

УДК 512.541

С.Я. Гриншпон, М.М. Никольская

СОБСТВЕННЫЕ ВПОЛНЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ, ИЗОМОРФНЫЕ САМОЙ ГРУППЕ^{1,2}

В статье исследуются группы без кручения, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Ключевые слова: абелева группа, IF -группа, вполне характеристическая подгруппа, группа без кручения.

В теории абелевых групп одним из направлений исследований является изучение групп, содержащих собственные подгруппы, изоморфные самой группе. В [1] Р. Бьюмонт и Р. Пирс рассматривали такие группы: I -группы – группы, изоморфные собственной подгруппе; IP -группы – группы, изоморфные собственной сервантной подгруппе; ID -группы – группы, изоморфные собственному прямому слагаемому. Г. Монк в [2] исследовал абелевы p -группы, не содержащие собственные сервантные плотные подгруппы, изоморфные самой группе. В [3] рассматриваются группы, изоморфные подгруппам той же мощности, что и сама группа. В [4–6] исследовались примарные IF -группы, т.е. группы, содержащие собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

В настоящей статье исследуются абелевы группы без кручения, изоморфные некоторой собственной вполне характеристической подгруппе. Нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1. ([7]) Пусть A – абелева группа, $A = R \oplus D_0 \oplus \left(\bigoplus_p D_p \right)$, где R – редуцированная группа, D_0 – делимая группа без кручения, D_p – делимые p -группы. Подгруппа S группы A вполне характеристична в A тогда и только тогда, когда она имеет один из следующих двух видов:

1) $S = R' \oplus \left(\bigoplus_p D_p \left[p^{k_p} \right] \right)$, где $R' = \bigoplus_p R'_p$ – периодическая вполне характеристическая подгруппа группы R (R'_p – p -компонента группы R') и $k_p \geq \sup \{ e(r) \mid r \in R'_p \}$ (k_p – целое неотрицательное число или символ ∞);

2) $S = R' \oplus D_0 \oplus \left(\bigoplus_p D_p \right)$, где R' – вполне характеристическая подгруппа группы R .

Всюду далее в этой статье под словом «группа» будем понимать аддитивно записанную абелеву группу.

¹ Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 годы». Государственный контракт П937 от 20 августа 2009 года.

² Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту № 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 года.

Рассмотрим группы без кручения, которые содержат собственные вполне характеристические подгруппы, изоморфные самой группе.

Теорема 2. Группа без кручения A содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе, тогда и только тогда, когда A – неделимая группа.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – группа без кручения, которая содержит собственную вполне характеристическую подгруппу S , изоморфную группе A . Предположим, что A – делимая группа. По теореме 1 получаем, что $S = A$, что противоречит, тому, что S – собственная подгруппа группы A .

Достаточность. Пусть A – группа без кручения, не являющаяся делимой группой. Существует такое натуральное число n , отличное от 1, что $nA \neq A$. Рассмотрим $S = nA$. Тогда S – вполне характеристическая подгруппа группы A . Так как A – группа без кручения, то $S \cong A$. Значит, A содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, изоморфную самой группе. ■

Таким образом, группа без кручения, не являющаяся делимой, всегда содержит собственную вполне характеристическую подгруппу вида nA , изоморфную самой группе. Будем рассматривать далее группы без кручения, которые имеют собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA , изоморфную самой группе.

Определение. Группу без кручения A назовем *IF-группой*, если она содержит собственную вполне характеристическую подгруппу, отличную от nA , которая изоморфна самой группе.

Из теоремы 2 следует такой результат

Теорема 3. Делимая группа без кручения не является IF-группой.

Теорема 4. Нередуцированная группа без кручения A является IF-группой тогда и только тогда, когда ее редуцированная часть является IF-группой.

