УДК 514.752

Н.М. Онищук, О.В. Цоколова

НЕГОЛОНОМНЫЕ ТОРСЫ 1-ГО РОДА В ЧЕТЫРЁХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В E_4 рассматриваются неголономные трёхмерные распределения, имеющие нулевую полную кривизну 1-го рода. Существует три вида таких распределений в зависимости от значений главных кривизн 1-го рода. Исследована геометрия каждого из них.

Ключевые слова: *неголономная геометрия, распределение, уравнение Пфаффа, векторное поле.*

Пусть $\Delta_3 : M \to \pi_3$ – гладкое распределение на E_4 (или в области $G \subset E_4$) [1, с. 683]. По нему однозначно определяется уравнение Пфаффа. Распределение Δ_3 называется голономным, если определяемое им уравнение Пфаффа вполне интегрируемо и – неголономным в противном случае. Мы будем рассматривать неголономные распределения. При этом интегральные кривые и двумерные интегральные поверхности уравнения Пфаффа называются кривыми и двумерными поверхностями распределения Δ_3. Все кривые и двумерные поверхности распределения Δ_3, проходящие через *M*, касаются в этой точке плоскости π_3. Пара (M, π_3) называется плоским элементом. Множество всех плоских элементов (M, π_3) («график» распределения Δ_3) представляет собой четырёхмерное многообразие, что позволяет использовать в исследованиях метод внешних форм Картана [2].

1. Предварительные сведения

Прямая, проходящая через M ортогонально π_3, *называется нормалью распределения* Δ_3.

К каждому элементу (M, π_3) присоединим ортонормированный репер $(M, \vec{e}_\alpha)$ $(\alpha = \overline{1,4})$, где $\overline{e}_4$ – единичный вектор нормали распределения в точке *M*. Деривационные формулы репера запишем в виде

$$\begin{aligned} dr &= \omega^\alpha \overline{e}_\alpha, \\ d\vec{e}_\alpha &= \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки *M*, $\omega_\alpha^\beta = -\omega_\beta^\alpha$. Формы Пфаффа $\omega^\alpha, \omega_\alpha^\beta$ подчиняются уравнениям структуры евклидова пространства

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha, \\ d\omega_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta, \\ (\alpha, \beta, \gamma &= \overline{0,4}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Так как множество плоских элементов (M, π_3) образует четырёхмерное многообразие, то можно считать формы $\{\omega^\alpha\}$ базисными. И тогда главные формы $\{\omega_4^\alpha\}$ [2, с. 288] будут их линейными комбинациями, то есть

$$\omega_4^\alpha = A_\beta^\alpha \omega^\beta. \tag{1.3}$$

Матрица (A_β^α) совпадает с матрицей линейного оператора, определяемого формулой $A(dr) = d\vec{e}_4$, где $d\vec{r}$ – касательный вектор любой регулярной кривой, проходящей через *M*. Все инварианты оператора *A* являются инвариантами распределения Δ_3 и ортогонального ему векторного поля.

Уравнение Пфаффа, соответствующее распределению Δ_3, имеет вид

$$\omega^4 = 0. \tag{1.4}$$

Из того, что

$$d\omega^4 \wedge \omega^4 = (A_1^2 - A_2^1)\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^4 + (A_2^3 - A_3^2)\omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^4 + (A_3^1 - A_1^3)\omega^3 \wedge \omega^1 \wedge \omega^4,$$

следует, что распределение Δ_3 голономно лишь тогда, когда

$$A_1^2 = A_2^1, A_2^3 = A_3^2, A_3^1 = A_1^3.$$

Легко проверить, что вектор $\vec{\rho} = \rho^i \vec{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, где

$$\rho^1 = \tfrac{1}{2}(A_3^2 - A_2^3), \rho^2 = \tfrac{1}{2}(A_1^3 - A_3^1), \rho^3 = \tfrac{1}{2}(A_2^1 - A_1^2), \tag{1.5}$$

является инвариантным вектором. Назовём его вектором неголономности.

Таким образом, распределение Δ_3 голономно тогда и только тогда, когда обращается в нуль вектор неголономности

$$\vec{\rho} = \rho^i \vec{e}_i. \tag{1.6}$$

В дальнейшем рассматриваются только неголономные распределения, для них $\vec{\rho} \neq 0$.

