

УДК: 517.16; 519.2

В.В. Конев, Е.А. Пчелинцев

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РЕГРЕССИИ С ИМПУЛЬСНЫМИ ШУМАМИ ПО ДИСКРЕТНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ¹

Рассматривается задача оценивания параметров в модели периодической регрессии с непрерывным временем с шумами, описываемыми негауссовским процессом Орнштейна – Уленбека, по наблюдениям в дискретные моменты времени. Предлагаются улучшенные оценки неизвестных параметров регрессии, превосходящие по среднеквадратической точности оценки по методу наименьших квадратов. Получены явные формулы для минимального выигрыша в среднеквадратическом риске. Устанавливается асимптотическая минимаксность оценок при неограниченном росте числа периодов и частоты наблюдений процесса.

Ключевые слова: негауссовская параметрическая регрессия, улучшенное оценивание, метод наименьших квадратов, импульсный шум, процесс Орнштейна – Уленбека, квадратический риск, минимаксность.

1. Введение

Рассмотрим регрессионную модель с непрерывным временем, определяемую стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy_t = \sum_{j=1}^d \theta_j \varphi_j(t) dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ – вектор неизвестных параметров из открытого ограниченного множества $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ (штрих обозначает транспонирование), n – число периодов наблюдения; $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq d}$ – система 1-периодических $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ функций, ортонормированных в пространстве $\mathcal{L}_2[0, 1]$ и удовлетворяющих условию Липшица с постоянной L :

$$|\varphi_j(t) - \varphi_j(s)| \leq L |t - s|. \quad (2)$$

Предположим, что шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ является квадратично интегрируемым семимартингалом с неизвестным условно-гауссовским распределением относительно некоторой σ -алгебры $\mathcal{G}$, таким, что для любой функции $f \in \mathcal{L}_2[0, n]$ определен стохастический интеграл

$$I_n(f) = \int_0^n f_t d\xi_t, \quad (3)$$

обладающий свойствами

$$\mathbf{E}_Q I_n(f) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_Q I_n^2(f) \leq \sigma_Q \int_0^n f_t^2 dt, \quad (4)$$

где $\mathbf{E}_Q$ – усреднение по распределению Q помехи $(\xi_t)_{t \geq 0}$; $\sigma_Q > 0$ – постоянная.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00172-а.

Распределение помехи Q неизвестно и принадлежит некоторому параметрическому классу распределений Q_n^* в пространстве Скорохода $\mathcal{D}[0, n]$.

Предположим, что процесс (1) доступен наблюдению только в дискретные моменты времени

$$t_j = j/p, \quad j = \overline{0, np}, \quad (5)$$

где p – целое положительное число, определяющее частоту наблюдений.

Задача состоит в том, чтобы оценить вектор неизвестных параметров θ по наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ при некоторых общих условиях на функцию условной ковариации $\text{cov}(\xi_t, \xi_s | \mathcal{G})$ шума ξ_t .

Важным примером семимартингального шума $(\xi_t)_{t \geq 0}$ является негауссовский процесс Орнштейна – Уленбека с импульсными возмущениями:

$$d\xi_t = a\xi_t dt + du_t, \quad (6)$$

где $a \leq 0$, $(u_t)_{t \geq 0}$ – однородный процесс Леви

$$u_t = \varrho_1 w_t + \varrho_2 z_t, \quad (7)$$

представляющий собой смесь стандартного броуновского движения $(w_t)_{t \geq 0}$ и составного пуассоновского процесса $(z_t)_{t \geq 0}$, определяемого равенством

$$z_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \quad (8)$$

где $(N_t)_{t \geq 0}$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$, а $(Y_j)_{j \geq 1}$ – последовательность н.о.р. гауссовских случайных величин с параметрами $(0, 1)$. Параметры шума a , ϱ_1 , ϱ_2 и λ неизвестны.

Процесс (6) является квадратично интегрируемым семимартингалом, который имеет условно-гауссовское распределение относительно σ -алгебры $\mathcal{G} = \sigma\{N_t, t \geq 0\}$, порожденной пуассоновским процессом, с нулевым средним и функцией условной ковариации $\text{cov}(\xi_t, \xi_s | \mathcal{G})$, зависящей от мешающих параметров a, ϱ_1, ϱ_2 и λ . Известно [3], что негауссовский процесс Орнштейна – Уленбека (4) успешно используется при моделировании помех с различными структурными зависимостями и существенными отклонениями от гауссовости. Выбор параметров шума дает возможность описывать различные воздействия импульсного типа.

