T$, то из (7) получим

$$a_n^{IV}(t)+2\lambda_m^2 a_n''(t)+\lambda_m^4 a_n(t)=$$

$$=\int_0^l f\left(t,x,Q\vec{a}(t),Q\vec{a}(\delta(t,x,Q\vec{a}(-t)))\right)b_n(x)\,dx. \qquad (8)$$

Решая систему (8) методом вариации произвольных постоянных, получим

$$a_n(t) = \left(C_{1n} + C_{2n}t\right)\cos\lambda_n t + \left(C_{3n} + C_{4n}t\right)\sin\lambda_n t +$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right) b_n(x)G_n(t,s)\,dx\,ds,\quad t\in D_T, \qquad (9)$$

где $G_n(t,s)$ определяется из (5_1).

Для того чтобы определить коэффициенты $C_{in}\ (i=\overline{1,4})$, используем условия:

$$a_n(0) = \varphi_{1n},\ a_n'(0) = \varphi_{2n},\ a_n''(0) = \varphi_{3n},\ a_n'''(0) = \varphi_{4n},$$

где $\varphi_{in} = \int_0^l \varphi_i(x)b_n(x)dx$, $i=\overline{1,4}$, $x\in D_l$.

Тогда из (9) получим счетную систему нелинейных интегральных уравнений (5).

3. Однозначная разрешимость счетной системы нелинейных интегральных уравнений

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\left|\int_0^t \left\| f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right\|_{L_p(D_l)} ds\right| \le \Delta < \infty$;

2. $f(t,x,u,\vartheta)\in Lip\left\{h_1(t,x)_{|u,\vartheta}\right\}$, где $\int_0^t \left\| h_1(s,x)\right\|_{L_p(D_l)} ds < \infty$;

3. $\delta(t,x,u)\in Lip\left\{h_2(t,x)_{|u}\right\}$, где $\int_0^t \left\| h_2(s,x)\right\|_{L_p(D_l)} ds < \infty$;

4. $\|\vec{\omega}(t)\|_{B_p(T)} < \infty$.

Тогда счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет единственное решение в пространстве $B_p(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. При этом итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} a_n^0(t) = \omega_n(t),\ t\in D_T, \\ a_n^{k+1}(t) = \omega_n(t) + \\ +\dfrac{1}{\lambda_n}\displaystyle\int_0^t\int_0^l f\left(s,x,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,x,Q\vec{a}^k(-s)))\right)\times \\ \times b_n(x)\cdot G_n(t,s)\,dx\,ds,\ k=0,1,2,3,\ldots,\ t\in D_T. \end{cases} \qquad (10)$$

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^1(t)-a_n^0(t)$ из (10) получим

$$\left\|\vec{a}^1(t)-\vec{a}^0(t)\right\|_{B_p(T)} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left|\int_0^t\int_0^l |f_0|\cdot|b_n(x)|\cdot\left|G_n(t,s)\right| dx\,ds\right| \le M_1M_2M_3\, l^{\frac{1}{q}}\,\Delta, \qquad (11^1)$$

где

$$f_k \equiv f\left(s,x,Q\vec{a}^k(s),Q\vec{a}^k(\delta(s,x,Q\vec{a}^k(-s)))\right),\ k=0,1,2,...,$$

$$M_1=\max_{(t,s)}\left|\vec{G}(t,s)\right|,\ \ M_2=\left\|\frac{1}{\lambda}\right\|_{\ell_p},\ \ M_3=\max_x\left\|\vec{b}(x)\right\|_{B_q(l)},\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Аналогично получим, что

$$\left\|\vec{a}^1(-t)-\vec{a}^0(-t)\right\|_{B_p(T)}\le M_1M_2M_3\,l^{\frac{1}{q}}\,\Delta\,, \tag{11²}$$

В силу второго условия теоремы для второй разности $a_n^2(t)-a_n^1(t)$ имеем

$$\left\|\vec{a}^2(t)-\vec{a}^1(t)\right\|_{B_p(T)}\le M_1M_2M_3\int_0^t\int_0^l\left|f_1-f_0\right|dx\,ds.$$