Оператор *A* допускает сужение A^* на плоскость π_3. Матрица оператора A^* в базисе $\{\vec{e}_i\}$ имеет вид

$$A_{(e)}^* = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Для неголономного распределения матрица (1.7) не симметрична. Собственные векторы оператора A^* – это главные направления 2-го рода в точке *M*, а собственные значения, взятые с противоположными знаками, – главные кривизны 2-го рода $(k_i^{(2)})$. Полная кривизна 2-го рода $K_2 = -k_1^{(2)} k_2^{(2)} k_3^{(2)} = \det(A_j^i)$.

Определение 1. *Линия распределения Δ_3, в каждой точке которой направление касательной совпадает с главным направлением 2-го рода, называется линией кривизны 2-го рода.*

Вдоль линии кривизны 2-го рода нормали распределения образуют торс. Координата точки ребра возврата этого торса равна величине, обратной главной кривизне 2-го рода.

Оператор A^* разлагается на сумму двух операторов: симметричного оператора B^* и кососимметричного оператора B. Собственные векторы оператора B^* – это главные направления 1-го рода в точке M, а собственные значения, взятые с противоположными знаками, – главные кривизны 1-го рода ($k_i^{(1)}$). Полная кривизна 1-го рода $K_1 = -k_1^{(1)}k_2^{(1)}k_3^{(1)}$. Между полными кривизнами 1-го и 2-го рода имеет место следующая зависимость

$$K_2 = K_1 - (\rho^1)^2 k_1^{(1)} - (\rho^2)^2 k_2^{(1)} - (\rho^3)^2 k_3^{(1)}. \qquad [3, \text{с. } 64]\ (1.8)$$

Таким образом, из (1.8) следует: *если распределение* Δ_3 *голономно, то для него полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают. Однако из того, что полные кривизны 1-го и 2-го рода совпадают, ещё не следует голономность распределения* Δ_3 .

Определение 2. *Линия распределения* Δ_3 *называется линией кривизны 1-го рода, если в каждой её точке направление касательной совпадает с главным направлением 1-го рода.*

Определение 3. *Нормальной кривизной кривой распределения* Δ_3 *в точке M называется проекция вектора кривизны этой кривой на нормаль распределения в данной точке.*

Для нормальной кривизны k_n справедлива формула (аналог формулы Эйлера для поверхности)

$$\begin{gathered} k_n = k_1^{(1)}\cos\alpha + k_2^{(1)}\cos\beta + k_3^{(1)}\cos\gamma, \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \end{gathered} \qquad (1.9)$$

Углы $\alpha, \beta, \gamma -$ это углы между касательной данной кривой и главными направлениями 1-го рода [3,с.64].

2. Репер, отнесённый к линиям кривизны 1-го рода. Основные формулы

Так как оператор B^* симметричен, то он имеет, по крайней мере, три взаимно ортогональных собственных вектора, которые определяют главные направления 1-го рода. Направим по ним векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тогда получим

$$A_1^1 = -k_1^{(1)}, A_2^2 = -k_2^{(1)}, A_3^3 = -k_3^{(1)}, A_2^1 + A_1^2 = 0, A_3^1 + A_1^3 = 0, A_3^2 + A_2^3 = 0.$$

Отсюда в силу (1.5) имеем $A_3^2 = \rho^1, A_1^3 = \rho^2, A_2^1 = \rho^3$. Находим вектор кривизны $k\vec{n}$ линии тока нормалей распределения Δ_3: $k\vec{n} = A_4^1\vec{e}_1 + A_4^2\vec{e}_2 + A_4^3\vec{e}_3$. Обозначим $A_4^1 = a, A_4^2 = b, A_4^3 = c.$ После этого формулы (1.3) примут вид

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= -k_1^{(1)}\omega^1 + \rho^3\omega^2 - \rho^2\omega^3 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -\rho^3\omega^1 - k_2^{(1)}\omega^2 + \rho^1\omega^3 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= \rho^2\omega^1 - \rho^1\omega^2 - k_3^{(1)}\omega^3 + c\omega^4. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Заметим, что если в точке M существует только три главных направления 1-го рода, то репер $\{M; \vec{e}_\alpha\}$ является каноническим. Коэффициенты в (2.1) будут основными инвариантами распределения.

Определение 4. *Линия распределения* Δ_3, *для которой в каждой точке нормальная кривизна* k_n *равна нулю, называется асимптотической линией.*

Из определения 4 следует: линия распределения Δ_3 представляет собой асимптотическую линию лишь тогда, когда её соприкасающаяся плоскость 2-го порядка в каждой точке принадлежит плоскости π_3 либо эта линия – прямая.

