УДК 515.12

С.П. Гулько, В.Р. Лазарев, Т.Е. Хмылева

О ВЗАИМНОЙ «ОРТОГОНАЛЬНОСТИ» КЛАССОВ ПРОСТРАНСТВ $C_p(X)$ И $L_p(Y)$

В статье доказывается, что для бесконечномерных пространств $C_p(X)$, $L_p(Y)$ или нормированного пространства E никакое из этих трех пространств нельзя линейно гомеоморфно вложить в другое в качестве дополняемого подпространства.

Ключевые слова: *пространство непрерывных функций, линейное гомеоморфное вложение, дополняемое подпространство.*

Для вполне регулярного топологического пространства X символом $C_p(X)$ обозначаем пространство непрерывных функций из X в $\mathbb{R}$ с топологией поточечной сходимости. Через $L_p(X)$ обозначается топологическое сопряжённое к $C_p(X)$, т.е. совокупность всех линейных непрерывных функционалов, также наделенная топологией поточечной сходимости. Известно [1], что сопряженным к $L_p(X)$ является $C_p(X)$. В данной статье мы даем отрицательный ответ на следующие вопросы (в случае бесконечности пространства X):

1. Можно ли пространство вида $C_p(X)$ вложить в $L_p(Y)$ для некоторого Y в качестве дополняемого подпространства?

2. Можно ли пространство вида $L_p(X)$ вложить в $C_p(Y)$для некоторого Y в качестве дополняемого подпространства?

Напомним, что для топологического векторного пространства E подпространство L называется дополняемым, если существует линейная непрерывная проекция E на L.

Очевидна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть X – вполне регулярно и бесконечно. Тогда существует последовательность ненулевых функций e_n, $n \in \mathbb{N}$, в пространстве $C_p(X)$ с дизъюнктными носителями.

Лемма 2. Пусть $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ – линейно независимая система в $L_p(Y)$. Тогда найдётся подсистема $\left\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ и функция $x_0 \in C_p(Y)$, для которой $f_{n_k}(x_0) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Введём вначале некоторые обозначения. Носитель функционала f_n обозначим через A_n. Для $\left\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ обозначим $B_m = \bigcup\left\{A_{n_k} : \ k \le m\right\}$ и $D_m = B_m \setminus B_{m-1}$. Наконец, для конечного множества $F \subset Y$ и точки $y \in F$, пусть $x(y, F) \in C_p(Y, [0,1])$, $x(y, F)(y) = 1$, $x(y, F)(y') = 0$ при всех $y' \in F$, $y' \neq y$.

В силу линейной независимости системы $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, найдётся подсистема $\left\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\right\}$, для которой все разности D_k не пусты. Методом математической индукции построим последовательности функций $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_p(Y)$, $(S_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C_p(Y)$, $S_k = x_1 + \varepsilon_2 \frac{x_2}{2} + \ldots + \varepsilon_k \frac{x_k}{2^{k-1}}$, где все $\varepsilon_k \in \{0,1\}$, со следующими свойствами:

(а) $f_{n_k}(S_k) \neq 0$,

(б) $f_{n_k}(x_m) = 0$ при $m > k$.

Выберем произвольную точку $y_1 \in B_1$ и положим $S_1 = x_1 = x(y_1, B_1)$. Далее, выберем произвольную точку $y_2 \in D_2$ и положим $x_2 = x(y_2, B_2)$, $S_2 = x_1 + \varepsilon_2 \cdot \frac{x_2}{2}$. Здесь $\varepsilon_2 = 0$, если $f_{n_2}(x_1) \neq 0$, и $\varepsilon_2 = 1$, если $f_{n_2}(x_1) = 0$. Тогда $f_{n_1}(x_1) = f_{n_1}(S_1) \neq 0$. Так как $f_{n_2}(x_2) \neq 0$, то, по построению, $f_{n_2}(S_2) \neq 0$. Кроме того, $f_{n_1}(x_2) = 0$. Таким образом, для x_1, x_2, S_1, S_2 выполнены условия (а) и (б).

Предположим, что уже выбраны $x_1, \ldots, x_k$ и построены $S_1, \ldots, S_k$ так, что выполнены условия (а) и (б).

Выберем какую-нибудь точку $y_{k+1} \in D_{k+1}$ и положим $x_{k+1} = x(y_{k+1}, B_{k+1})$, а также $S_{k+1} = S_k + \varepsilon_{k+1} \cdot \frac{x_{k+1}}{2^k}$, где $\varepsilon_{k+1} = 0$, если $f_{n_{k+1}}(S_k) \neq 0$, и $\varepsilon_{k+1} = 1$, если $f_{n_{k+1}}(S_k) = 0$. Тогда получим, что $f_{n_i}(x_{k+1}) = 0$ при $i \leq k$, и $f_{n_{k+1}}(S_{k+1}) \neq 0$. То есть условия (а) и (б) выполнены для $x_1, \ldots, x_{k+1}, S_1, \ldots, S_{k+1}$.

Итак, требуемые последовательности построены.

Положим теперь $x_0 = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon_k \cdot \frac{x_k}{2^{k-1}}$. Очевидно, данный ряд состоит из непрерывных функций и сходится равномерно на Y. Поэтому функция x_0 непрерывна. Заметим, что $x_0 = \lim_{k\to\infty} S_k$.

