

УДК 512.541

Фам Тхи Тху Тхюи

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ АБЕЛЕВЫ *afi*-ГРУППЫ

Подгруппа  $A$  абелевой группы  $G$  называется ее абсолютным идеалом, если  $A$  является идеалом в любом кольце на группе  $G$ . Назовем абелевую группу *afi*-группой, если любой ее абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой. В настоящей работе описаны *afi*-группы в классе вполне транзитивных периодических групп (в частности, сепарабельных периодических групп) и делимых периодических групп.

**Ключевые слова:** абелева группа, кольцо на группе, абсолютный идеал, вполне характеристическая подгруппа, *afi*-группа.

Настоящая работа посвящена изучению абелевых *afi*-групп. Все рассматриваемые группы абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Под умножением на абелевой группе  $G$  понимается любой гомоморфизм  $\mu: G \otimes G \rightarrow G$ . Это умножение будем часто обозначать знаком  $\times$ , то есть  $g_1 \times g_2 = \mu(g_1, g_2)$ , где  $g_1, g_2 \in G$ . Абелева группа  $G$  с заданным на ней умножением  $\times$  называется кольцом на группе  $G$ , которое обозначается  $(G, \times)$ . Подгруппа  $A$  абелевой группы  $G$  называется ее абсолютным идеалом, если  $A$  является идеалом в любом кольце на  $G$ . Абсолютные идеалы изучались, например, в работах [1 – 3]. Так как любое умножение на группе  $G$  индуцирует некоторый эндоморфизм на ней, то всякая вполне характеристическая подгруппа группы  $G$  является ее абсолютным идеалом. Но обратное неверно, в качестве примера рассматривается любая циклическая подгруппа  $\langle a \rangle$  группы  $G$  без кручения ранга 1 неидемпотентного типа  $\ell(G) = (\infty, 1, 1, 1, \dots)$ . Так как на  $G$  может быть определено только нулевое умножение, то любая ее подгруппа является абсолютным идеалом, в частности, подгруппа  $\langle a \rangle$  – абсолютный идеал группы  $G$ . Но  $\langle a \rangle$  не является вполне характеристической подгруппой группы  $G$ , так как  $\varphi(a) \notin \langle a \rangle$ , если  $\varphi(g) = (1/p_1)g$ ,  $g \in G$ .

В связи с этим возникает вопрос, в каких группах любой абсолютный идеал является вполне характеристической подгруппой. Такие группы называются *afi*-группами.

В настоящей работе описаны *afi*-группы в классе вполне транзитивных периодических групп (в частности, сепарабельных периодических групп) и делимых периодических групп. Терминология и обозначения соответствуют [1].

В [2] рассматривается подгруппа  $I(G) = \{\varphi(G) \mid \varphi \in \text{Hom}(G, E(G))\}$ , которая является идеалом кольца  $E(G)$  и доказывается следующая теорема:

**Теорема 1 [2].** Подгруппа  $A$  группы  $G$  является ее абсолютным идеалом тогда и только тогда, когда  $\mu(A) \subseteq A$  для всех гомоморфизм  $\mu \in I(G)$ .

Нетрудно видеть, что сумма и пересечение абсолютных идеалов группы  $G$  также являются ее абсолютными идеалами. Наименьший абсолютный идеал группы  $G$ , содержащий элемент  $g$  называется абсолютным идеалом, порожденным элементом  $g$  в группе  $G$  и обозначается через  $\langle g \rangle_A$ . Этот идеал существует, а именно, он равен пересечению всех абсолютных идеалов группы  $G$ , содержащих элемент  $g$ .

Нетрудно доказать следующее предложение

**Предложение 2.** Группа  $G$  является *afi*-группой тогда и только тогда, когда  $\varphi(g) \in \langle g \rangle_{AI}$  для любого  $g \in G$  и любого  $\varphi \in E(G)$ .