Регрессионная модель (1) применяется при обработке сигналов [2] и описании эволюции стоимостей активов на финансовых рынках с непрерывным временем типа Блэка – Шоулса, допускающих скачкообразные изменения [1, 3].

Задача оптимального оценивания функции регрессии в параметрической модели типа (1), а также в непараметрической постановке подробно исследована в случае белого гауссовского шума ξ_t [2].

Цель работы – построить оценки неизвестных параметров функции регрессии в (1), имеющие более высокую среднеквадратическую точность по сравнению с обычными оценками наименьших квадратов (МНК), а также получить явные формулы для минимального выигрыша в риске.

При выборе оценок функции регрессии по дискретным наблюдениям используется подход, восходящий к работе Джеймса и Стейна [4], в которой установлено, что если в задаче оценивания векторного параметра $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ в регрессионной модели

$$Y = \theta + \xi \quad (9)$$

со стандартным гауссовским шумом $\xi \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ вместо оптимальной несмещенной оценки МНК $\hat{\theta} = Y$ использовать смещенную оценку вида

$$\tilde{\theta} = \left(1 - \frac{c}{\|Y\|^2}\right) Y, \quad (10)$$

то можно подобрать число $c > 0$ так, что среднеквадратический риск оценки

$$R(\tilde{\theta}, \theta) = \mathbf{E}_\theta \|\tilde{\theta} - \theta\|^2, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$$

будет строго меньше, чем оценки МНК $\hat{\theta}$. Оценки типа (10) стали называть улучшенными. В дальнейшем метод построения улучшенных оценок Джеймса – Стейна был развит для общей гауссовской модели (9) с известной [5 – 8] и неизвестной ковариационной матрицей шума [9 – 11]. В [12] были исследованы улучшенные оценки параметров регрессионных моделей с дискретным временем и с шумами, имеющими сферически симметричные распределения.

Рассматриваемая задача построения улучшенных оценок для вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ процесса (1) по дискретным наблюдениям $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ связана, как показано в разделе 2, с оцениванием параметра θ в модели типа (9), в которой, однако, шумы являются только условно-гауссовскими, причем характеристики условного распределения неизвестны. Для такой схемы наблюдений предлагается вместо (10) использовать оценку вида

$$\theta^* = \left(1 - \frac{c}{\|Y\|^2}\right) Y,$$

которая – в отличие от (10) – позволяет построить улучшенную по точности оценку для вектора θ в модели (1) по наблюдениям процесса в дискретные моменты времени (5), а также получить явные формулы для выигрыша в среднеквадратической точности в модели (1) с общим условно-гауссовским шумом (теорема 1) и с негауссовским шумом типа Орнштейна – Уленбека (теорема 2).

В разделе 4 устанавливается асимптотическая минимаксность в смысле робастного риска предложенных оценок при неограниченном росте числа периодов n и частоты p наблюдений процесса (1). В приложении приводятся доказательства некоторых вспомогательных результатов.

2. Выбор оценки. Основные результаты для модели с семимартингальным шумом

В данном разделе задача оценки параметров $(\theta_1, \dots, \theta_d)$ по дискретным наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ в модели (1) с общим семимартингальным шумом, имеющим условно-гауссовское распределение, сводится к оцениванию тех же параметров в схеме регрессии с дискретным временем и условно-гауссовскими шу-

мами. Основная трудность оценивания в результирующей схеме регрессии связана с тем, что шумы в ней имеют смещение, зависящее от частоты наблюдений и неизвестных параметров, а также неизвестную условную ковариационную функцию.