В выбранном нами репере асимптотические линии определяются уравнениями

$$\begin{gathered} k_1^{(1)}(\omega^1)^2 + k_2^{(1)}(\omega^2)^2 + k_3^{(1)}(\omega^3)^2 = 0, \\ \omega^4 = 0. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Касательные к асимптотическим линиям, проходящим через точку M, образуют конус 2-го порядка

$$\begin{gathered} k_1^{(1)}(x^1)^2 + k_2^{(1)}(x^2)^2 + k_3^{(1)}(x^3)^2 = 0, \\ x^4 = 0. \end{gathered} \tag{2.3}$$

3. Неголономные торсы 1-го рода.

Определение 5. *Неголономным торсом 1-го рода* (*НТ-1*) *в* $\boldsymbol{E}_4$ *называется трёхмерное распределение* Δ_3, *имеющее нулевую полную кривизну 1-го рода* $(K_1 = 0)$.

Теорема 1. *Для всякого неголономного торса 1-го рода в* $\boldsymbol{E}_4$ *конус касательных к асимптотическим линиям, проходящим через точку М, распадается на пару двумерных плоскостей: либо различных (действительных или мнимых), пересекающихся по прямой, совпадающей с касательной к линии кривизны 1-го рода, либо совпадающих. Либо асимптотические касательные в точке М заполняют плоскость* π_3 .

Доказательство. Справедливость утверждений теоремы с очевидностью следует из формул (2.3), так как для НТ-1 хотя бы одна из главных кривизн 1-го рода $(k_i^{(1)})$ равна нулю. ■

Все НТ-1 можно разбить на три вида:

1) $k_3^{(1)} = 0, k_2^{(1)} \neq 0, k_1^{(1)} \neq 0,$

2) $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, k_1^{(1)} \neq 0,$

3) $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = k_1^{(1)} = 0.$

Переходим к рассмотрению каждого из этих видов.

4. Неголономные торсы 1-го рода, для которых только одна из главных кривизн 1-го рода равна нулю

Асимптотические линии для данного вида НТ-1 определяются уравнениями

$$\begin{gathered} k_1^{(1)}(\omega^1)^2 + k_2^{(1)}(\omega^2)^2 = 0, \\ \omega^4 = 0. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Возможны, следовательно, три случая:

а) $k_3^{(1)} = 0,\ k_2^{(1)} \neq 0,\ k_1^{(1)} \neq 0,\ k_2^{(!)} \neq k_1^{(1)},\ \operatorname{sign} k_2^{(1)} \neq \operatorname{sign} k_1^{(1)};$

в) $k_3^{(1)} = 0,\ k_2^{(1)} \neq 0,\ k_1^{(1)} \neq 0,\ k_2^{(1)} \neq k_1^{(1)},\ \operatorname{sign} k_2^{(1)} = \operatorname{sign} k_1^{(1)};$

с) $k_3^{(1)} = 0,\ k_2^{(1)} = k_1^{(1)} \neq 0.$

Рассмотрим каждый из них.

В случае *а*) множество (4.1) всех асимптотических линий НТ-1 распадается на два множества

$$\omega^2 = \pm\sqrt{-\frac{k_1^{(1)}}{k_2^{(1)}}}\omega^1, \quad \omega^4 = 0, \tag{4.2}$$

имеющих общие асимптотические линии

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0, \tag{4.3}$$

которые, с другой стороны, являются линиями кривизны 1-го рода.

Соответственно в каждой точке M конус касательных к асимптотическим линиям, проходящим через M, распадается на две двумерные плоскости P_1 и P_2, пересекающиеся по прямой L, представляющей собой одновременно касательную к асимптотической линии и к линии кривизны 1-го рода. Плоскости P_1, P_2 пересекают двумерную плоскость π_2, проходящую через M ортогонально L по двум прямым L_1 и L_2. Для них имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *В плоскости π_2 касательные к линиям кривизны 1-го рода делят пополам углы между касательными к асимптотическим линиям.*

