УДК 512.623.5, 512.52

Г.Г. Пестов

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО УПОРЯДОЧЕННЫМ ГРУППАМ И ПОЛЯМ В ТОМСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Работа участников семинара по упорядоченным группам и полям на мехмате Томского университета начиная с восьмидесятых годов прошлого века и до наших дней развивалась по следующим направлениям: теория сечений в линейно упорядоченном поле, n-мерно упорядоченные группы, в частности двумерно упорядоченные группы, циклически упорядоченные группы, двумерно упорядоченные и бесконечно узкие поля.

Ключевые слова: *линейно-упорядоченные группы*, *двумерно-упорядоченные поля*, *циклически-упорядоченные группы*, *верхний конус*, *правый конус.*

1. Линейно упорядоченные поля, теория сечений

Существует тесная связь между свойствами линейно упорядоченного поля и строением сечений в этом поле. Для описания этой связи необходима развитая классификация сечений. Классификация сечений в упорядоченном поле является частью так называемой теории сечений [1]. Классификация сечений осуществляется: 1) по ширине пробела между берегами (сечения нулевой ширины [2] или сечения Гёльдера [3]); 2) по поведению многочленов на сечении (алгебраические и трансцендентные сечения [1, 2, 4]); 3) по наличию или отсутствию симметрии [5], наконец; 4) по конфинальности берегов [7, 19]. Под теорией сечений мы подразумеваем кроме классификации сечений теоремы о поведении многочленов на сечениях различных типов, характеризацию различных видов замыканий упорядоченного поля в терминах сечений, теоремы о построении различных видов замыканий с помощью так называемого заполнения сечений упорядоченного поля, теоремы об изоморфизме упорядоченных полей с заданными ограничениями на сечения. Теории линейно упорядоченных полей (без теории сечений) посвящена монография [6].

1.1. Классификация сечений в упорядоченном поле

Элементы a, b упорядоченного поля K называются архимедовски эквивалентными, если существует такое натуральное число n, что $n|a|>|b|$ и $n|b|>|a|$. Если a и b архимедовски эквивалентны, то пишем $a\sim b$ [8].

Лемма 1.1.1. Пусть K есть упорядоченно поле, $\overline{K}$ – его вещественное замыкание, $\xi\in \overline{K}$, степень ξ над K равна m. Тогда найдётся такое натуральное $n\leq m$ и такой элемент $b\in K$, что $\xi^n \sim b$ [4].

Следствие 1.1.2. Если мультипликативная группа упорядоченного поля K делима, то каждый элемент из вещественного замыкания этого поля архимедовски эквивалентен некоторому элементу поля K [1, 4].

Будем говорить, что многочлен $f(x)$ меняет знак на сечении (A, B), если существуют такие a, b, что $a\in A$, $b\in B$ и на множестве $A\cap[a, b]$ многочлен строго положителен (строго отрицателен), а на множестве $B\cap[a, b]$ строго отрицателен (строго положителен). Если существуют такие $a\in A$, $b\in B$, что $f(x) > 0$ ($f(x)<0$) на $[a, b]$, то говорят, что $f(x) > 0$ ($f(x)<0$) на сечении (A, B). В том и другом случае будем говорить, что многочлен $f(x)$ ***сохраняет знак на сечении*** (A, B).

Сечение (A, B) в упорядоченном поле K назовём ***алгебраическим***, если существует многочлен из $K[x]$, меняющий знак на этом сечении [2, 4]. Наименьшая из степеней многочленов, меняющих знак на сечении , называется ***степенью*** этого сечения. Обозначение: $\deg (A,B)$. Если все многочлены из $K[x]$ сохраняют знак на сечении (A, B), то это сечение называется ***трансцендентным*** [1, 4].

Линейно упорядоченное поле вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда в нём нет алгебраических сечений. Берег A сечения (A, B) называется *длинным*, если для каждого $a\in A$ существует такое a_1, что $(a_1+(a_1 - a)) \in B$. Берег сечения, не являющийся длинным, называется *коротким.* Иначе: берег A сечения (A, B) называется *коротким*, если существует $a\in A$, такое, что для каждого $a_1\in A$ имеем $(a_1+(a_1-a)) \in A$. Такой элемент a короткого берега A называется близким к B [1, 4].

Лемма 1.1.3. В каждом сечении линейно упорядоченного поля хотя бы один из берегов является длинным.

Если оба берега сечения – длинные, то сечение называется ***симметричным*** [5]. Если один берег сечения – длинный, а другой – короткий, то сечение называется несимметричным. Каждое расширение упорядоченного поля можно получить как результат трансфинитной последовательности простых расширений. Пусть (A, B) есть сечение в упорядоченном поле K. Если $K(t)$ есть простое расширение поля K, в котором $A< t < B$, то будем говорить, что это расширение получено ***заполнением сечения*** (A, B) [9].

Следствие 1.1.4. Если сечение (A, B) несимметрично, то в поле $K(t)$, полученном заполнением этого сечения, существуют элементы, архимедовски не эквивалентные никаким элементам из K [1, 4].

Сечение (A, B) в упорядоченном поле называется ***фундаментальным*** **(** или сечением нулевой ширины [2],или сечением Гёльдера [3]), если для каждого $\varepsilon>0$ существуют такие $a\in A$, $b\in B$, что $b–a <\varepsilon$.

Теорема 1.1.5. Если $P \supset K(t)$, $t\in P\backslash K$, $A< t < B$, и каждый элемент поля $K(t)$ архимедовски эквивалентен некоторому элементу поля K, то сечение (A, B) симметрично [1, 5].

Лемма 1.1.6. Если в K при любых $a \in A$, $n\in N$, $n\leq n_0$ разрешимо уравнение $x^n = a$, то в этом поле все алгебраические сечения степени не выше n_0 симметричны [1, 4].

Теорема 1.1.7. Если мультипликативная группа упорядоченного поля K делима, то это поле вещественно замкнуто тогда и только тогда, когда каждое симметричное сечение в K трансцендентно [9].

Следующие теоремы характеризуют поведение многочленов на сечениях в упорядоченном поле.

Теорема 1.1.8. Пусть (A, B) есть сечение в упорядоченном поле K, $f(x) \in K[x]$. Если $\deg f(x) < \deg (A, B)$, то найдутся такие $a\in A$, $b\in B$, что для каждого упорядоченного расширения P поля K выполнено

(1) $f(x)>0$ всюду на $[a,b]_P$ или

$f(x)<0$ всюду на $[a,b]_P$;

(2) $f(x)$ строго монотонно на $[a,b]_P$ [1].

Теорема 1.1.9. Пусть (A, B) есть симметричное сечение в упорядоченном поле $K, f(x) \in K[x]$. Если сам многочлен $f(x)$ и все его производные не меняют знака на сечении (A, B), то найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что для каждого упорядоченного расширения P поля K выполнено

(1) $f(x)>0$ всюду на $[a,b]_P$ или

$f(x)<0$ всюду на $[a,b]_P$;

(2) $f(x)$ строго монотонно на $[a,b]_P$;

(3) все значения $f(x)$ при $x \in [a,b]_P$ архимедовски эквивалентны [1].

Теорема 1.1.10. Пусть (A, B) есть симметричное сечение в упорядоченном поле $K, f(x) \in K[x]$. Если $\deg f(x)<\deg (A, B)$ то найдутся такие $a \in A$, $b \in B$, что для каждого упорядоченного расширения P поля K выполнено

(1) $f(x)>0$ всюду на $[a, b]_P$ или

$f(x)<0$ всюду на $[a, b]_P$;

(2) $f(x)$ строго монотонно на $[a, b]_P$;

(3) все значения $f(x)$ при $x \in [a, b]_P$ архимедовски эквивалентны [1].

Пусть (A, B) есть сечение в K, $K(t)$ – простое упорядоченное расширение поля K. Порядок в $K(t)$ в общем случае не определён однозначно, даже если потребовать, чтобы t было трансцендентно над K.

Теорема 1.1.11. Если сечение (A, B) в упорядоченном поле K трансцендентно, то порядок из K единственным образом продолжается на поле $K(t)$, полученное заполнением этого сечения [9].