Доказательство. Необходимость. Пусть A – нередуцированная группа без кручения. Тогда она имеет вид $A = R \oplus D_0$, где D_0 – делимая группа без кручения, R – редуцированная группа без кручения. Пусть A – IF-группа, тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A , что $S \cong A$, $S \neq A$ и $S \neq nA$. По теореме 1 S имеет следующий вид: $S = R' \oplus D_0$, R' – вполне характеристическая подгруппа группы R . Так как $A = R \oplus D_0$ и $S \cong A$, то получаем, что $R' \cong R$ и R' – собственная подгруппа группы R . $S \neq nA$, следовательно, $R' \oplus D_0 \neq n(R \oplus D_0) = nR \oplus D_0$. Получаем, $R' \neq nR$. Значит, R – IF-группа.

Достаточность. Пусть A – нередуцированная группа без кручения. $A = R \oplus D_0$, где R – редуцированная группа без кручения, D_0 – делимая группа без кручения. Пусть R – IF-группа. Тогда существует вполне характеристическая подгруппа R' группы R такая, что $R' \cong R$, $R' \neq R$ и $R' \neq nR$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим группу $S = R' \oplus D_0$. S – собственная вполне характеристическая подгруппа группы A , $S \cong A$ и $S \neq nA$. Следовательно, A – IF-группа. ■

В силу теорем 3 и 4 будем рассматривать далее только редуцированные группы.

Основными понятиями для групп без кручения являются понятия характеристики и типа.

Характеристикой называется последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞ . Обозначим через $\mathfrak{X}$ множество таких последовательностей. Если $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$, то полагают $\chi_1 \leq \chi_2$, тогда и только тогда, когда $k_n \leq l_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Пусть A – группа без кручения. Для элемента $a \in A$ максимальное целое неотрицательное число k при данном простом числе p , для которого в группе A разрешимо уравнение $p^k x = a$, называется p -высотой $h_p(a)$ элемента a ; если такого числа не существует, то полагаем $h_p(a) = \infty$. Последовательность p -высот

$$\chi(a) = (h_{p_1}, \dots, h_{p_n}, \dots),$$

где $p_1, \dots, p_n, \dots$ – последовательность всех простых чисел, упорядоченных по возрастанию, называется *характеристикой* или *высотной последовательностью* элемента a . Так как характеристика элемента a зависит от группы A , иногда пишут $\chi_A(a)$, чтобы подчеркнуть роль A .

Если $\chi_1 = (k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $\chi_2 = (l_1, \dots, l_n, \dots)$ – характеристики, то их сумма определяется как характеристика

$$\chi_1 + \chi_2 = (k_1 + l_1, \dots, k_n + l_n, \dots),$$

а их разность при $\chi_1 \geq \chi_2$ определяется как характеристика

$$\chi_1 - \chi_2 = (k_1 - l_1, \dots, k_n - l_n, \dots),$$

где, естественно, ∞ плюс (минус) нечто есть ∞ . Заметим, что для указанных операций над характеристиками в [8] используется мультипликативная запись, для наших исследований удобнее аддитивная запись этих операций. Характеристика χ называется идемпотентной, если $\chi + \chi = \chi$.

Две характеристики $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ и $(l_1, \dots, l_n, \dots)$ называются *эквивалентными*, если неравенство $k_n \neq l_n$ имеет место лишь для конечного числа номеров n и только тогда, когда k_n и l_n конечны. Класс эквивалентности в множестве характеристик называется *типом*. Если $\chi(a)$ принадлежит типу $\mathbf{t}$, то говорят, что элемент a имеет тип $\mathbf{t}$, и пишут $\mathbf{t}(a) = \mathbf{t}$ или $\mathbf{t}_A(a) = \mathbf{t}$, если необходимо указать, что тип элемента a рассматривается в группе A .

Группа без кручения A называется *однородной (типа $\mathbf{t}$)*, если все ее ненулевые элементы имеют один и тот же тип $\mathbf{t}$.

Тип обычно представляется характеристикой, принадлежащей этому типу. Другими словами, пишут

$$\mathbf{t} = (k_1, \dots, k_n, \dots),$$

понимая, что характеристику $(k_1, \dots, k_n, \dots)$ можно заменить на эквивалентную. Для двух типов $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ полагают $\mathbf{t}_1 \leq \mathbf{t}_2$, если существуют две такие характеристики χ_1 и χ_2 , принадлежащие типам $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{t}_2$ соответственно, что $\chi_1 \leq \chi_2$.