Доказательство. Из (4.1) следует, что конус касательных к асимптотическим линиям в точке M определяется уравнениями

$$k_1^{(1)}(x^1)^2 + k_2^{(1)}(x^2)^2 = 0, \quad x^4 = 0, \tag{4.4}$$

то есть распадается на пару плоскостей P_1 и P_2 :

$$x^2 = \pm\sqrt{-\frac{k_1^{(1)}}{k_2^{(1)}}}x^1, \quad x^4 = 0. \tag{4.5}$$

Плоскости (4.5) пересекают плоскость π_2 по двум прямым L_1, L_2:

$$x^2 = \pm\sqrt{-\frac{k_1^{(1)}}{k_2^{(1)}}}x^1, \quad x^3 = x^4 = 0.$$

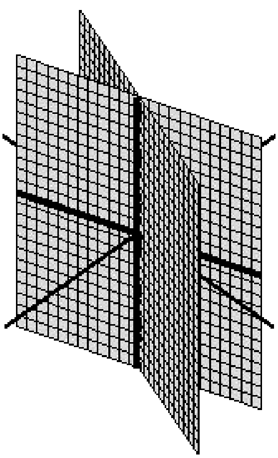

Рис. 1

Эти прямые, очевидно, имеют равные углы с касательными $x^2 = x^3 = x^4 = 0$ и $x^1 = x^2 = x^4 = 0$ к линиям кривизны 1-го рода (рис. 1). ■

Теорема 3. *Нормали НТ-1 меняют своё направление при движении точки по асимптотической линии, совпадающей с линией кривизны 1-го рода.*

Доказательство. Направление нормали НТ-1 в точке асимптотической линии, совпадающей с линией кривизны 1-го рода, – это направление вектора $\vec{e}_4$. При перемещении точки вдоль данной асимптотической $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$, используя формулы (2.1), получаем

$d\vec{e}_4 = (-\rho^2\vec{e}_1 + \rho^1\vec{e}_2)\omega^3$. Так как в неголономном случае вектор неголономности не обращается в нуль, то вектор $\vec{e}_4$ меняет направление вдоль асимптотической линии, совпадающей с линией кривизны 1-го рода. ■

В случае b) *через каждую точку M проходит три взаимно ортогональных линии кривизны 1-го рода, из которых одна совпадает с единственной асимптотической линией. Нормали НТ-1 вдоль этой линии меняют своё направление.* Данное предложение доказывается так же, как и теорема 3.

В случае c), как и в случае b), *через каждую точку M проходит одна асимптотическая линия, совпадающая с одной из линий кривизны 1-го рода, нормали НТ-1 вдоль этой линии меняют своё направление.* Однако случай c) отличается от случая b) прежде всего тем, что через точку M проходят не три линии кривизны 1-го рода, а бесконечно много. А именно, в точке M двумерная плоскость $x^3 = x^4 = 0$, ортогональная касательной к асимптотической линии, состоит из касательных к линиям кривизны 1-го рода, проходящим через M (рис. 2).

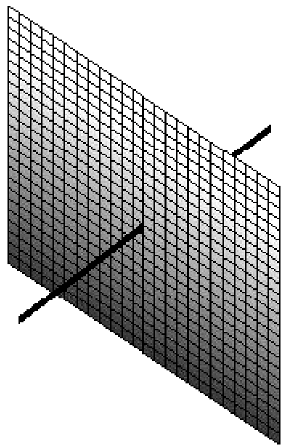

Рис. 2

Теорема 4. *Если трёхмерное распределение Δ_3 на $\boldsymbol{E}_4$, имеющее единственную нулевую главную кривизну 1-го рода, голономно, то $\boldsymbol{E}_4$ расслаивается на однопараметрическое семейство трёхмерных торсов с прямолинейными образующими.*

Доказательство. Пусть для Δ_3 имеем $k_3^{(1)} = 0$, $k_2^{(1)} \neq 0$, $k_1^{(1)} \neq 0$. Тогда во всех трёх возможных случаях имеются асимптотические линии, определяемые уравнениями $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$. Если при этом Δ_3 голономно, то $\rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = 0$ и формулы (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= -k_1^{(1)}\omega^1 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= -k_2^{(1)}\omega^2 + b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= c\omega^4. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Продолжая систему (4.6), получим