1.2. Замыкания упорядоченного поля

Исследованию замыканий линейно упорядоченных полей посвящена обширная литература. Известны вещественное, топологическое и архимедово замыкания упорядоченного поля [3,10,11,36,42]. Использование теории сечений позволяет охарактеризовать многие виды замыканий с единой точки зрения.

Теорема 1.2.1. Линейно упорядоченное поле вещественно замкнуто, если и только если в этом поле нет алгебраических сечений.

Иначе: Линейно упорядоченное поле K вещественно замкнуто, если и только если никакой многочлен из $K[x]$ не меняет знака ни на каком сечении в K [9].

Теорема 1.2.2. Линейно упорядоченное поле непрерывно (топологически) замкнуто, если и только если в этом поле нет собственных фундаментальных сечений [9].

Теорема 1.2.3. Линейно упорядоченное поле архимедовски замкнуто, если и только если в этом поле нет симметричных сечений [9]

Пусть (A, B) – сечение в линейно упорядоченном поле K. Будем говорить, что простое упорядоченное расширение $K(\xi)$ получено ***заполнением сечения*** (A, B), если $A<\xi<B$ в $K(\xi)$.

Пусть $K \subset P$, где K, P упорядоченные поля. Если $(K_\beta)_{\beta<\alpha}$, где α, β ординалы, есть последовательность упорядоченных полей, такая, что: 1) $K_0 = K$; 2) для каждого ординала $\beta<\alpha$ поле $K_{\beta+1}$ получено из поля K_β заполнением некоторого симметричного (алгебраического, фундаментального) сечения в K_β; 3) для каждого предельного ординала $\beta<\alpha$ выполнено $K_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} K_\gamma$; 4) $P = \bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$, то будем говорить, что поле P получено из K заполнением симметричных (алгебраических, фундаментальных) сечений [9].

Теорема 1.2.4 [9]. Пусть K – линейно упорядоченное поле. Тогда:

a) Архимедово замыкание $\hat{K}$ поля K может быть получено из K трансфинитной последовательностью заполнений симметричных сечений.

b) Топологическое замыкание $\tilde{K}$ может быть получено из K трансфинитной последовательностью заполнений фундаментальных сечений.

c) Вещественное замыкание $\overline{K}$ может быть получено из K трансфинитной последовательностью заполнений алгебраических сечений.

Архимедовски замкнутое поле может не быть вещественно замкнутым. Однако следующая теорема указывает на некоторое сходство свойств архимедовски и вещественно замкнутых полей.

Теорема 1.2.5. Пусть P – архимедовски замкнутое поле, K – подполе P, $\overline{P}$ – вещественное замыкание поля P. Если (A, B) – симметричное алгебраическое сечение в K, $f(x)\in K[x]$, где $\deg f(x)=\deg(A, B)$, $f(x)$ меняет знак на (A, B), $\xi\in \overline{P}$, $f(\xi) = 0$, $A<\xi<B$ в $\overline{P}$, то $\xi\in P$ [9].

Определение. Пусть (A, B) – сечение в линейно упорядоченном поле K. Будем говорить, что простое упорядоченное расширение $K(\xi)$ получено ***регулярным заполнением сечения*** (A, B), если $A< \xi<B$ в $K(\xi)$ и выполнено одно из двух условий:

a) сечение (A, B) – алгебраическое, ξ есть корень многочлена $f(x) \in K[x]$, такого, что $\deg f(x)=\deg(A, B)$ и $f(x)$ меняет знак на сечении (A, B);

b) сечение (A, B) – трансцендентное [9].

Определение. Будем говорить, что упорядоченное поле P получено из упорядоченного поля K регулярным заполнением симметричных сечений, если существует такая трансфинитная последовательность упорядоченных полей $(K_\beta)_{\beta<\alpha}$, что: 1) для каждого ординала $\beta<\alpha$ поле $K_{\beta+1}$ получено из поля K_β регулярным заполнением некоторого симметричного сечения в K_β; 2) для каждого предельного ординала $\beta<\alpha$ выполнено $K_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} K_\gamma$; 3) $K_0 =K$, $P =\bigcup_{\beta<\alpha} K_\beta$ [9].

Теорема. 1.2.6 [9]. Пусть K – линейно упорядоченное поле. Тогда:

a) Архимедово замыкание поля K может быть получено из K с помощью трансфинитной последовательности регулярных заполнений симметричных сечений.

b) Топологическое замыкание поля K может быть получено из K с помощью трансфинитной последовательности регулярных заполнений фундаментальных сечений.

c) Вещественное замыкание поля K может быть получено из K с помощью трансфинитной последовательности регулярных заполнений алгебраичесих сечений [9].

С помощью методов теории моделей и теории сечений удалось получить характеристики нестандартной вещественной прямой [18].

Теорема. 1.2.7. Упорядоченное поле K является архимедовски полным тогда и только тогда, когда каждое сечение в K несимметрично [12].

Теорема 1.2.8 Поле формальных степенных рядов $\boldsymbol{R}[[G]]$ архимедовски полно [12, 13].

Конфинальностью симметричного сечения (A, B) называется $cof\,A$.

Теорема 1.2.9. Пусть вещественно замкнутые упорядоченные поля K и P таковы, что card K = card $P= \alpha >\aleph_0$ и конфинальность каждого симметричного сечения в обоих полях равна α. Тогда для того, чтобы K и P были упорядоченно изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы группы архимедовских классов этих полей были изоморфны [1,13].

1.3. Поля формальных степенных рядов

Формальные степенные ряды служат удобным орудием представления упорядоченных полей. В частности, они позволяют получить информацию о строении сечений в нестандартной вещественной прямой.

Пусть G есть линейно упорядоченная абелева группа. Тогда множество $\boldsymbol{R}[[G]]$ формальных степенных рядов вида $\Sigma_{g\in\Gamma}r_g g$, где Γ есть вполне упорядоченное подмножество G, есть упорядоченное поле с группой архимедовских классов, изоморфной G [7]. Обозначим $\boldsymbol{R}$ =[[G,β]] = $\{\Sigma_{g\in\Gamma}r_g g|$ card $\Gamma<\beta\}$. Имеем: $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] есть подполе поля $\boldsymbol{R}[[G]]$.

Теорема 1.3.1. Пусть G – мультипликативная линейно упорядоченная абелева группа. Тогда все сечения в поле формальных степенных рядов $\boldsymbol{R}[[G]]$ несимметричны [13].

Следствие 1.3.2. Пусть G – мультипликативная линейно упорядоченная абелева группа. Тогда поле формальных степенных рядов $\boldsymbol{R}[[G]]$ архимедовски замкнуто [13].

Лемма 1.3.3. Если (A, B) – симметричное сечение в $\boldsymbol{R}$ [[G,β]], то $\beta\leq$ cf $(A, B)\leq$ card (G) [15].

Теорема 1.3.4. Пусть β – кардинал, G – коммутативная группа, $\aleph_0<\beta\leq$ card G. тогда конфинальность каждого симметричного сечения в поле K= $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] равна cf(β). В частности, если β – регулярный кардинал, то конфинальность каждого симметричного сечения в K равна β [15].

Теорема 1.3.5. Если (A, B) собственное фундаментальное сечение в поле F , то cf (A, B)= cf (F) [12].

Следствие 1.3.6. Если cf(β)≠cf($\boldsymbol{R}$ [[G,β]]), то в поле $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] нет собственных фундаментальных сечений, т.е. это поле полно по Дедекинду [12].

Теорема 1.3.7. Пусть $^*\boldsymbol{R}$ есть ультрастепень $\boldsymbol{R}$ по α^+-хорошему ультрафильтру в α. Тогда поле нестандартных вещественных чисел $^*\boldsymbol{R}$ упорядоченно изоморфно полю ограниченных формальных степенных рядов $\boldsymbol{R}$ [[G, α^+]] [15].

Подробнее о формальных степенных рядах см [19].