Поскольку распределение шума ξ_t в уравнении (1) неизвестно, для оценивания неизвестных параметров естественно использовать метод наименьших квадратов. В случае, когда процесс (1) допускает непрерывное наблюдение, оценки θ_j МНК по n периодам определяются формулами

$$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_d)', \quad \hat{\theta}_j = \frac{1}{n} \int_0^n \varphi_j(t) dy_t.$$

Оценка МНК вектора $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ по дискретным данным $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ зависит от частоты дискретов p и имеет вид

$$\hat{\theta}_p(n) = (\hat{\theta}_{1,p}(n), \dots, \hat{\theta}_{d,p}(n))', \quad \hat{\theta}_{j,p}(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(t) dy_t, \quad (11)$$

где $\psi_{j,p}(t) = \sum_{k=1}^{np} \varphi_j(t_k) 1_{(t_{k-1}, t_k]}(t)$, т.е.

$$\hat{\theta}_{j,p}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{np} \varphi_j(t_k) \Delta y_{t_k}, \quad j = \overline{1, d}. \quad (12)$$

Используя уравнение (1), находим

$$\Delta y_{t_k} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^d \theta_i \varphi_i(t_k) + h_k(\theta) + \Delta \xi_{t_k}; \quad \Delta \xi_{t_k} = \xi_{t_k} - \xi_{t_{k-1}}, \quad (13)$$

$$h_k(\theta) = \sum_{i=1}^d \theta_i \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varphi_i(u) - \varphi_i(t_k)) du.$$

Подставляя (13) в (12), получаем

$$\hat{\theta}_p(n) = \theta + n^{-1/2} \zeta_p(n), \quad (14)$$

где $\zeta_p(n) = (\zeta_{1,p}(n), \dots, \zeta_{d,p}(n))'$ – вектор шумов с координатами

$$\zeta_{j,p}(n) = n^{1/2} H_{j,p}(\theta) + n^{-1/2} I_n(\psi_{j,p});$$

$$H_{j,p}(\theta) = \sum_{i=1}^d \theta_i \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_i(u) (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(u)) du,$$

а функционал $I_n(f)$ определен в (3). Вектор шумов $\zeta_p(n)$ в уравнении (14), в силу условий на шумовой процесс ξ_t в модели (1), является условно-гауссовским относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ с неизвестным вектором средних значений $H_p(\theta) = (H_{1,p}(\theta), \dots, H_{d,p}(\theta))'$ и неизвестной случайной ковариационной матрицей

$$V_{p,n}(\mathcal{G}) := \text{cov}(\zeta_p(n) | \mathcal{G}). \quad (15)$$

Принимая во внимание, что неизвестный параметр $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)'$ в (1) удовлетворяет уравнению (14), предлагается в качестве его оценки использовать оценку вида

$$\theta_p^*(n) = \left(1 - \frac{c}{\|\hat{\theta}_p(n)\|}\right) \hat{\theta}_p(n), \quad (16)$$

где c – некоторая положительная постоянная [13].

Такой выбор оценки, как показано ниже, дает возможность контролировать среднеквадратическую точность оценивания при определенных условиях на условную ковариационную матрицу шума $\zeta_p(n)$.

Предположим, что:

(C₁) максимальное собственное значение матрицы $\mathbf{E}V_{p,n}(\mathcal{G})$ ограничено сверху, т.е.

$$\lambda_{\max}(\mathbf{E}V_{p,n}(\mathcal{G})) \leq \lambda^*,$$

где λ^* – положительная постоянная;

(C₂) существует положительная постоянная κ , такая, что

$$\text{tr} V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \kappa \quad \text{п.н.}$$

При изучении свойств оценки (16) нам потребуются следующие обозначения

$$\Delta_p(\theta) := R(\theta_p^*(n), \theta) - R(\hat{\theta}_p(n), \theta); \quad (17)$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\alpha + \sqrt{d\lambda^*/n}}, \quad (18)$$

где $\alpha = (1 + Ld/(\sqrt{3}p))\beta$ и $\beta = \sup\{\|\theta\| : \theta \in \Theta\}$.