$$\begin{aligned} &dk_1^{(1)} = \alpha_{11}\omega^1 + \alpha_{12}\omega^2 + \alpha_{13}\omega^3 + (\alpha_{14} + a^2 + (k_1^{(1)})^2)\omega^4, \\ &dk_2^{(1)} = \alpha_{22}\omega^1 + \beta_{22}\omega^2 + \beta_{23}\omega^3 + (\beta_{24} + b^2 + (k_2^{(1)})^2)\omega^4, \\ &(k_2^{(1)} - k_1^{(1)})\omega_2^1 = \alpha_{12}\omega^1 + \alpha_{22}\omega^2 + \alpha_{23}\omega^3 + (\alpha_{24} + ab)\omega^4, \\ &k_1^{(1)}\omega_3^1 = -\alpha_{13}\omega^1 - \alpha_{23}\omega^2 - (\alpha_{34} + ac)\omega^4, \\ &k_2^{(1)}\omega_3^2 = -\alpha_{23}\omega^1 - \beta_{23}\omega^2 + (-\beta_{34} + bc)\omega^4, \\ &da = -b\omega_2^1 - c\omega_3^1 - \alpha_{14}\omega^1 - \alpha_{24}\omega^2 - \alpha_{34}\omega^3 - \alpha_{44}\omega^4, \\ &db = a\omega_2^1 - c\omega_3^2 - \alpha_{24}\omega^1 - \beta_{42}\omega^2 - \beta_{43}\omega^3 - \beta_{44}\omega^4, \\ &dc = -a\omega_1^3 - b\omega_2^3 - (\alpha_{34} + ac - ab)\omega^1 - \beta_{34}\omega^2 + c\omega^3 - \gamma_{44}\omega^4, \\ &\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \beta_{ij} = \beta_{ji}, \gamma_{ij} = \gamma_{ji}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Покажем, что асимптотические линии $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$ – прямые линии. Действительно, для их касательных векторов $\vec{e}_3$ имеем $d\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 + \omega_3^4\vec{e}_4$. Используя формулы (4.6) и (4.7), получаем $d\vec{e}_3 = 0$. То есть касательный вектор $\vec{e}_3$ асимптотической линии остаётся постоянным, что может быть лишь тогда, когда всякая асимптотическая линия семейства $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$ – прямая линия. Следовательно, трёхмерные торсы, на которые расслаивается $\boldsymbol{E}_4$, имеют прямолинейные образующие. Более того, вдоль асимптотической линии каждого торса его касательная трёхмерная плоскость не меняется, так как её нормальный вектор $\vec{e}_4$ остаётся постоянным. Это следует из того, что $d\vec{e}_4 = \omega_4^1\vec{e}_1 + \omega_4^2\vec{e}_2 + \omega_4^3\vec{e}_3 = 0$ при $\omega^1 = \omega^2 = \omega^4 = 0$ (см. (4.6)). ■

5. Неголономные торсы 1-го рода, для которых $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, k_1^{(1)} \neq 0$

Асимптотические линии для таких НТ-1 имеют уравнения

$$\begin{aligned} \omega^1 &= 0, \\ \omega^4 &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

А касательные к ним заполняют 2-мерную плоскость P_2:

$$\begin{aligned} x^1 &= 0, \\ x^4 &= 0, \end{aligned} \tag{5.2}$$

совпадающую с плоскостью касательных к линиям кривизны 1-го рода. Нормали НТ-1 при перемещении вдоль плоскости P_2 меняют своё направление. Действительно, для вектора $\vec{e}_4$, ортогонального НТ-1, имеем

$$d\vec{e}_4 = (\rho^3\omega^2 - \rho^2\omega^3)\vec{e}_1 + \rho^1\omega^3\vec{e}_2 - \rho^1\omega^2\vec{e}_3 \neq 0.$$

То есть в неголономном случае нормали НТ-1 вдоль асимптотических линий (5.1) меняют своё направление. Это означает также, что асимптотические линии в этом случае не могут лежать в плоскости P_2.

Теорема 5. *Если трёхмерное распределение* Δ_3 *на* $\boldsymbol{E}_4$, *для которого* $k_3^{(1)} = k_2^{(1)} = 0, k_1^{(1)} \neq 0$, *голономно, то его асимптотические линии, проходящие через M, лежат в двумерной плоскости* P_2, *а нормали распределения* Δ_3 *вдоль них не меняют своего направления.*

Доказательство. Покажем, что в голономном случае плоскость P_2, определяемая уравнениями (5.2), остаётся неизменной в точках асимптотических линий (5.1). При $k_2^{(1)} = 0$ системы (4.6) и (4.7) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_4^1 &= -k_1^{(1)}\omega^1 + a\omega^4, \\ \omega_4^2 &= b\omega^4, \\ \omega_4^3 &= c\omega^4 \end{aligned} \tag{5.3}$$