Теорема 1.3.8. (a) Пусть G есть упорядоченная абелева группа $\boldsymbol{R}[[G]]$ – поле формальных степенных рядов. Тогда $2^{\mathrm{cf}\,(G)}\leq$ card $\boldsymbol{R}[[G]]\leq 2^{\mathrm{card}\,G}$. (b) Пусть β – кардинал, $\aleph_0<\beta\leq$ card G. Тогда card $\boldsymbol{R}$ [[G,β]]= card G [15].

Теорема 1.3.9. Каждое симметричное сечение в $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] производится некоторым элементом из $\boldsymbol{R}[[G]]\backslash$ $\boldsymbol{R}$ [[G,β]]. Наоборот, каждый элемент из $\boldsymbol{R}[[G]]\backslash$ $\boldsymbol{R}$[[G,β]] производит некоторое симметричное сечение в $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] [14].

Теорема 1.3.10. Симметричное сечение (A, B) в $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] фундаментально, если и только если существует $x_0\in\boldsymbol{R}[[G]]\backslash$ $\boldsymbol{R}$ [[G,β]], такое, что $A< x_0< B$, supp (x_0) инверсно подобен β и коинициален G [14].

Упорядоченное поле называется полным по Дедекинду, если каждое фундаментальное сечение в этом поле производится некоторым элементом поля.

Следствие 1.3.11. Если β < cof G, то $\boldsymbol{R}$ [[G,β]] полно по Дедекинду [14]].

Теорема 1.3.12. Если (A, B) – симметричное сечение в $\boldsymbol{R}$ [[G,β]], то β < cof(A) = = coi $B\leq$ card G [14].

Далее через $^*\boldsymbol{R}$ обозначена ультрастепень $\boldsymbol{R}$ по α^+-хорошему ультрафильтру над α, через G – группа архимедовых классов поля $^*\boldsymbol{R}$.

Теорема 1.3.13. Если (A, B) есть симметричное сечение в $^*\boldsymbol{R}$, то $\mathrm{cof}\,(A) = \mathrm{coi}\,B$ [13].

Теорема 1.3.14. (ОКГ) Пусть $^*\boldsymbol{R}$ есть ультрастепень $\boldsymbol{R}$ по α^+-хорошему ультрафильтру в α. Тогда поле нестандартных вещественных чисел $^*\boldsymbol{R}$ упорядоченно изоморфно полю ограниченных формальных степенных рядов $\boldsymbol{R}\,[[G, \alpha^+]]$ [14, 18].

Следствие 1.3.15. Поле $\boldsymbol{R}\,[[G, \alpha^+]]$ является $^*\boldsymbol{R}$-насыщенным [14].

Следствие 1.3.16. В условиях теоремы 1.3.14 из того, что $\beta \le \alpha$, следует, что поле $\boldsymbol{R}\,[[G,\beta]]$ полно по Дедекинду [14].

Теорема 1.3.17. В условиях теоремы **1.3.14** в поле $\boldsymbol{R}\,[[G, \alpha^+]]$ (и в$^*\boldsymbol{R}$) существует 2^γ симметричных фундаментальных сечений, где $\gamma = \alpha^+$, и 2^γ симметричных нефундаментальных сечений [14].

1.4. О подклассе $\boldsymbol{K}$ класса вещественно замкнутых полей

Определим подкласс $\boldsymbol{K}$ класса вещественно замкнутых полей. Вещественно замкнутое поле F принадлежит подклассу $\boldsymbol{K}$, если и только если: 1) мощность F равна мощности архимедова замыкания F и равна $\aleph_1$; 2) конфинальность каждого симметричного сечения в F равна $\aleph_1$ (мы принимаем ОКГ).

Теорема 1.4.1 Если выполнено ОКГ, то класс $\boldsymbol{K}$ совпадает с классом ограниченных формальных степенных полей $\boldsymbol{R}\,[[G, \aleph_1]]$, где G – линейно упорядоченная абелева группа, и $\mathrm{card}\,(G) = \aleph_1$ [16].

Обозначим через K^i подкласс класса $\boldsymbol{K}$, состоящий из таких F, что $\mathrm{c}f(F) = \aleph_i$.

Теорема. Если $F \in \boldsymbol{K}^1$, то в F существует симметричное сечение [16].

Теорема 1.4.2. Пусть F – вещественно замкнутое поле, и (A, B) есть (α,β) – сечение в архимедовом замыкании поля F, где α,β – бесконечные регулярные кардиналы. Тогда существует несимметричное сечение в F типа (α,β) [16].

Пусть L есть линейно упорядоченное множество, $\mathrm{c}f(L) \ge \aleph_0$, пусть P есть бесконечное линейно упорядоченное поле и $\max\{|L|,|P|\} = \aleph_1$. В [17] изложена конструкция группы $(G(L, P),\cdot,<)$, такой, что $\boldsymbol{R}\ [[G(L, P), \aleph_1]] \in \boldsymbol{\kappa}$. При этом группа $G(L, P)$ изоморфна подгруппе конечных сумм $(P\ [[L, \aleph_0]],+,<)$ группы формальных степенных рядов $P\,[[L, \aleph_1]]$.

Теорема 1.4.3. Группа $G(L, P) \cong P\,[[L, \aleph_0]]$ имеет сечение типа $(\aleph_0, \aleph_0)$ [16].

Следствие 1.4.4. Поле $\boldsymbol{R}\ [[G(L, P), \aleph_1]]$ имеет несимметричное сечение типа $(\aleph_0, \aleph_0)$ [16].

Следствие 1.4.5. $^*\boldsymbol{R}$ имеет симметричное сечение типа $(\aleph_1, \aleph_1)$ и несимметричное сечение типа $(\aleph_1, \aleph_1)$ [16].

Линейно упорядоченное поле F называется полу-η_1-полем, если для каждой строго возрастающей последовательности $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ и строго убывающей последовательности $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$, таких, что $s_n < t_n$ для всех $m, n \in N$, существует $x \in F$, такой, что $s_n < x < t_m$ для всех $n, m \in N$ [19].

Теорема 1.4.6. F есть полу-η_1-поле, если и только если каждое сечение (A, B) в F имеет только один из следующих типов: $(\aleph_1, \aleph_1)$, $(\aleph_0, \aleph_1)$, $(\aleph_1, \aleph_0)$, $(1, \aleph_1)$, $(\aleph_1,1)$, $(1, \aleph_0)$, $(\aleph_0, 1)$ [16].

Теорема 1.4.7. $\boldsymbol{R}\,[[G(L, P), \aleph_1]]$ не является полу-η_1-полем [16].

Теорема 1.4.8. Пусть F есть η_1-поле мощности $\aleph_1$ Тогда: 1) в F существует $2^{\aleph_1}$ симметричных дедекиндовых сечений и $2^{\aleph_1}$ симметричных недедекиндовых сечений; 2) если (A, B) – симметричное сечение в F, то $\mathrm{cf}(A, B) = \aleph_1$ [16].

Теорема. 1.4.9. Пусть F принадлежит K^0 и $\boldsymbol{R}[[\,\hat{F}\,]] \backslash \boldsymbol{R}[[\,\hat{F}, \aleph_1]] \neq \varnothing$.

Тогда: (a) в F нет симметричных дедекиндовых сечений; (b) F имеет $2^{\aleph_1}$ симметричных недедекиндовых сечений [16].

Теорема 1.4.10. Пусть $F \in K$. Тогда следующие условия равносильны: а) F есть η_1-*множество*; b) группа архимедовых классов поля F есть η_1-множество; c) F изоморфно полю $\boldsymbol{R}\,[[\,G_0\,,\,\aleph_1]]$, где G_0 – линейно упорядоченная делимая абелева группа [59].

2. *n*-мерно упорядоченные группы

2.1. Понятие линейно упорядоченно множества естественно возникает при исследовании расположения точек на прямой. Так же естественно понятие двумерно упорядоченного множества возникает при изучении расположения точек на плоскости.

Различные подходы к обобщению понятия линейного порядка по размерности предпринимались многими математиками, начиная с Г. Кантора.

Первоначальный подход к обобщению понятия порядка по размерности был предпринят в работах Э. Шпернера [21] и Э. Глока [22].

Эта идея получила последовательное развитие в независимых работах Л. Новака [23], Г.Г. Пестова [25] и его аспиранта А.И. Терре [24]. Изложим подход автора.