Так как

$$\left|f\left(s,x,Q\vec{a}^1(s),Q\vec{a}^1(\delta(s,x,Q\vec{a}^1(-s)))\right)-f\left(s,x,Q\vec{a}^0(s),Q\vec{a}^0(\delta(s,x,Q\vec{a}^0(-s)))\right)\right|\le$$

$$\le h_1(s,x)\cdot\left[\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right|+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\cdot\left|b_\nu(x)\right|\right]$$

и в силу третьего условия теоремы

$$\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|+$$

$$+\left|a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)-a_\nu^0\left(\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot\left|\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)\right)-\delta\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right)\right|\le$$

$$\le\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right|,$$

то из последнего неравенства с учетом (11¹) и (11²) получим следующую оценку

$$\left\|\vec{a}^2(t)-\vec{a}^1(t)\right\|_{B_p(T)}\le M_1M_2M_3\left|\int_0^t\int_0^l h_1(s,x)\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[2\left|a_\nu^1(s)-a_\nu^0(s)\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\Delta\cdot h_2(s,x)\cdot\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_i^1(-s)\cdot b_i(x)-\sum_{i=1}^{\infty}a_i^0(-s)\cdot b_i(x)\right|\right]\cdot\left|b_\nu(x)\right|dx\,ds\right|\le$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^1(s) - \vec{a}^0(s) \right\|_{B_p(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta \cdot h_2(s,x) \cdot \left\| \vec{a}^1(-s) - \vec{a}^0(-s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| h(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \; (t,x) \in D, \qquad (12^1)$$

где $h(s,x) \equiv h_1(s,x)\big(2 + \Delta \cdot h_2(s,x) \big)$.

Меняя в (12^1) t на $-t$, s на $-s$, получим

$$\left\| \vec{a}^{\,2}(-t) - \vec{a}^{\,1}(-t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^1(-s) - \vec{a}^0(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta \cdot h_2(-s,x) \cdot \left\| \vec{a}^1(s) - \vec{a}^0(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \overline{h}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \; (t,x) \in D, \qquad (12^2)$$

где $\overline{h}(s,x) \equiv h_1(-s,x)\big(2 + \Delta \cdot h_2(-s,x) \big)$.

Пусть $\overline{\overline{h}}(s,x) \equiv \frac{1}{2}\big[h(s,x) + \overline{h}(s,x) \big]$. Тогда из (12^1) и (12^2) получим

$$\left\| \vec{U}^{\,2}(t) - \vec{U}^{\,1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le \left(M_1 M_2\, l^{\frac{1}{q}} \right)^2 M_3^3 \Delta \left| \int_0^t \left\| \overline{\overline{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right|, \; (t,x) \in D, \quad (12^3)$$

где $\left\| \vec{U}^{\,k}(t) - \vec{U}^{\,k-1}(t) \right\| \equiv \max\left\{ \left\| \vec{a}^{\,k}(t) - \vec{a}^{\,k-1}(t) \right\|; \left\| \vec{a}^{\,k}(-t) - \vec{a}^{\,k-1}(-t) \right\| \right\}$.

Для последующей разности $a_n^3(t) - a_n^2(t)$ из (10) получим следующую оценку:

$$\left\| \vec{a}^{\,3}(t) - \vec{a}^{\,2}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^2(s) - \vec{a}^1(s) \right\|_{B_p(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta \cdot h_2(s,x) \cdot \left\| \vec{a}^2(-s) - \vec{a}^1(-s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right|. \qquad (13^1)$$

В неравенстве (13^1) t меняем на $-t$ и s на $-s$. Тогда имеем

$$\left\| \vec{a}^{\,3}(-t) - \vec{a}^{\,2}(-t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l h_1(-s,x) \left(2 \left\| \vec{a}^2(-s) - \vec{a}^1(-s) \right\|_{B_p(t)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. +\Delta \cdot h_2(-s,x) \cdot \left\| \vec{a}^2(s) - \vec{a}^1(s) \right\|_{B_p(t)} \right) dx\, ds \right|. \qquad (13^2)$$

С учетом (12[3]) из (13[1]) и (13[2]) получим следующую оценку:

$$\left\| \vec{U}^{3}(t)-\vec{U}^{2}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{\bar{h}}(s,x) \left\| \vec{U}^{2}(s)-\vec{U}^{1}(s) \right\|_{B_p(t)} dx\,ds \le \right.$$

$$\le M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\{ \int_0^l \bar{\bar{h}}^{\,p}(s,x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\| \vec{U}^{2}(s)-\vec{U}^{1}(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^3 M_3^5 \Delta \frac{\left[\int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right]^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс для произвольного натурального числа k, аналогичным образом получим

$$\left\| \vec{U}^{k+1}(t)-\vec{U}^{k}(t) \right\|_{B_p(T)} \le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!}. \qquad (14)$$