В классе периодических групп проблема описания *afi*-групп легко сводится к случаю  $p$ -примарных групп.

**Предложение 3.** Периодическая группа  $G$  является *afi*-группой тогда и только тогда, когда каждая ее  $p$ -компонента  $G_p$  является *afi*-группой.

**Доказательство.**

Пусть  $G$  – *afi*-группа,  $p$  – простое число и  $A_p$  – произвольный абсолютный идеал группы  $G_p$ . Легко проверить, что  $A_p$  – абсолютный идеал группы  $G$  и поэтому является вполне характеристической подгруппой группы  $G$ . Следовательно,  $A_p$  является вполне характеристической подгруппой группы  $G_p$  и, значит, группа  $G_p$  является *afi*-группой.

Пусть, наоборот,  $G_p$  является *afi*-группой для каждого простого числа  $p$ . Пусть  $A = \bigoplus_p A_p$  – произвольный абсолютный идеал группы  $G$  и  $\varphi \in E(G)$ . Нетрудно доказать, что  $A_p$  – абсолютный идеал группы  $G_p$  и поэтому является ее вполне характеристической подгруппой для каждого  $p$ . Тогда  $\varphi(A) = \bigoplus_p \varphi(A_p) = \bigoplus_p \varphi_p(A_p) \in \bigoplus_p A_p = A$ , где  $\varphi_p$  – суждение  $\varphi$  на  $G_p$ . Следовательно, группа  $G$  является *afi*-группой. ■

В дальнейшем, будем рассматривать только  $p$ -группы.

**Теорема 4.** Делимая  $p$ -группа  $G$  является *afi*-группой тогда и только тогда, когда  $G = 0$  или  $G \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ .

**Доказательство.** Очевидно,  $0$  является *afi*-группой. Так как любой эндоморфизм группы  $\mathbb{Z}(p^\infty)$  является умножением на некоторое  $p$ -адическое число [1], то  $\varphi(g) \in \langle g \rangle \subseteq \langle g \rangle_{AI}$  для любого элемента  $g \in \mathbb{Z}(p^\infty)$  и эндоморфизма  $\varphi \in E(\mathbb{Z}(p^\infty))$ . Следовательно,  $\mathbb{Z}(p^\infty)$  является *afi*-группой по предложению 2.

Пусть  $G$  – делимая  $p$ -группа,  $G \neq 0$  и  $G \neq \mathbb{Z}(p^\infty)$ . Тогда  $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$ ,  $G_i \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ ,  $|I| > 1$ . Тогда  $G_i$  не является вполне характеристической подгруппой группы  $G$ , так как  $\Phi(G_i) = G_j \not\subseteq G_i$  ( $i \neq j$ ) при эндоморфизме  $\Phi = \varphi \cdot \pi_i$ ,  $\varphi$  – изоморфизм  $G_i$  на  $G_j$ ,  $\pi_i$  – проекция группы  $G$  на  $G_i$ . Но  $G_i$  является абсолютным идеалом группы  $G$ , так как на делимой  $p$ -группе можно задать только нулевое умножение. Следовательно,  $G$  не является *afi*-группой ■

Пусть  $g$  – произвольный элемент  $p$ -группы  $G$ . Индикатором, или ульмовской последовательностью элемента  $g$  в группе  $G$ , называется последовательность  $H(g) = (\sigma_0 \ \sigma_1 \ \dots \ \sigma_n \ \dots)$ , где  $\sigma_n = h^*(p^n g)$  – обобщенная  $p$ -высота элемента  $p^n g$  в группе  $G$ . Напомним, что редуцированная  $p$ -группа  $G$  называется вполне транзитивной, если для любых двух элементов  $a, b \in G$  из  $H(a) \leq H(b)$  следует, что существует эндоморфизм  $\varphi$  группы  $G$ , такой, что  $\varphi(a) = b$ .