Определение 2.1.1. Пусть $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}$ – элементы $\boldsymbol{R}^n$, где $\xi_k = (x_{1k},x_{2k},\ldots,x_{nk})^{\mathrm{T}}$. Обозначим $\xi^*_k = (x_{1k},x_{2k},\ldots,x_{nk},\,1)^{\mathrm{T}}$. Теперь полагаем $\eta_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1}) = \det(\xi^*_1,\xi^*_2,\ldots,\xi^*_{n+1})$. Функцию $\eta_n\ (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n+1})$ назовём ***стандартной функцией порядка*** в $\boldsymbol{R}^n$.

На основании стандартной функции порядка в $\boldsymbol{R}^n$ построим определение n-мерной функции порядка.

Определение 2.1.2. Пусть задано отображение $\zeta: S^{n+1}\to\{-1,0,1\}$, где $|S|>(n+1)$. Если для каждого $A\subseteq S$, $|A|\le 2n+1$ существует инъекция φ: $A\to\boldsymbol{R}^n$ такая, что для каждого $x=(x_1,\ldots,x_{n+1})$, где $x_i\in A$, выполнено $\zeta(x) = \eta_n(\varphi(x))$, то ζ назовём ***функцией n-мерного порядка*** на множестве S.

Пару $<S, \zeta>$ назовём ***n-мерно упорядоченным множеством.*** Функцию φ в определении 2.1.2 в дальнейшем будем называть ***реализацией множества A* в $\boldsymbol{R}^n$**.

Понятия n-упорядоченных групп (колец, тел, полей) естественным образом строятся на базе понятия n-упорядоченных множеств.

Ключевым понятием здесь является понятие симплекса.

Определение 2.1.3. Пусть $<S, \zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если для кортежа $A\in S^{k+1}$ существует кортеж $B\in S^{n-k}$, такой, что выполняется $\zeta(A;B)\ne 0$, то A назовём ***k-симплеском или k-мерной гранью n-упорядоченного множества*** $<S, \zeta>$ [24,31, 32].

Согласно определению 2.1.3, B есть симплекс, который будем называть ***дополняющим симплексом*** к A. Заметим, что при $k=-1$ кортеж A вырождается в пустое множество, а B есть n-симплекс, который в дальнейшем будем называть *максимальным*.

Определение 2.1.4. Пусть A – k-симплекс n-упорядоченного множества $<S, \zeta>$ $(0\le k\le n-1)$. Множество $P_A=\{x\in S\colon\ \zeta(A;\,S^{n-k-1};\,x)=0\}$ назовём ***k-мерной плоскостью***, ***порождённой симплексом A*** [25,31,32].

Если A, B – две матрицы с одинаковым количеством строк, то через (A, B) обозначаем матрицу, полученную приписыванием справа матрицы B к матрице A.

Если A, B – две матрицы с одинаковым количеством столбцов, то через $(A;B)$ обозначаем матрицу, полученную приписыванием снизу матрицы B к матрице A.

Лемма 2.1.1. (о непересекающихся плоскостях) Пусть $<S, \zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если $\zeta(A;B)\neq 0$, то $P_A \cap P_B = \varnothing$ [32].

Теорема 2.1.2 (о порождающих симплексах). Пусть $A=(a_1;...;a_k)$, $B=(b_1;...;b_m)$ – симплексы n-упорядоченного множества $<S, \zeta>$, причём $\mathrm{set}(B) \subseteq P_A$, тогда

а) $m \leq k$;

б) $P_B \subseteq P_A$;

в) если $|\mathrm{set}(B)|=|\mathrm{set}(A)|$, то $P_B = P_A$ [32].

Теорема 2.1.3 (о движении плоскости). Пусть A есть k-симплекс n-упорядоченной группы $<G, \zeta>$; $\alpha,\beta \in G$, тогда $\alpha P_A \beta = P_{\alpha A \beta}$.

Теорема 2.1.4. Пусть A есть k-симплекс n-упорядоченной группы $<G,\zeta>$. Для того чтобы плоскость P_A являлась подгруппой группы G, необходимо и достаточно, чтобы $AA \subseteq P_A$.

Теорема 2.1.5 (о пересекающихся плоскостях). Пусть A, B – симплексы n-упорядоченной группы $<G, \zeta>$. Тогда если $P_A \cap P_B \neq \varnothing$, то существует симплекс C такой, что $P_A \cap P_B = P_C$ [32].

Иначе: если две плоскости в n-упорядоченной группе имеют общую точку, то их пересечение также есть плоскость в этой n-упорядоченной группе.

Таким образом, структура множества плоскостей в n-упорядоченной группе подобна структуре множества плоскостей n-мерного линейного пространства.

Теорема 2.1.6. Пусть A и B – две грани множества M, $|A| = |B|$. Если $B \subset P_A$, то $P_A = P_B$ [32].

Следствие 2.1.7. Пусть A – k-грань множества $\langle M, \zeta\rangle$, $B \subset A$, $B \neq \varnothing$, тогда $P_B \subset P_A$ [32].

Теорема 2.1.8. Пусть A – k-грань n-упорядоченной группы $\langle G, \zeta\rangle$, u, v – произвольные элементы из G. Тогда $u P_A v$ есть k-плоскость в $\langle G, \zeta\rangle$ и справедлива формула $\boldsymbol{u} P_A \boldsymbol{v} = P_{uAv}$.

Определение 2.1.5. Пусть G – группа, $<G, \zeta>$ есть n-упорядоченное множество. Если для всех $x \in G^{n+1}$ и для всех $\alpha, \beta \in G$ выполнено условие $\zeta(\alpha x \beta)=\zeta(x)$, то $<G, \zeta>$ назовём n-упорядоченной группой.

Аналогичным образом определяются n-упорядоченное кольцо и n-упорядоченное поле.

Приведём примеры n-упорядоченных групп.

1. Свободная абелева группа с n образующими допускает n-упорядочивание.
2. Мультипликативная группа $C_4=<\mathbf{i}>$ допускает только 2-упорядочивание.
3. Четвертная группа Клейна V_4 допускает только 3-упорядочивание.

Теорема 2.1.9. Для каждого натурального n на линейно упорядоченной группе можно задать n-мерный порядок [29].

Заметим, что в теореме 2.1.9 для доказательства реализации множества из $(2n+1)$ точки в $\boldsymbol{R}^n$ используется определитель Ван дер Монда, который получает интересную геометрическую интерпретацию: знак определителя Ван дер Монда равен значению естественной n-мерной функции порядка на данной линейно упорядоченной группе.

Обычно свободная группа понимается как группа, свободная от определяющих отношений. Согласно теореме 2.1.9 и теореме Мацусита [20], свободная группа получает такую геометрическую интерпретацию: это группа, свободная от ограничений на размерность порядка, т.е. для каждого натурального n на ней можно задать n-мерный порядок.

С использованием идей нестандартного анализа, а также методов теории функций комплексного и вещественного переменных строится двумерный порядок на прямом произведении тороидальной группы и произвольной линейно упорядоченной группы [56].

Теорема 2.1.10. Пусть T_0 – тороидальная группа, L – произвольная линейно упорядоченная группа, тогда $T_0 \times L$ допускает 2-упорядочивание.

Следствие 2.1.11. Мультипликативная группа комплексных чисел допускает нестандартный 2-порядок.

Используя идею Римана о стереографическом образе комплексной плоскости [59], можно задать 3-порядок на поле комплексных чисел.

Теорема 2.1.12. Поле комплексных чисел C допускает 3-упорядочивание [32].

Теорема 2.1.13. Тело кватернионов H допускает 4-упорядочивание [30].

Теорема 2.1.14. Группа Гамильтона $Q_8 = \{\pm 1, \pm \mathbf{i}, \pm \mathbf{j}, \pm \mathbf{k}\}$ допускает 4-упорядочивание [30].

Теорема 2.1.15. Существует бесконечно много неизоморфных конечных групп, допускающих 4-упорядочивание [32].