Далее, в силу (14) имеем

$$\left\| \vec{U}(t)-\vec{U}^{k+1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{\bar{h}}(s,x) \left\| \vec{U}(s)-\vec{U}^{k+1}(s) \right\|_{B_p(t)} dx\,ds \right| +$$

$$+ M_1 M_2 M_3^2 \left| \int_0^t \int_0^l \bar{\bar{h}}(s,x) \left\| \vec{U}^{k+1}(s)-\vec{U}^{k}(s) \right\|_{B_p(t)} dx\,ds \right| \le$$

$$\le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!} +$$

$$+ M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} \left\| \bar{U}(s)-\bar{U}^{k+1}(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right|. \qquad (15)$$

Применяя к (15) неравенство типа Гронуолла – Беллмана, получим

$$\left\| \vec{U}(t)-\vec{U}^{k+1}(t) \right\|_{B_p(T)} \le \left(M_1 M_2 l^{\frac{1}{q}} \right)^{k+1} M_3^{2k+1} \Delta \frac{\left[\left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right]^k}{k!} \times$$

$$\times \exp\left\{ M_1 M_2 M_3^2 l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} ds \right| \right\}.$$

Так как

$$\left\| \bar{a}^{k+1}(t) - \bar{a}^{k}(t) \right\|_{B_p(T)} \le \left\| \vec{U}^{k+1}(t) - \vec{U}^{k}(t) \right\|_{B_p(T)},$$

то из оценки (14) следует, что при $k \to \infty$ последовательность функций $\left\{ \vec{a}^{k}(t) \right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $\vec{a}(t) \in B_p(T)$. Отсюда следует существование решения системы (5). Покажем единственность этого решения в пространстве $B_p(T)$. Пусть счетная система нелинейных интегральных уравнений (5) имеет два решения: $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ и $\vec{\vartheta}(t) \in B_p(T)$. Тогда для их разности получим

$$\left\| \bar{U}(t) - \bar{V}(t) \right\|_{B_p(T)} \le M_1 M_2 M_3^2 \, l^{\frac{1}{q}} \left| \int_0^t \left\| \bar{\bar{h}}(s,x) \right\|_{L_p(D_l)} \left\| \bar{U}(s) - \bar{V}(s) \right\|_{B_p(t)} ds \right|, \quad (16)$$

где $\left\| \vec{U}(t) - \vec{V}(t) \right\| \equiv \max\left\{ \left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|; \left\| \vec{a}(-t) - \vec{\vartheta}(-t) \right\| \right\}$.

Применяя к (16) неравенство типа Гронуолла – Беллмана, имеем, что $\left\| \vec{a}(t) - \vec{\vartheta}(t) \right\|_{B_p(T)} = 0$ для всех $t \in [\,0;T\,]$. Отсюда следует единственность решения счетной системы (5) в пространстве $B_p(T)$.

4. Однозначная разрешимость смешанной задачи (1) – (3)

Подставляя счетную систему нелинейных интегральных уравнений (5) в ряд (4), получим формальное решение смешанной задачи (1) – (3):

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Bigg[\omega_n(t) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \int_0^l f\left(s, x, Q\vec{a}(s), Q\vec{a}(\delta(s, x, Q\vec{a}(-s)))\right) \cdot b_n(x) G_n(t,s)\, dx\, ds \Bigg] \cdot b_n(x). \quad (17)$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Если $\vec{a}(t) \in B_p(T)$ является решением счетной системы (5), то ряд (17) будет решением смешанной задачи (1) – (3).

Доказательство. Так как $\vec{a}(t) \in B_p(T)$, то из равенства

$$\lim_{k\to\infty} u^k(t,x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n(t) \cdot b_n(x) = u(t,x)$$

следует, что

$$\lim_{k\to\infty} f\left(t, x, u^k(t,x), u^k(\delta(t, x, u^k(-t,x)), x) \right) =$$

$$= f\left(t, x, u(t,x), u(\delta(t, x, u(-t,x)), x) \right) \quad (18)$$

в смысле метрики $L_p(D)$.