и

$$
\begin{aligned}
&dk_1^{(1)} = \alpha_{11}\omega^1 + \alpha_{12}\omega^2 + \alpha_{13}\omega^3 + (\alpha_{14} + a^2 + (k_1^{(1)})^2)\omega^4,\\
&k_1^{(1)}\omega_2^{!} = -\alpha_{12}\omega^1 - (\alpha_{24} + ab)\omega^4,\\
&k_1^{(1)}\omega_3^1 = -\alpha_{13}\omega^1 - (\alpha_{34} + ac)\omega^4,\\
&da + b\omega_2^1 + c\omega_3^1 = -\alpha_{14}\omega^1 - \alpha_{24}\omega^2 - \alpha_{34}\omega^3 - \alpha_{44}\omega^4,\\
&db - a\omega_2^1 + c\omega_3^2 = -\alpha_{24}\omega^1 - b^2\omega^2 - bc\omega^3 - \beta_{44}\omega^4,\\
&dc + a\omega_1^3 + b\omega_2^3 = (-\alpha_{34} - ac + ab)\omega^1 - bc\omega^2 + c^2\omega^3 - \gamma_{44}\omega^4.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Находим характеристику плоскости P_2 при смещении её по асимптотическим линиям $\omega^1 = \omega^4 = 0$:

$$
\begin{aligned}
&x^1 = 0, x^4 = 0,\\
&\omega_2^1 x^2 + \omega_3^1 x^3 = 0,\\
&\omega_2^4 x^2 + \omega_3^4 x^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Учитывая (5.3) и (5.4), получаем, что плоскость P_2 остаётся постоянной. Это значит, что все асимптотические линии лежат в данной плоскости. *Таким образом, пространство* $\boldsymbol{E}_4$ *расслаивается на однопараметрическое семейство трёхмерных торсов с двумерными плоскостными образующими.*

Покажем теперь, что нормали $\vec{e}_4$ распределения Δ_3 не меняют направления при движении точки по плоскости P_2, состоящей из асимптотических линий $\omega^1 = \omega^4 = 0$. Действительно, в силу (5.3) при $\omega^1 = \omega^4 = 0$ имеем

$$d\vec{e}_4 = \omega_4^1\vec{e}_1 + \omega_4^2\vec{e}_2 + \omega_4^3\vec{e}_3 = 0.$$

Следовательно, $\vec{e}_4$ – постоянный вектор в точках плоскости P_2. ■

6. Неголономные торсы 1-го рода, для которых $k_1^{(1)} = k_2^{(1)} = k_3^{(1)} = 0$

Такие неголономные торсы называют неголономными гиперплоскостями, так как в голономном случае получаем расслоение пространства $\boldsymbol{E}_4$ на семейство параллельных гиперплоскостей.

Неголономные гиперплоскости подробно исследованы в работе [4]. В ней получен следующий основной результат (в целом): *в четырёхмерном евклидовом пространстве существует единственная (с точностью до постоянной) неголономная гиперплоскость. Уравнение Пфаффа, определяющее кривые неголономной гиперплоскости в некоторой неподвижной системе координат, имеет вид*

$$
\begin{aligned}
dx_4 &= c(x_3 dx_2 - x_2 dx_3),\\
c &= \text{const} \neq 0.
\end{aligned}
$$

Там же подробно исследовано векторное поле нормалей неголономной гиперплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
2. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

3. *Онищук Н.М.* Геометрия векторного поля в четырёхмерном евклидовом пространстве // Международная конференция по математике и механике. Избранные доклады. Томск, 2003. С. 60–68.
4. *Онищук Н.М.* Неголономная гиперплоскость в четырёхмерном евклидовом пространстве // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3(4).

Статья поступила 09.04.2011 г.

Onishchuk N.M., *Tsokolova O.V.* NONHOLONOMIC TORSES OF THE FIRST KIND IN THE FOUR-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE. Nonholonomic three-dimensional distributions with zero total curvature of the first kind are considered in E^4. There exist three types of such distributions depending on the values of the principal curvatures of the first kind. Geometry of each of them is studied.

Keywords: nonholonomic geometry, distribution, Pfaffian equation, vector field.

ONISHUK Nadezhda Maksimovna (Tomsk State University)
E-mail: onichuk.nadezhda@yandex.ru
TSOKOLOVA Olga Vyacheslavovna (Tomsk State University)
E-mail: tov234@yandex.ru