Теорема 2.1.16. Пусть $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – два базиса n-мерного линейного пространства L, над $\boldsymbol{R}$. Тогда можно так упорядочить базис $B = ((a_{n+1}, \ldots, a_{2n}))$, что для каждого k, $1 \le k \le n+1$, множество $(a_k, \ldots, a_{k+n-1}))$ есть базис L [32].

Теорема 2.1.17. Пусть A, B – два базиса n-мерного линейного пространства L без общих элементов. Тогда существует не менее 2^n различных базисов пространства L, составленных из элементов множества $A \cup B$ [32].

Тоболкиным А.А. доказано, что мультипликативная группа кватернионов H допускает 4-упорядочивание и не допускает n-упорядочивания при $n < 4$ [32].

Теорема 2.1.18. Существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп, допускающих 4-упорядочивание [32].

2.2. Двумерно упорядоченные группы

Определения двумерно упорядоченного множества и двумерно упорядоченной группы являются частными случаями определений n-мерно упорядоченного множества и n-мерно упорядоченной группы. Тем не менее представляется полезным рассмотреть их здесь. Определение линейно упорядоченного множества отталкивается от свойств множества точек, расположенных на прямой. Поэтому при выработке понятия двумерно упорядоченного множества естественно исходить из свойств множества точек, расположенных на плоскости. Подобно тому, как на прямой имеется естественный линейный порядок, на плоскости имеется ориентация, которую разумно рассматривать как естественный двумерный порядок. Определение двумерно упорядоченного множества может быть задано либо в аксиоматической форме [28, с. 12], либо через так называемую ***реализацию множества в*** $\boldsymbol{R}^2$ [28, с. 11].

Отметим, что определение двумерно упорядоченного множества в аксиоматической форме и определение через реализацию на плоскости являются эквивалентными (готовится статья с доказательством их эквивалентности).

Приведем оба определения 2-упорядоченного множества.

Определение 2.2.1 (в аксиоматической форме). Пусть M – непустое множество и на M^3 задана функция $\zeta(x, y, z)$, принимающая значения 0,1,–1 и удовлетворяющая условиям:

A_1. Функция $\zeta(x, y, z)$ меняет значение на противоположное при каждой перестановке двух аргументов.

A_2. Если $A \subset M$, $|A| = 4$, и существуют $a, b, c \in A$, такие, что $\zeta(a, b, c) \neq 0$, то: a) Для каждой пары $x, y \in A$ найдётся $z \in A$, такое, что $\zeta(x, y, z) \neq 0$; b) существует такая пара $a, b \in A$, что для $x, y \in A \setminus \{a, b\}$ выполнено $\zeta(a, b, x) = \zeta(a, b, y) \neq 0$.

A_3. Если $A \subset M$, $|A|=5$, $a, b \in A$, то существуют такие $c \in A$ и $\varepsilon = \pm 1$, что для всех $x \in A \setminus \{a, b\}$, таких, что $\zeta(a, c, x) \neq 0$, выполнены равенства $\zeta(a, b, x) = \varepsilon\zeta(a, c, x)$.

Пара $<M,\zeta>$ называется ***2-упорядоченным*** (или ***двумерно упорядоченным***) множеством. Функция $\zeta(x, y, z)$ называется ***функцией двумерного порядка*** на множестве M.

Определение 2.2.2. Второе определение 2-упорядоченнного множества исходит из идеи реализации множества на плоскости. Введём сначала естественную ориентацию плоскости. Пусть x, y, z есть точки плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Если обход тройки точек (x, y, z) происходит против часовой стрелки, то полагаем $\eta(x, y, z) = 1$. Если обход происходит по часовой стрелке, полагаем $\eta(x, y, z) = -1$. Наконец, если точки x, y, z расположены на одной прямой, то принимаем $\eta(x, y, z) = 0$. Функцию $\eta(x, y, z)$ назовём ***естественной ориентацией*** плоскости $\boldsymbol{R}^2$. Разумеется, функцию $\eta(x, y, z)$ легко задать как знак соответствующего определителя.

Пусть M – непустое множество и на M^3 задана функция $\zeta(x, y, z)$, принимающая значения 0, 1, –1.

Если для множества $A \subset M$, $|A| \leq 5$ существует отображение $\varphi: A \to \boldsymbol{R}^2$, такое, что $\forall x,y,z \in A$ выполнено $\zeta(x, y, z) = \eta(\varphi(x),\varphi(y),\varphi(z))$, то говорят, что φ есть ***реализация*** множества A в плоскости $\boldsymbol{R}^2$ или, что множество A ***реализуемо*** в $\boldsymbol{R}^2$.

Если каждое множество $A \subset M$, $|A| \leq 5$, реализуемо в $\boldsymbol{R}^2$, то пара $<M,\zeta>$ называется ***двумерно упорядоченным множеством.*** В дальнейшем вместо «двумерно упорядоченное множество $<M,\zeta>$» будем часто говорить «двумерно упорядоченное множество M» . Порядок ζ в двумерно упорядоченном множестве $<M,\zeta>$ называется ***невырожденным***, если $\zeta(x,y,z)$ не обращается тождественно в нуль на M. Пусть $<M,\zeta>$ есть 2-упорядоченное множество, $a,b \in M$. Множество всех таких $x \in M$, что $\zeta(a, b, x) = 0$, называется ***прямой***, проходящей через a и b , и обозначается l_{ab}. Если для всех $x \in M \setminus \{a,b\}$выполнено $\zeta(a, b, x) > 0$, то $\{a,b\}$ называется ***внешней гранью*** множества $<M,\zeta>$. Более полные сведения о двумерно упорядоченных множествах представлены в [28].

Пусть на группе G задан двумерный порядок $\zeta(x, y, z)$. Будем говорить, что порядок $\zeta(x, y, z)$ ***согласован*** с групповой операцией, если для всех элементов x, y, z, a группы G выполнено: $\zeta(ax, ay, az) = \zeta(xa, ya, za) = \zeta(x, y, z)$. Группу с заданным на ней двумерным порядком, согласованным с групповой операцией, назовём ***двумерно упорядоченной группой***. Мультипликативная группа комплексных чисел C^* служит примером абелевой двумерно упорядоченной группы. Толкин А.А. показал, как можно для любого натурального n строить неабелевы n-мерно упорядоченные группы, отправляясь от линейно упорядоченных групп [29].

Теорема 2.2.1. Пусть $<G,\zeta(x, y, z)>$ есть невырожденная двумерно упорядоченная группа и для некоторого натурального n выполнено $a^n \in Z(G)$. Тогда $a \in Z(G)$.

Замечание. Теорема 2.2.1 является обобщением теоремы 20 [8].

Следствие 2.2.2. Множество всех элементов конечного порядка двумерно упорядоченной группы G есть её нормальная подгруппа [60].

Следствие 2.2.3. Если элемент a не принадлежит центру двумерно упорядоченной группы G, то и никакая степень этого элемента ему не принадлежит [60].

2.3. Циклически упорядоченные множества. Циклически упорядоченные группы

После линейно упорядоченных групп циклически упорядоченные группы представляются наиболее доступными для интуиции. Исследования таких групп производились параллельно с исследованием линейно упорядоченных групп [34, 40].

Определения циклически упорядоченного множества и соответственно циклически упорядоченной группы сначала были представлены через тернарное отношение (x, y, z) [8]. Пусть в группе G задан циклический порядок с помощью тернарного отношения (x, y, z). Перейдём от тернарного отношения (x, y, z) к функции циклического порядка $\omega(x, y, z)$ следующим образом. Если выполнено (x, y, z), то полагаем $\omega(x, y, z)=1$. Если среди элементов (x, y, z) имеется совпадающие, то полагаем $\omega(x, y, z)=0$. При перестановке любой пары аргументов значение $\omega(x, y, z)$ меняется на противоположное:

$$\omega(x, y, z)= -\omega(y, x, z) = -\omega(z, y, x) = -\omega(x, z, y).$$

Теперь $\omega(x, y, z)$ определено для всех x, y, z из G [45].

Циклически упорядоченная группа $<G,\omega(x, y, z)>$ является частным случаем двумерно упорядоченной группы.$<G,\zeta(x, y, z)>$. Легко показать, что двумерно упорядоченная группа является циклически упорядоченной, если и только если все элементы группы – внешние.