**Лемма 5.** Пусть  $G$  – редуцированная вполне транзитивная  $p$ -группа,  $B$  –  $p$ -базисная подгруппа группы  $G$ . Пусть  $a, g \in G$ ,  $b \in B$  такие, что  $H(g) \leq H(b) \leq H(a)$ . Тогда  $a \in \langle g \rangle_{AI}$ .

**Доказательство.** Так как  $G$  – вполне транзитивная группа, то существуют гомоморфизмы  $\varphi, \psi$  группы  $G$ , такие, что  $\varphi(g) = b$  и  $\psi(b) = a$ . Пусть  $B = \bigoplus_{i \in I} \langle e_i \rangle$ . Известно [1, теорема 120.1], что умножение на  $p$ -группе полностью определяется произведениями базисных элементов. Определим умножение  $\times$  на  $G$ , положив

$$e_i \times e_j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j; \\ e_j, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Пусть  $b = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n$  ( $k_i \in \mathbb{Z}$ ), тогда легко проверить, что  $b \times (e_1 + \dots + e_n) = b$ . Определим гомоморфизм  $\mu$ , положив  $\mu(g) = g \times (e_1 + \dots + e_n)$ . Так как  $o(\mu) \leq o(e_1 + \dots + e_n)$ , то  $\mu$  имеет конечный порядок, поэтому  $\mu \in I(G)$  [1, предложение 117.3]. Так как  $I(G)$  – идеал кольца  $E(G)$  [2], то  $\eta = \psi \cdot \mu \cdot \varphi \in I(G)$ . Легко проверить, что  $\eta(g) = a$ . Так как  $\langle g \rangle_{AI}$  – абсолютный идеал группы  $G$ , то  $\eta(g) \in \langle g \rangle_{AI}$  по теореме 1. Следовательно,  $a \in \langle g \rangle_{AI}$ . ■

В частности, если  $a = b$ , то из леммы 5 получается следующее следствие:

**Следствие 6.** Пусть  $G$  – редуцированная вполне транзитивная  $p$ -группа,  $B$  –  $p$ -базисная подгруппа группы  $G$ . Пусть  $g \in G$ ,  $b \in B$  такие, что  $H(g) \leq H(b)$ . Тогда  $b \in \langle g \rangle_{AI}$ . ■

**Теорема 7.** Редуцированная вполне транзитивная  $p$ -группа  $G$  является *afi*-группой тогда и только тогда, когда ее первая ульмовская подгруппа  $G^1$  является циклической группой.

**Доказательство.** Пусть редуцированная вполне транзитивная  $p$ -группа  $G$  является *afi*-группой. Допустим, что группа  $G^1$  не является циклической, тогда  $G^1 \neq 0$ . Докажем, что группа  $G$  не является *afi*-группой. Так как группа  $G$  редуцирована, то подгруппа  $G^1$  не является делимой. Поэтому существует элемент  $a \in G^1$ , имеющий нулевую высоту в  $G^1$ . Так как  $G^1$  не является циклической группой, то существует элемент  $b \in G^1$  такой, что  $b \notin \langle a \rangle$ . Пусть  $C = \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ . Так как подгруппа циклической группы также является циклической, то  $C = \langle p^k a \rangle = \langle p^l b \rangle$  для некоторых  $k, l \in \mathbb{Z}$ . При этом  $l \geq 1$ , так как иначе  $b \in \langle a \rangle$ , что противоречит выбору элемента  $b$ . Также  $k \geq 1$ , так как иначе  $a \in \langle p^l b \rangle$ , что противоречит тому, что  $h_{G^1}(a) = 0$ . Рассмотрим элементы  $x = p^{k-1} a$  и  $y = p^{l-1} b$ . Нетрудно видеть, что