Строим последовательность функций:

$$P_k=\int_0^t\int_0^l\Big\{u^k(s,x)\big[\Phi_{ssss}-2\Phi_{ssxx}+\Phi_{xxxx}\big]-$$

$$-f\Big(s,x,u^k(s,x),u^k(\delta(s,x,u^k(-s,x)),x)\Big)\cdot\Phi(s,x)\Big\}dx\,ds-$$

$$-\int_0^l\varphi_1^k\big[\Phi_{ttt}-2\Phi_{txx}\big]_{t=0}dx+$$

$$+\int_0^l\varphi_2^k\big[\Phi_{tt}-2\Phi_{xx}\big]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_3^k\big[\Phi_t\big]_{t=0}dx-\int_0^l\varphi_4^k\big[\Phi\big]_{t=0}dx. \qquad (19)$$

Покажем, что при $k\to\infty$ (19) есть интегральное тождество (6), т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=0$. Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (19) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0)=\varphi_{1n},\ a_n'(0)=\varphi_{2n},\ a_n''(0)=\varphi_{3n},\ a_n'''(0)=\varphi_{4n},$$

имеем

$$P_k=\int_0^l\left(\varphi_1(x)-\sum_{n=1}^k\varphi_{1n}b_n(x)\right)\big[\Phi_{ttt}-2\Phi_{txx}\big]_{t=0}dx-$$

$$-\int_0^l\left(\varphi_2(x)-\sum_{n=1}^k\varphi_{2n}b_n(x)\right)\big[\Phi_{tt}-2\Phi_{xx}\big]_{t=0}dx+$$

$$+\int_0^l\left(\varphi_3(x)-\sum_{n=1}^k\varphi_{3n}b_n(x)\right)\big[\Phi_t\big]_{t=0}dx-\int_0^l\left(\varphi_4(x)-\sum_{n=1}^k\varphi_{4n}b_n(x)\right)\big[\Phi\big]_{t=0}dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^l\Phi(s,x)\sum_{n=1}^k\left\{\int_0^l f\left(s,y,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,y,Q\vec{a}(-s)))\right)\cdot b_n(y)\,dy-\right.$$

$$\left.-f\left(s,x,Q\vec{a}(s),Q\vec{a}(\delta(s,x,Q\vec{a}(-s)))\right)\right\}\cdot b_n(x)\,dx\,ds. \qquad (20)$$

Очевидно, что первые три интеграла в (20) стремятся к нулю при $k\to\infty$, так как $\varphi_i(x)\in L_p(D_l)$. Сходимость разности двух последних интегралов в (20) при $k\to\infty$ следует из (18). Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=0$. Это и доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т.Д., Логинов Б.В., Малюгина И.А.* Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 24–36.
2. *Бекиев А.Б.* Краевая задача для уравнения четвертого порядка // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: тез. докл. М.: ФВМиК МГУ им. Ломоносова, 2009. С. 140–141.

3. *Чернятин В.А.* Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных. М.: МГУ, 1991. 112 с.
4. *Вагабов А.И.*, *Абдурахманов З.А.* Аналитический метод решения смешанной задачи для квазилинейной параболической системы // Изв. вузов. Математика. 2006. № 7. С. 3–12.
5. *Юлдашев Т.К.* Уравнения в частных производных четвертого порядка. Ош: ОшГЮИ, 2010. 136 с.

Статья поступила 19.01.2011 г.

Yuldashev T. K. ON A MIXED VALUE PROBLEM FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION CONTAINING A SQUARED HYPERBOLIC OPERATOR AND NONLINEAR REFLECTING DEVIATION. In this paper we consider the questions of one-valued solvability of the mixed problem for a nonlinear partial differential equation containing a squared hyperbolic operator and nonlinear reflecting deviation. Using the Fourier nonlinear method, we obtain a countable system of nonlinear integral equations. It is proved that the obtained series converges.

Keywords: quadrate of hyperbolic operator, reflecting deviation, countable system of nonlinear integral equations, general derivatives, convergence of series.

YULDASHEV Tursun Kamaldinovich (Siberian State Aerospace University)
E-mail: tursunbay@rambler.ru