Лемма 2.3.1. В циклически упорядоченной группе существует не более одного элемента x, такого, что $x \neq e$ и $x^2 = e$ [45].

Лемма 2.3.2 Для всех a, b, c из G выполнено:

2.5. $\omega(a, b, c)= \omega(c^{-1}, b^{-1}, a^{-1})$ [45].

Множество $P^u = \{x \in G | \omega(x^{-1}, e, x) \geq 0\}$ называется ***верхним конусом*** циклического порядка группы G.

Теорема 2.3.3. По известному верхнему конусу циклического порядка в группе этот порядок восстанавливается единственным образом [45].

Теорема 2.3.4. Пусть G – группа, на которой заданы два циклических порядка с функциями порядка ω_1 и ω_2. Если значения ω_1 и ω_2 совпадают на множестве всех троек вида (x^{-1}, e, x), где x пробегает G, то $\omega_1 = \omega_2$ [45].

Первая формулировка необходимых и достаточных условий циклической упорядочиваемости группы была приведена в [39]. Однако эти условия оказались недостаточными, хотя они и послужили отправной точкой для успешно завершившихся исследований.

Теорема 2.3.5. Для того чтобы группа G допускала циклическое упорядочивание, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) периодическая часть $T(G)$ вкладывается в тороидальную группу, то есть $T(G) \subset T_0$;

b) $G/T(G)$ линейно упорядочиваема;

c) коммутант G' не содержит периодических элементов [35].

Следствие 2.3.6. Абелева группа G циклически упорядочиваема тогда и только тогда, когда циклически упорядочиваема её периодическая часть [35].

Следствие 2.3.7. Пусть G – группа, L – её циклически упорядоченный нормальный делитель, G/L линейно упорядочена и $G' \cap L = \{e\}$. Тогда группу G можно циклически упорядочить [35].

Теорема 2.3.8. Если выполнены условия:

a) периодическая часть $T(G)$ группы G есть группа C корней из единицы;

b) фактор-группа $G/T(G)$ линейно упорядочиваема;

c) коммутант G' не содержит периодических элементов,

то

1) группа G изоморфна прямому произведению группы C и группы $G/T(G)$;

2) группа G допускает циклическое упорядочивание [44].

Теорема 2.3.9. Существует такая подгруппа B тороидальной группы T_0, что:

1) мощность B есть мощность континуума, $T_0 \cong C \times B$, где C есть группа корней из единицы;

2) множество B неизмеримо относительно меры Лебега в T_0;

3) группа B делима и линейно упорядочиваема;

4) множество B всюду плотно в T_0 [44].

Замечание. Построение неизмеримого по Лебегу множества хорошо известно и для интервала [37], и для окружности [38]. Отличительная черта построения множества B состоит в том, что B – не просто неизмеримое множество, но подгруппа группы T_0, естественным образом возникающая по теореме о представляющей подгруппе.

Лемма 2.3.10. Пусть группа G удовлетворяет условиям:

a) периодическая часть $T(G)$ группы G вкладывается в тороидальную группу T_0;

b) фактор-группа $G/T(G)$ линейно упорядочиваема;

c) коммутант G' не содержит элементов конечного порядка.

Тогда:

a) группа G вкладывается в прямое произведение $C \times (G/T(G))$;

b) группа G допускает циклическое упорядочивание [44].

Теорема 2.3.11. Группа G допускает циклическое упорядочивание тогда и только тогда, когда существует такая линейно упорядочиваемая группа L, что G вкладывается в прямое произведение $C \times L$ [44].

Лемма 2.3.12. Если группа G циклически упорядочиваема, то:

a) периодическая часть $T(G)$ группы G вкладывается в тороидальную группу T_0;

b) фактор-группа $G/T(G)$ линейно упорядочиваема;

c) коммутант G' не содержит элементов конечного порядка [44].

Теорема 2.3.13. Если G есть циклически упорядочиваемая группа и группа корней из единицы C – ее подгруппа, то группа G/C линейно упорядочиваема и $G \cong C \times (G/C)$ [44].

Теорема 2.3.14. Для того чтобы группа G была циклически упорядочиваема, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

a) периодическая часть $T(G)$ группы G вкладывается в тороидальную группу T_0;

b) фактор-группа $G/T(G)$ линейно упорядочиваема;

с) коммутант G' не содержит элементов конечного порядка [44].

Теорема 2.3.15. Следующие условия эквивалентны:

а) группа G допускает циклическое упорядочивание;

b) существует такая линейно упорядочиваемая группа L, что G вкладывается в прямое произведение тороидальной группы T_0 и группы L;

с) существует такая линейно упорядочиваемая группа L, что G вкладывается в прямое произведение группы C корней из единицы и группы L [44].

3. Двумерно упорядоченные поля

В работах Г.Г. Пестова [28, 49] и А.И. Терре [26] введено определение двумерного порядка, двумерно упорядоченного поля, определение верхнего конуса и найдена характеризация верхнего конуса поля.

Получены, в частности, следующие результаты.

Поле имеет характеристику нуль тогда и только тогда, когда оно допускает линейное или двумерное упорядочивание.

Теорема 3.1. Поле характеристики нуль допускает единственное, с точностью до изоморфизма, двумерное упорядочивание тогда и только тогда, когда оно изоморфно полю алгебраических чисел над **Q**.

Теорема 3.2. Все поля характеристики нуль можно разделить на три класса:

1) поля характеристики нуль, не являющиеся формально вещественными. Данные поля можно упорядочить двумерно, но не линейно;

2) формально вещественные поля, не допускающее изоморфного вложения ни в какое нормальное расширение поля **Q**. Поля этого класса как линейно, так и двумерно упорядочиваемы;

3) поля, изоморфно вкладываемые в некоторое нормальное расширение поля **Q**. Такие поля допускают только линейное упорядочивание.

Автором введено понятие бесконечно близкого элемента к базе двумерно упорядоченного поля [28], изучены некоторые свойства этих элементов, сформулированы теоремы.

Сформулируем с основные определения теории двумерно упорядоченных полей.

Определение 3.3. Поле P называется ***двумерно упорядоченным*** полем, если функция двумерного порядка ζ, заданная на P, согласована с алгебраической структурой поля.

Пусть $\langle P, \zeta\rangle$ есть двумерно упорядоченное поле; $a, b \in P$, $a \neq b$. Множество $\{x \in P \mid \zeta(a, b, x) = 0\}$ назовём ***прямой***, ***проходящей через точки a***, ***b.***

Определение 3.4. ***Базой*** P_0 двумерно упорядоченного поля $\langle P, \zeta\rangle$ называется множество

$$P_0 = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) = 0\}.$$

Иначе: *базой* двумерно упорядоченного поля называется прямая, проходящая через точки 0 и 1.

Определение 3.5. ***Верхним конусом*** P^u поля $\langle P, \zeta\rangle$ называется множество:

$$P^u = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) \geq 0\}.$$

Открытый верхний конус $\overset{o}{P^u}$ поля $\langle P, \zeta\rangle$, определим следующим образом:

$$\overset{o}{P^u} = \{x \in P \mid \zeta(0, 1, x) > 0\} = P^u \setminus P_0.$$

Известно [28], что верхний конус однозначно определяет двумерный порядок в поле.

Пример 3.1. Пусть F – произвольное линейно упорядоченное поле. В поле $F(i)$ введём двумерный порядок $\eta(z_1, z_2, z_3)$ следующим образом. Пусть $z_j = x_j + iy_j$, где $x_j, y_j \in F$ $(1 \le j \le 3)$. Тогда полагаем

$$\eta(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Поле $\langle F(i), \eta\rangle$ является двумерно упорядоченным.

В поле $\langle P, P^u\rangle$ зададим *предпорядок* $<_u$ следующим образом:

$$\forall x, y \in P, x <_u y \Leftrightarrow (y - x) \in P^u.$$

Введём в P^u бинарное отношение $\succ$ следующим образом. Будем считать, что $y \succ x$, если:

1. $y \in P_0^-$, $x \in P^u \backslash P_0^-$ или
2. $yx^{-1} \in \overset{o}{P^u}$, если $y \in \overset{o}{P^u}$, $x \in P^u \backslash P_0^-$.