$$x \notin \langle y \rangle \text{ и } y \notin \langle x \rangle, \quad (1)$$

так как в противном случае,  $p^{k-1} a = x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C = \langle p^k a \rangle$  или  $p^{l-1} b = y \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle = C = \langle p^l b \rangle$ . С другой стороны,  $px = p^k a$ ,  $py = p^l b$  – порождающие циклической группы  $C$ . Следовательно,  $px = r(py)$  для некоторого целого числа  $r$ , где  $(r, p) = 1$ . Откуда  $h^*(p^n x) = h^*(p^n y)$  для любого натурального числа  $n \geq 1$ . Докажем, что либо  $\langle x \rangle$ , либо  $\langle y \rangle$  не являются вполне характеристической подгруппой группы  $G$ . Не теряя общности, можно считать, что  $h^*(x) \leq h^*(y)$ . Тогда  $H(x) \leq H(y)$ , и поэтому из вполне транзитивности группы  $G$  следует, что  $y = \varphi(x)$  для некоторого гомоморфизма  $\varphi \in \text{End} G$ . Следовательно, из (1) следует, что  $\langle x \rangle$  не является вполне характеристической подгруппой группы  $G$ . С другой стороны, так как  $x \in G^1$ , то  $\langle x \rangle \times G = G \times \langle x \rangle$  при любом умножении  $\times$  на  $G$ . Следовательно,  $\langle x \rangle$  – абсолютный идеал группы  $G$ . Следовательно, группа  $G$  не является *afi*-группой.

Пусть теперь подгруппа  $G^1$  является циклической группой. Пусть  $g \in G$  и  $\varphi \in \text{End} G$ . Докажем, что  $\varphi(g) \in \langle g \rangle_{AI}$ . Рассмотрим 2 случая:

1)  $g \in G^1$ . Поскольку  $G^1$  является вполне характеристической подгруппой группы  $G$ , то  $\varphi$  индуцирует некоторый эндоморфизм на  $G^1$ . Так как  $G^1$  – циклическая группа, то  $\varphi(g) = kg$  для некоторого целого числа  $k$ . Следовательно,  $\varphi(g) \in \langle g \rangle_{AI}$ .

2)  $g \notin G^1$ . Пусть  $H(g) = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , при этом  $\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1} \in \mathbb{Z}$  и  $\sigma_n \geq \omega$ . Так как группа  $G/B$  делима, то существует элемент  $b \in B$  такой, что

$$p^{\sigma_{n-1}+1} \mid g - b. \quad (2)$$

При этом, если  $b = \sum_{i \in J} k_i e_i$ , где  $J$  – некоторое конечное подмножество множества  $I$ , то элемент  $b$  можно выбрать таким образом, чтобы  $p^{\sigma_{n-1}+1} \nmid k$  для всех  $i \in J$ .

Докажем, что  $H(b) = (\sigma_0 \dots \sigma_{n-1} \infty \dots)$ . Пусть  $s < n$ . Тогда  $\sigma_{n-1} + s \geq \sigma_{n-1} \geq \sigma_s$ . Из (2) следует, что  $p^{\sigma_{n-1}+s+1} \mid p^s g - p^s b$ , то есть  $h^*(p^s g - p^s b) > \sigma_{n-1} + s$ . Следовательно,  $h^*(p^s g - p^s b) > \sigma_s = h^*(p^s g)$ . Так как  $p^s b = p^s g - (p^s g - p^s b)$ , то

$$h^*(p^s b) = \sigma_s \text{ для каждого } s < n. \quad (3)$$

Из (2) следует, что  $p^{\sigma_{n-1}+n+1} \mid p^n g - p^n k_i e_i$ . Следовательно,  $p^{\sigma_{n-1}+n+1} \mid p^n k_i e_i$ , так как  $h^*(p^n g) = \sigma_n \geq \omega$ . Так как система  $\{e_i \mid i \in J\}$  является  $p$ -независимой, то либо  $p^n k_i e_i = 0$ , либо  $p^{\sigma_{n-1}+n+1} \mid p^n k_i$  для каждого  $i \in J$ . Если  $p^{\sigma_{n-1}+n+1} \mid p^n k_i$  для некоторого  $i \in J$ , то  $p^{\sigma_{n-1}+1} \mid k_i$ , что противоречит выбору элемента  $b$ . Следовательно,  $p^n k_i e_i = 0$  для всех  $i \in J$ . Поэтому,