Нижнюю границу для величины уменьшения среднеквадратического риска $\Delta_p(\theta)$ при переходе от оценки МНК (11) к модификации оценки Джеймса – Стейна (16) дает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть в регрессионной модели (1) семимартингальный шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ удовлетворяет условиям (3), (4), (C₁) и (C₂), $\Theta \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Тогда разность рисков (17) оценки (16) с постоянной $c = c_* := \kappa\gamma_n/n$ и оценки МНК (11) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) \leq -c_*^2 + \frac{2L\beta d}{\sqrt{3}p} c_*.$$

Доказательство. Рассмотрим риск оценки (16):

$$\begin{aligned} R(\theta_p^*(n), \theta) &= \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - \theta\|^2 = \mathbf{E}_\theta \|(\theta_p^*(n) - b) + H_p(\theta)\|^2 = \\ &= \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 + 2\mathbf{E}_\theta (\theta_p^*(n) - b)' H_p(\theta) + \|H_p(\theta)\|^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где $b = (b_1, \dots, b_d)' = \theta + H_p(\theta)$. Первое слагаемое в правой части (19) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 &= \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 \|Y\|^2 + \\ &+ 2 \sum_{j=1}^d \mathbf{E}_\theta [E((g(Y) - 1)Y_j(Y_j - b_j) | \mathcal{G})], \end{aligned} \quad (20)$$

где $g(Y) = 1 - c/\|Y\|$, $Y = \hat{\theta}_p(n)$. Обозначив $f_j(Y) = (g(Y) - 1)Y_j$ и используя ус-

ловную плотность распределения вектора Y относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$

$$p_Y(x | \mathcal{G}) = \frac{n^{d/2} \exp\left(-\frac{n}{2}(x-b)'V_{p,n}^{-1}(\mathcal{G})(x-b)\right)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det V_{p,n}(\mathcal{G})}},$$

имеем $L_j := \mathbf{E}(f_j(Y)(Y_j - b_j) | \mathcal{G}) = \int_{\mathbb{R}^d} f_j(x)(x_j - b_j) p_Y(x | \mathcal{G}) dx$, $j = \overline{1, d}$.

Переходя к новой переменной интегрирования $u = V_{p,n}^{-1/2}(\mathcal{G})(x-b)$ и полагая

$$\tilde{f}_j(u) = f_j(V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G})u + b),$$

$$\begin{aligned} \text{находим } L_j &= \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^{d/2}} \sum_{l=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_j(u) u_l \exp\left(-\frac{n \|u\|^2}{2}\right) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G}), \quad j = \overline{1, d}, \end{aligned}$$

где $\langle A \rangle_{ij}$ обозначает (i, j) -й элемент матрицы A , а X — d -мерный условно-гауссовский относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ вектор с нулевым средним и единичной матрицей условной ковариации. Для вычисления условных математических ожиданий $\mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G})$ нам потребуется следующий результат, непосредственно вытекающий из леммы 2 работы [14].

Лемма 2.1. Пусть X — d -мерный условно-гауссовский относительно σ -алгебры $\mathcal{G}$ вектор с нулевым средним и единичной матрицей условной ковариации. Пусть $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно-дифференцируемая функция и $\mathbf{E}(\|\nabla h(X)\| | \mathcal{G}) < \infty$ п.н., где $\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_d}\right)$. Тогда

$$\mathbf{E}h(X)X = \mathbf{E}\nabla h(X) \quad \text{п.н.}$$

Положим $h(u) = \tilde{f}_j(u)$. Нетрудно проверить (см. приложение), что

$$\mathbf{E}(\|\nabla \tilde{f}_j(X)\| | \mathcal{G}) < \infty \quad \text{п.н.} \quad (21)$$

Применяя лемму 2.1, находим

$$\mathbf{E}(\tilde{f}_j(X) X_l | \mathcal{G}) = \mathbf{E}\left(\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_l}(X) | \mathcal{G}\right) = \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \mathbf{E}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(Y) | \mathcal{G}\right).$$

Поэтому

$$L_j = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \mathbf{E}\left(\frac{\partial f_j}{\partial u_k}(Y) | \mathcal{G}\right), \quad j = \overline{1, d}.$$

Отсюда и из (20) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta \| \theta_p^*(n) - b \|^2 &= \mathbf{E}_\theta \| \hat{\theta}_p(n) - b \|^2 + \mathbf{E}_\theta (g(Y) - 1)^2 \| Y \|^2 \\ &+ \frac{2}{n} \mathbf{E}_\theta \left(\sum_{j=1}^d \sum_{l=1}^d \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{jl} \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \frac{\partial}{\partial u_k} [(g(Y) - 1) Y_j] \right). \end{aligned}$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 = \mathbf{E}_\theta W(Y),$$