Пусть теперь $m \in \mathbb{N}$ произвольно, $k > m$. Тогда $f_{n_m}(S_k) = f_{n_m}(S_m)$ в силу условия (б). Так как функционал f_{n_m} непрерывен, то $f_{n_m}(x_0) = \lim_{k\to\infty} f_{n_m}(S_k) = f_{n_m}(S_m) \neq 0$ по пункту (а). ■

Теорема 3. Если X вполне регулярно и бесконечно, то не существует линейной непрерывной инъекции $C_p(X)$ в $L_p(Y)$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует линейная непрерывная инъекция $T : C_p(X) \to L_p(Y)$. Обозначим $f_n = T(e_n)$, где функции e_n имеют дизъюнктные носители, как в лемме 1. Тогда система $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ линейно независима. По лемме 2, выберем в ней подсистему $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, а также функцию $x_0 \in C_p(Y)$, для которой $f_{n_k}(x_0) \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда найдутся скаляры a_k, такие, что $a_k \cdot f_{n_k}(x_0) = 1$ для каждого k. Но тогда последовательность $(a_k e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset C_p(X)$

сходится к нулю, а её образ $\left(a_k f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} \subset L_p(Y)$ при операторе T к нулю не сходится, что противоречит непрерывности отображения T. ■

Следствие 4. Если X вполне регулярно и бесконечно, то пространство $C_p(X)$ нельзя линейно гомеоморфно вложить в $L_p(Y)$ ни для какого пространства Y.

Следствие 5. Если X вполне регулярно и бесконечно, то пространство $L_p(X)$ не является линейно гомеоморфным дополняемому подпространству какого-либо пространства $C_p(Y)$.

Доказательство. Пусть, напротив, $T: L_p(X) \to C_p(Y)$ – линейное гомеоморфное вложение, $P: C_p(Y) \to T\left(L_p(X)\right) \subset C_p(Y)$ – проектор. Тогда композиция $T^{-1} \circ P: C_p(Y) \to L_p(X)$ – линейная непрерывная сюръекция. Тогда, как хорошо известно, сопряжённое отображение $\left(T^{-1} \circ P\right)^* : \left(L_p(X)\right)^* \to \left(C_p(Y)\right)^*$ – линейная непрерывная инъекция. Но $\left(L_p(X)\right)^*$ канонически изоморфно $C_p(X)$, а $\left(C_p(Y)\right)^*$ канонически изоморфно $L_p(Y)$. Получили противоречие с теоремой 3. ■

Хорошо известно, что пространство $L_p(X)$ естественным образом вкладывается линейно гомеоморфно в пространство $C_pC_p(X)$ (см. [1]).

Следствие 6. Для бесконечного вполне регулярного пространства X пространство $L_p(X)$ не дополняемо в пространстве $C_pC_p(X)$.

Для любого X определим следующий естественный линейный непрерывный оператор: $S: L_p(C_p(X)) \to C_p(X)$ по формуле

$$S(a_1 \cdot y_1 + \ldots + a_n \cdot y_n)(x) = a_1 \cdot y_1(x) + \ldots + a_n \cdot y_n(x).$$

«Дуальной формулировкой» следствия 6 является следующее утверждение.

Следствие 7. Не существует линейного непрерывного сечения для оператора S, то есть такого оператора $T: C_p(X) \to L_p(C_p(X))$, что $S \circ T$ является тождественным оператором на $C_p(X)$.

Доказательство. Если $S \circ T$ является тождественным оператором на $C_p(X)$, то оператор T – линейная непрерывная инъекция $C_p(X)$ в $L_p(Y)$ при $Y = C_p(X)$. Это противоречит теореме 3. ■

Для случая банаховых пространств хорошо известна следующая нерешенная проблема: верно ли, что всякое дополняемое подпространство пространства вида $C(K)$ линейно гомеоморфно некоторому пространству $C(L)$? Для случая C_p-теории можно сформулировать аналогичную проблему.

Проблема 1. Верно ли, что дополняемое подпространство в $C_p(X)$ изоморфно некоторому $C_p(Y)$?

Поскольку пространства $C_p(X)$ и $L_p(X)$ взаимно сопряжены друг с другом, то эта проблема является эквивалентной следующей проблеме.

Проблема 2. Верно ли, что дополняемое подпространство в $L_p(X)$ изоморфно некоторому $L_p(Y)$?

Наконец, рассмотрим вопрос об «ортогональности» класса бесконечномерных нормированных пространств и пространств вида $C_p(X)$ или $L_p(X)$.

Ясно, что для бесконечного вполне регулярного пространства X, пространства $C_p(X)$ или $L_p(X)$ не могут быть линейно гомеоморфно вложены ни в какое нормированное пространство. В самом деле, любая окрестность нуля в $C_p(X)$ или $L_p(X)$ содержит нетривиальное одномерное векторное подпространство. С другой стороны, в нормированном пространстве шары не содержат таких подпространств.

Теорема 8. Бесконечномерное нормированное пространство E нельзя линейно гомеоморфно вложить ни в какое $C_p(X)$ или $L_p(X)$.

Доказательство. Любая окрестность нуля в $C_p(X)$ или $L_p(X)$ содержит векторное подпространство конечной коразмерности. Следовательно, E тоже должно иметь такие окрестности, что невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. М.: Изд-во МГУ, 1989.

Статья поступила 25.12.2011 г.

Gul'ko S.P., *Lazarev V.R.*, *Khmyleva T.E.*ON MUTUAL "ORTHOGONALITY" OF CLASSES OF THE SPACES $C_P(X)$ AND $L_P(Y)$. In this article, it is proved that none of the infinite-dimensional spaces $C_p(X)$, $L_p(Y)$, or a normed space E can be embedded as a complementable subspace into another by a linear homeomorphism.

Keywords: space of continuous functions, linear homeomorphic embedding, complementable subspace.

GULKO Sergey Porfiryevich (Tomsk State University)
E-mail: gulko@math.tsu.ru

LAZAREV Vadim Remirovich (Tomsk State University)
E-mail: lazarev@math.tsu.ru

KHMYLEVA Tatyana Evgenievna (Tomsk State University)