$$p^n b = \sum_{i \in J} p^n k_i e_i = 0, \quad (4)$$

откуда  $h^*(p^s b) = \infty$  для всех  $s \geq n$ . Из этого и из (3) следует, что  $H(b) = (\sigma_0 \dots \sigma_{n-1} \infty \dots)$ . Следовательно,  $H(g) \leq H(b) \leq H(\varphi(b))$ . Так как  $G$  – вполне транзитивная группа и  $b \in B$ , то в силу леммы 5 имеем

$$\varphi(b) \in \langle g \rangle_{AI}, \quad (5)$$

и в силу следствия 6

$$b \in \langle g \rangle_{AI}, \quad (6)$$

Обозначим  $a = g - b$ . Тогда из (4) следует, что  $p^n a = p^n g$ . Поэтому  $h^*(p^n a) = h^*(p^n g) = \sigma_n \geq \omega$ , то есть  $p^n a \in G^1$ . Так как  $G^1$  является циклической группой, то  $\varphi(p^n a) = k p^n a$  для некоторого целого числа  $k$ . Следовательно,  $p^n (\varphi(a) - ka) = 0$ . Положим

$$c = \varphi(a) - ka. \quad (7)$$

Тогда  $h^*(p^n c) = h(0) = \infty$ . Кроме того, из (7) следует, что  $h^*(c) \geq h^*(a) = h^*(g - b) > \sigma_{n-1}$  в силу (2). Отсюда  $h^*(p^i c) > \sigma_{n-1} \geq \sigma_i$  для каждого  $i < n$ . Таким образом,

$$H(c) \geq (\sigma_0 \dots \sigma_{n-1} \infty \dots) = H(b) \geq H(g). \quad (8)$$

Следовательно,  $c \in \langle g \rangle_{AI}$  по лемме 5. Кроме того, из (6) следует, что  $ka = k(g - b) \in \langle g \rangle_{AI}$ . Из этого и из (7) получаем, что

$$\varphi(a) = c + ka \in \langle g \rangle_{AI}. \quad (9)$$

Так как  $\varphi(g) = \varphi(a) + \varphi(b)$ , то из (5) и (9) следует, что  $\varphi(g) \in \langle g \rangle_{AI}$ .

В силу произвольности элемента  $g$  и эндоморфизма  $\varphi$  группа  $G$  является *afi*-группой по предложению 2 ■

**Следствие 8.** Любая сепарабельная  $p$ -группа является *afi*-группой.

**Доказательство.** Это выполняется, так как любая сепарабельная  $p$ -группа вполне транзитивна и ее первая ульмовская подгруппа нулевая. ■

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. М.: Мир, 1977.
2. Fried E. On the subgroups of abelian groups that are ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups. Budapest, 1964. P. 51–55.
3. Чехлов А.Р. Об абелевых группах, все подгруппы которых являются идеалами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2009. № 3. С. 64–67.

Статья поступила 13.05.2011 г.

*Pham Thi Thu Thuy.* TORSION ABELIAN *afi*-GROUPS. A subgroup  $A$  of an abelian group  $G$  is called its absolute ideal if  $A$  is an ideal of any ring on  $G$ . An abelian group is called an *afi*-group if every its absolute ideal is a fully invariant subgroup. In this paper descriptions of *afi*-groups in the class of fully-transitive torsion groups (particularly, separable torsion groups) and divisible torsion groups are given.

Keywords: abelian group, ring on a group, absolute ideal, fully invariant subgroup, *afi*-group.

*PHAM Thi Thu Thuy* (Moscow State Pedagogical University)

E-mail: [ptthuthuy@yahoo.com](mailto:ptthuthuy@yahoo.com)