Так как сложение характеристик согласовано с отношением эквивалентности в множестве характеристик, то в множестве типов можно ввести, естественным образом, сумму и разность типов, а также понятие идемпотентного типа ($\mathbf{t} = \mathbf{t} + \mathbf{t}$).

Обозначим через Π – множество всех простых чисел, перенумерованных в порядке возрастания. Тип $\mathbf{t}$ называется p_k -делимым ($p_k \in \Pi$), если для всякой характеристики $v \in \mathbf{t}$ имеем $v^{(k)} = \infty$. Заметим, что если A – однородная группа типа $\mathbf{t}$ и тип $\mathbf{t} - p_k$ -делим, то $p_k A = A$.

Пусть $\mathbf{t}$ – некоторый тип. Рассмотрим характеристики v , удовлетворяющие следующим условиям:

- а) $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots) \leq w$ для некоторой $w \in \mathbf{t}$;
- б) $v^{(k)} = \infty$, если тип $\mathbf{t} - p_k$ -делим.

Обозначим множество, состоящее из всех характеристик, удовлетворяющих свойствам а), б), и характеристики, членами которых являются только символы ∞ , через $\mathfrak{F}(\mathbf{t})$.

Пусть A – группа без кручения. Если $v \in \mathfrak{X}$, то обозначим через $A(v)$ следующую подгруппу группы A : $A(v) = \{a \in A \mid \chi(a) \geq v\}$. $A(v)$ – вполне характеристическая подгруппа группы A . Заметим, что если A – редуцированная группа и характеристика v состоит только из символов ∞ , то $A(v) = 0$.

Редуцированная группа A без кручения называется χ -группой, если всякая ее вполне характеристическая подгруппа S имеет вид $S = A(v)$, где v – некоторая характеристика [7]. Редуцированная группа A называется *вполне транзитивной*, если для любых двух ее элементов a и b , для которых $\chi(a) \leq \chi(b)$, существует эндоморфизм φ этой группы, такой, что $\varphi(a) = b$ [10].

Пусть A – однородная χ -группа типа $\mathbf{t}$. В [9] доказано, что любая вполне характеристическая подгруппа S группы A единственным образом представима в виде $S = A(v)$, где v – некоторая характеристика, принадлежащая $\mathfrak{F}(\mathbf{t})$. Заметим, что если $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, где $v = (v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots)$, и $v \leq w$, где $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots) \in \mathbf{t}$, то тип группы $A(v)$ определяется характеристикой

$$w - v = (w^{(1)} - v^{(1)}, w^{(2)} - v^{(2)}, \dots, w^{(n)} - v^{(n)}, \dots).$$

Теорема 5. Однородные χ -группы не являются IF -группами.

Доказательство. Пусть A – однородная χ -группа типа $\mathbf{t}$. Предположим, что A – IF -группа. Тогда существует такая вполне характеристическая подгруппа S группы A , что $S \cong A$ и $S \neq nA$. Имеем $S = A(v)$, где $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$. $A(v)$ – однородная группа. Так как $S \cong A$, то $A(v) \cong A$, и, следовательно, тип группы $A(v)$ совпадает с типом группы A .

Учитывая, что $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, получаем существование такой характеристики $w = (w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(n)}, \dots)$, принадлежащей типу $\mathbf{t}$, такой, что $v \leq w$. Пусть $I(w) = \{i \in \mathbb{N} \mid w^{(i)} \neq 0 \text{ и } w^{(i)} \neq \infty\}$.