Лемма 3.3. Бинарное отношение $\succ$ есть строгое отношение предпорядка.

Определение 3.6. ***Правым конусом*** P^r двумерно упорядоченного поля $\langle P, P^u\rangle$ называется множество

$$P^r = \{x \in P \mid (x \in P^u, x^2 \in P^u \backslash P_0) \vee (x \in -P^u, x^2 \in -P^u \backslash P_0) \vee x \in P_0^+\}.$$

Пример 3.5. В поле **C** с верхним конусом

$$\mathbf{C}^u = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im} z \ge 0\};$$

правый конус есть множество

$$\mathbf{C}^r = \{z \in \mathbf{C} \mid Re\, z > 0 \wedge z = 0\}.$$

Расположение элементов $\mathbf{C}^r$ в поле **C** поясняет это название.

В поле $\langle P, P^u\rangle$ зададим *предпорядок* $<$ следующим образом:

$$\forall x, y \in P, x < y, \text{ тогда и только тогда, когда } (y - x) \in P^r.$$

Определение 3.7. Пусть $\langle P, P^u\rangle$ – двумерно упорядоченное поле с базой P_0. Элемент $a \in P$ называется ***бесконечно близким к базе*** P_0, если:

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in P^u$$

или

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in -P^u.$$

Множество бесконечно близких к базе элементов обозначим через B.

Бесконечно близкий к базе элемент наглядно можно представить как элемент с бесконечно малым аргументом.

В частности, элементы базы P_0 по определению являются бесконечно близкими к базе.

Пример 3.6. Рассмотрим расширение $\boldsymbol{R}(\alpha)$ поля вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ с помощью бесконечно малой α и расширение $\boldsymbol{R}(\alpha, i)$ поля $\boldsymbol{R}(\alpha)$. Элемент $(\pi + \alpha i)$ поля $P = \mathbf{Q}(\pi + \alpha i) \subset \boldsymbol{R}(\alpha, i)$, является бесконечно близким к базе **Q**.

Теорема 3.3. Пусть $a \in B$. Если $a \in \overset{o}{P^u}$, то

$$\forall n\ \forall r \in P_0\ (r < a) \Rightarrow (a - r)^n \in \overset{o}{P^u} \cap P^r.$$

Теорема 3.4. $B + P_0 \subset B$.

Теорема 3.5. $P_0^+ B \subset B$.

Пусть a – бесконечно близкий к базе P_0 элемент. Для каждого $x \in P_0[a]$ определим в P_0 следующие два сечения:

$$\psi_a^-(x) = \{r \in P_0 \mid ra <_u x\};\ \psi_a^+(x) = \{r \in P_0 \mid x <_u ra\};$$
$$\varphi^-(x) = \{r \in P_0 \mid r < x\};\ \varphi^+(x) = \{r \in P_0 \mid x < r\}.$$

Известно [28], что указанные сечения фундаментальны. Элементы из непрерывного замыкания $\tilde{P}_0$ поля P_0, которые производят эти сечения, обозначим соответственно через $\psi_a(x)$ и $\varphi(x)$.

Теорема 3.6. Пусть P есть двумерно упорядоченное поле. Если a есть бесконечно близкий к базе P_0 элемент, $F(x) \in P_0[x]$, то имеет место тождество [49]

$$\psi_a(F(a)) = F'(\varphi(a)) = \varphi(F'(a)).$$

Заметим, что с помощью этого тождества вопрос о принадлежности элемента a к верхнему конусу сводится к более лёгкому вопросу о знаке многочлена F' в точке $\varphi(a)$.

Теорема 3.7 [55]. Элемент $a \in \overset{o}{P^u}$ является бесконечно близким к базе P_0 элементом тогда и только тогда, когда

$$\forall n\ \forall \rho \in P_0\ (\rho > a) \Rightarrow (\rho - a)^n \in -\overset{o}{P^u}\ .$$

Теорема 3.8. Множество B бесконечно близких к базе элементов является подполем 2-упорядоченного поля $\langle P, +, \cdot\rangle$ [54].

Определение 3.7. Двумерно упорядоченное поле $\langle K, K^u\rangle$ называется ***бесконечно узким***, если каждый его элемент бесконечно близок к базе K_0.

На основе линейно упорядоченного поля K_0 построим бесконечно узкое поле K_1.

Теорема 3.9. Пусть K_0 – линейно упорядоченное поле, элемент a – трансцендентен над K_0. Рассмотрим поле $K_1 = K_0(a)$. Тогда множество

$$K_1{}^u = \{f(a) \mid f(x) \in K_0(x), f'(a) \geq 0\}$$

есть верхний конус двумерного порядка, при котором K_1 является бесконечно узким полем [50 – 52].

Таким образом, эта теорема доказывает существование бесконечно узких полей и указывает алгоритм их построения.

Так, например, линейно упорядоченное поле $\mathbf{Q}(\pi)$ допускает структуру бесконечно узкого поля, где база есть поле $\mathbf{Q}$, а элемент π – бесконечно близок к базе и принадлежит открытому верхнему конусу построенного 2-порядка.

Конструкцию бесконечно узкого поля, определяемую теоремой 3.9, можно обобщить. Пусть K_0 есть линейно упорядоченное поле, $\tilde{K}_0$ есть топологическое замыкание поля K_0..

Пусть β – базис трансцендентности $\tilde{K}_0$ над полем K_0. Известно, что на поле $\tilde{K}_0$ единственным образом продолжается линейный порядок с поля K_0. Рассмотрим расширение $K = K_0(\beta)$ поля K_0 . Поле $K_0(\beta)$ как подполе поля $\tilde{K}_0$ линейно упорядочено. Пусть, наконец, задано произвольное отображение $d{:}B\to K$.

Теорема 3.10. Множество

$$K^u = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f(x_1, \ldots, x_n) \in K_0(x_1, \ldots, x_n),\ df(a_1, \ldots, a_n) \geq 0\},$$

где
$$df(a_1,\ldots,a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}da_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}da_n$$

при $x_i = a_i$, $a_i \in \beta$ есть верхний конус некоторого двумерного порядка в поле K, при котором K является бесконечно узким полем [53].

Пусть теперь поле F допускает и линейное, и двумерное упорядочивание. Всегда ли в этом случае оно будет бесконечно узким? Можно показать, что поле $F = Q(\sqrt[3]{2})$ допускает и линейное, и двумерное упорядочивание, но не является бесконечно узким полем.