Рассмотрим вначале случай, когда тип $\mathbf{t}$ не является идемпотентным. Имеем $I(w)$ – бесконечное множество. Так как $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$, то $v^{(i)} = w^{(i)}$ при $i \in \mathbb{N} \setminus I(w)$. Пусть I' – подмножество множества $I(w)$, состоящее из всех натуральных чисел i , для которых $v^{(i)} \neq 0$. Так как $A(v)$ – собственная подгруппа группы A , то $I' \neq \emptyset$. Имеем $w^{(i)} - v^{(i)} \neq w^{(i)}$ для всякого $i \in I'$. Учитывая, что тип группы $A(v)$ определяется характеристикой $w - v$ и $t(A(v)) = t(A)$, получаем, что I' – конечное множество. Пусть $n = \prod_{i \in I'} p_i^{v^{(i)}}$. Тогда $S = A(v) = nA$. Противоречие.

Пусть теперь тип $\mathbf{t}$ идемпотентен. Тогда множество $I(w)$ конечно. Так как $v \in \mathfrak{F}(\mathbf{t})$ и $v \leq w$, то $v^{(i)} = w^{(i)}$ при $i \in \mathbb{N} \setminus I(w)$. Пусть $I' = \{i \in \mathbb{N} \mid v^{(i)} \neq 0 \text{ и } i \in I(w)\}$. I' является непустым конечным подмножеством множества $I(w)$. Тогда $S = A(v) = nA$, где $n = \prod_{i \in I'} p_i^{v^{(i)}}$. Противоречие. ■

Используя то, что всякая однородная вполне транзитивная группа является χ -группой, и всякая однородная редуцированная сепарабельная группа является вполне транзитивной группой [10], получаем такие результаты.

Следствие 6. Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной вполне транзитивной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n , отличного от единицы.

Следствие 7. Собственная вполне характеристическая подгруппа S однородной редуцированной сепарабельной группы A изоморфна группе A тогда и только тогда, когда $S = nA$ для некоторого натурального числа n , отличного от единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Beaumont R.A., Pierce R.S.* Isomorphic direct summands of abelian groups // *Math. Annalen*, 1964. V. 153. P. 21–37.
2. *Monk G.S.* Abelian p -groups without proper isomorphic pure dense subgroups // *Ill. J. Math.* 1970. V. 14. No. 1. P. 164–177.
3. *Goldsmith B., Óhógáin S., Wallutis S.* Quasi-minimal groups // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2004. V. 132. No. 8. P. 2185–2195.
4. *Савинкова М.М.* U -последовательности и примарные группы, содержащие собственные изоморфные себе вполне характеристические подгруппы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2008. № 2(3). С. 56–60.
5. *Гриншпон С.Я., Никольская М.М.* Примарные IF -группы // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2011. № 3(15). С. 25–31.
6. *Grinshpon S.Ya., Nikolskaya (Savinkova) M.M.* Fully invariant subgroups of Abelian p -groups with finite Ulm-Kaplansky invariants // *Communications in Algebra*. 2011. V. 39. No. 11. P. 4273–4282.
7. *Гриншпон С.Я.* О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // *Абелевы группы и модули*. 1982. С. 56–92.
8. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1. 336 с.
9. *Гриншпон С.Я.* Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // *Фундамент. и прикл. матем.* 2002. Т. 8. № 2. С. 407–473.
10. *Grinshpon S.Ya., Krylov P.A.* Fully invariant subgroups, full transitivity and homomorphism groups of Abelian groups // *J. Math. Sciences*. 2005. V. 128. No. 3. P. 2894–2997.

Статья поступила 28.12.2011 г.

Grinshpon S.Y., Nikolskaya M. M. PROPER FULLY INVARIANT SUBGROUPS OF TORSION FREE GROUPS ISOMORPHIC TO THE GROUP. In this work, we study torsion free groups containing proper fully invariant subgroups isomorphic to the group.

Keywords: Abelian group, IF -group, fully invariant subgroup, torsion free group.

GRINSHPON Samuil Yakovlevich (Tomsk State University)

E-mail: grinshpon@math.tsu.ru

NIKOLSKAYA Maria Mikhailovna (Tomsk State University of Architecture and Building)

E-mail: mary_s83@mail.ru