Уточнить структуру бесконечно узких полей помогает

Теорема 3.11 (критерий бесконечно узкого поля). Пусть K двумерно упорядоченное поле. Поле K является бесконечно узким полем тогда и только тогда, когда правый конус K^r поля $\langle K, K^u \rangle$ является положительным конусом K^+ поля K [53].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пестов Г.Г.* К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 6. С. 1350–1360.
2. *Delon FranÇoise*. Plongement dense d'un corp ordonné dans sa cloture réelle // J. Symb. Logic. 1991. V. 56. No. 3 (Sept.). P. 974–980.
3. *Hauschield K.* Über die Konstruktion von ErweiterungskörPern zu nichtarchimedisch angeordneten KörPern, mit Hilfe von Hölderschen Schnitten, Wiss. Z. Humboldt-Univ., Berlin Math.-Natur. Reihe 15(1966). P. 685–686.
4. *Пестов Г.Г.* Строение упорядоченных полей. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1980.
5. *Пестов Г.Г.* Симметрия сечений в упорядоченном поле // Избр. докл. Междунар. конф. «Всесибирские чтения по математике и механике». Т. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 198–202.
6. *Кокорин А.И.*, *Копытов В.М.* Линейно упорядоченные группы. М.: Наука, 1972.
7. *Галанова Н.Ю.* Конфинальность и симметричность сечений в упорядоченных полях. Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1998.
8. *Fuchs L.* Partially ordered algebraic systems. Pergamon Press, 1963.
9. *Пестов Г.Г.* Теоремы о замыканиях линейно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Бюллетень оперативной научной информации. Упорядоченные поля и группы. 2004. № 21, февраль.
10. *Baer R.* Dichte, Archimedizität und Starrheit geordneter Korper // Math. Ann. 1970. V. 168. No. 3. P. 165–205.
11. *Macai E.* Notes on real closed fields // Ann. Univ. Sci. Budapest., Sectio Mat., XIII. 1970. P. 35–55.
12. *Галанова Н.Ю.*, *Пестов Г.Г.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 2. С. 174–185.
13. *Пестов Г.Г.* Об архимедовской полноте и об изоморфизме упорядоченных полей // Избр. докл. Междунар. конф. «Всесибирские чтения по математике и механике». Т. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 203–208.
14. *Галанова Н.Ю.* Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2003. Т. 42. № 1. С. 26–36.
15. *Галанова Н.Ю.* О строении нестандартной вещественной прямой // Избр. докл. Междунар. конф. «Всесибирские чтения по математике и механике». Т. 1. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1997. С. 65–70.
16. *Galanova N.Yu.* Symmetric and asymmetric gaps in fields of power series // Serdica Math. J. 2004. V. 30. No. 4. P. 495–504.
17. *Galanova N.Yu.* An investigation of the fields of bounded formal power series by means of theory of cuts // Acta APPl. Math. 2005. V. 85. No. 1–3. P. 121–126.
18. *Галанова Н.Ю.* К теории сечений в упорядоченных полях: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 1999.
19. *Dales H.J.*, *Woodin H.* Super real fields. Oxford: Clarenden Press, 1996.
20. *Matsuisita S.* Sur la Puissance des orders dans un groupe libre // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. – A, 56. 1953. P. 15–16.

21. *Sperner E.* Beziehungen zwischen geometrischer und agebraischer Anordnung // Arch. Math. 1948. V. 1. No. 2. S. 148–153.
22. *Glock E.* Die Orientierungsfunctionen eines affinen raumes // Math. Z. 1962. Bd. 78. No. 4. S. 319–360.
23. *Novoa L.G.* On n-ordered sets and order completeness // Pacific J. Math. 1965. V. 15. No. 4. P. 1337–1345.
24. *Терре А.И.* Элементы геометрии n-мерного порядка. Томск, 1982. 35 с. Деп. в ВИНИТИ 2.12.1982, № 5941-82.
25. *Пестов Г.Г.* n-упорядоченные множества // Труды Иркутского госуниверситета. 1970. Т. 74. Вып. 6.
26. *Терре А.И.* Двумерно упорядоченные тела и поля: дис. … канд. физ.-мат. наук. Кишинёв, 1984.
27. *Забарина А.И. Пестов Г.Г.* Об n-мерно упорядоченных группах // Вестник ТГУ. 2003. № 280. С. 40–43.
28. *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные поля. ТГУ, 2003.
29. *Тоболкин А.А.* Об n-упорядоченных группах // X Всероссийская конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Наука и образование» (15 – 19 мая 2006 г.). Т. 1. Естественные и точные науки. Ч. 2. С. 107–113.
30. *Тоболкин А.А.* Теорема о мультипликативной группе кватернионов // Актуальные проблемы математики и методики её преподавания: материалы заочной Всероссийской научно-практической конференции. Томск: Изд-во ТГПУ, 2007.
31. *Пестов Г.Г.*, *Тоболкин А.А.* k-плоскости в n-мерно упорядоченных группах // Вестник ТГУ. 2007. № 301. С. 92–93.
32. *Тоболкин А.А.* К теории n-упорядоченных групп: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 2009.
33. n-dimensionally ordered groups // Избранные вопросы алгебры: сб. статей, посвящённый памяти Н.Я. Медведева. Барнаул: Изд-во Алт. гос. ун-та, 2007. С. 165–172.
34. *Rieger L.S.* On the ordered and cyclically ordered groups I-III // Věstnik Kral. Českй Spol. Nauk. 1946. No. 61. P. 31; 1947. No. 1. P. 1–33; 1948. No. 1. P. 11–26.
35. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* О критерии циклической упорядочиваемости группы // Упорядоченные множества и решетки: Межвуз. науч. сб. Вып. 9. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. С. 19–24.
36. *Scott D.* On comPleting ordered fields // Applications of Model theory to Algebra, Analisys and Probability (Internat. Sympos., Passadena, Calif., 1967). N.Y.: Renehart and Winston, 1969. P. 274–278.
37. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной. М.: ГИТТЛ, 1959.
38. *Колмогоров А.Н.*, *Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
39. *Желева С.Д.* О циклически упорядоченных группах // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 17. № 5. С. 1046–1051.
40. *Swierczkowski S.* On cyclically ordered groups // Fund. Math. 1953. V. 47. P. 161–167.
41. *Пестов Г.Г.*, *Тоболкин А.А.* К геометрии n-упорядоченных групп // Вестник ТГУ. 2007. № 1. С. 46–49.
42. *Бурбаки Н.* Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. М.: Наука, 1965.
43. *Забарина А.И.* О циклически упорядоченных группах: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 1985.
44. *Пестов Г.Г.* О классе циклически упорядочиваемых групп // Вестник Томского государственного университета: Бюллетень оперативной научной информации. Упорядоченные поля и группы. 2004. № 21, февраль.
45. *Забарина А.И.* К теории циклически упорядоченных групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31. № 1. С. 3–12.
46. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* К теореме Сверчковского // Сиб. матем. журн. 1984. Т. XXV. № 4. С. 46–53.

47. *Забарина А.И.* О линейном и циклическом порядках в группе // Сиб. матем. журн. 1985. Т. XXVI. № 2. С. 204–207.
48. *Пестов Г.Г.* К теории упорядоченных групп и полей: дис. … докт. физ-мат. наук. Екатеринбург, 2004.
49. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* О сечениях в базе 2-упорядоченного поля // Вестник ТГУ. 2007. № 301. С. 94–96.
50. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* Конструкция бесконечно узкого двумерно упорядоченного поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2007. № 1. С. 50–53.
51. *Фомина Е.А.* О двумерно упорядоченных полях: дис. … канд. физ.-мат. наук. Томск, 2009.
52. *Фомина Е.А.* Об одном классе двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 3(4). С. 32–34.
53. *Фомина Е.А.* Критерий бесконечно узкого поля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 1(5). С. 27–30.
54. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* Подполе B бесконечно близких к базе элементов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 41–47.
55. *Пестов Г.Г.*, *Фомина Е.А.* К теории двумерно упорядоченных полей // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2(14). С. 16–19.
56. *Тоболкин А.А.* Двумерный порядок на прямом произведении групп // Вестник ТГУ. 2007. № 297. С. 159–160.
57. *Галанова Н.Ю.* Классификация вещественно замкнутых полей мощности $\aleph_1$ с $(\aleph_1,\aleph_1)$ симметричными сечениями // Международная конференция по математике и механике 16 – 18 сентября 2003 года. Избранные доклады. Томск, 2003. С. 9–12.
58. *Галанова Н.Ю.* Об одном классе вещественно замкнутых упорядоченных полей // Исследования по математическому анализу и алгебре. 2001. Вып. 3. С. 53–56.
59. *Пестов Г.Г.*, *Тоболкин А.А.* К геометрии n-упорядоченных групп // Вестник ТГУ. 2007. № 1. С. 46–49
60. *Забарина А.И.*, *Пестов Г.Г.* Двумерно упорядоченные группы // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1 (13). С. 5–8.

Статья поступила 17.08.2011 г.

Pestov G. G. INVESTIGATIONS ON ORDERED GROUPS AND FIELDS IN TOMSK STATE UNIVERSITY. Investigations of the participants of the seminar on ordered groups and fields since 1980 developed along the following lines: theory of cuts in the linearly ordered fields, n-dimensionally ordered groups, in particularly, two-ordered groups, cyclic-ordered groups, two-dimensionally ordered fields and infinitely narrow fields. The Paper contains a review of results, obtained by the seminar's participants.

Keywords: Linearly ordered groups, two-dimensionally ordered fields, cyclic ordered groups, the upper cone, the right cone.

PESTOV German Gavrilovich (Tomsk State University)
E-mail: PPPestov@mail.tomsknet.ru