где

$$W(z) = c^2 + \frac{2c}{n} \left(\frac{z' V_{p,n}(\mathcal{G}) z}{\|z\|^3} - \frac{\text{tr} V_{p,n}(\mathcal{G})}{\|z\|} \right).$$

Используя оценку $z' A z \leq \lambda_{\max}(A) \|z\|^2$ для положительно определенной матрицы A и условие (C_2) , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 \leq \\ & \leq c^2 - \frac{2c}{n} \mathbf{E}_\theta \frac{\text{tr} V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G}))}{\|Y\|} \leq c^2 - \frac{2\kappa c}{n} \mathbf{E}_\theta \frac{1}{\|Y\|}. \end{aligned}$$

Далее оценим снизу величину $\mathbf{E} \|Y\|^{-1}$.

Лемма 2.2. В условиях теоремы 1

$$\mathbf{E} \|Y\|^{-1} \geq \gamma_n.$$

(Доказательство этой леммы приводится в разделе 5.) Отсюда получаем

$$\mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 - \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 \leq c^2 - 2\kappa \gamma_n c/n =: \phi(c).$$

Минимизируя функцию $\phi(c)$ по c , находим

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - b\|^2 \leq \mathbf{E}_\theta \|\hat{\theta}_p(n) - b\|^2 - c_*^2 = \\ & = R(\hat{\theta}_p(n), \theta) - c_*^2 - 2\mathbf{E}_\theta (\hat{\theta}_p(n) - \theta)' H_p(\theta) + \|H_p(\theta)\|^2. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (19), имеем

$$\Delta_p(\theta) \leq -c_*^2 + 2\mathbf{E}_\theta (\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta). \quad (22)$$

С помощью элементарного неравенства

$$2|ab| \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (23)$$

получаем

$$2\mathbf{E}_\theta (\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta) \leq \varepsilon \mathbf{E}_\theta \|\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n)\|^2 + \frac{\|H_p(\theta)\|^2}{\varepsilon} = \varepsilon c_*^2 + \frac{\|H_p(\theta)\|^2}{\varepsilon}.$$

Далее, применяя неравенство Коши – Буняковского, имеем оценку

$$\begin{aligned} \|H_p(\theta)\|^2 &= \sum_{j=1}^d \left(\sum_{i=1}^d \theta_i \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_i(u) (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(u)) du \right)^2 \leq \\ &\leq \|\theta\|^2 \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \left(\sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_i(u) (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(u)) du \right)^2 \leq \\ &\leq \beta^2 p \sum_{j=1}^d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_i^2(u) du \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(u))^2 du. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условия (2),

$$\|H_p(\theta)\|^2 \leq L^2 \beta^2 p d \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^p \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_i^2(u) du \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - u)^2 du = \frac{(L\beta d)^2}{3p^2}.$$

Поэтому $2\mathbf{E}_\theta(\theta_p^*(n) - \hat{\theta}_p(n))' H_p(\theta) \leq \varepsilon c_*^2 + (L\beta d)^2 / (3p^2 \varepsilon)$.

Выбрав значение ε , минимизирующее правую часть этого неравенства, и используя полученную оценку в (22), приходим к требуемому результату. Теорема доказана. ■

Следствие. В условиях теоремы 1 разность рисков (17) обладает свойствами:

1) если частота наблюдений $p > 2L\beta d / (\sqrt{3}c_*)$, то

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) < 0;$$

2) если условие (C_2) выполнено для достаточно больших p , то

$$\limsup_{p \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) = -c_*^2.$$

3. Случай негауссовского шума Орнштейна – Уленбека

Изучим свойства построенной в разделе 2 процедуры оценивания параметров $\theta_1, \dots, \theta_d$ в случае, когда шум ξ_t в уравнении (1) описывается негауссовским процессом Орнштейна – Уленбека (6), а функции $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ являются тригонометрическими, т.е.

$$\varphi_1 = 1, \varphi_{2j}(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi jt), \varphi_{2j+1}(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi jt), \quad j = 1, 2, \dots, [d/2],$$

где $[b]$ – целая часть числа b .

Предположим, что параметры процесса (6) – (8) удовлетворяют условиям

$$-a_{\max} \leq a \leq 0, \quad \varrho_1 \geq \rho > 0 \quad \text{и} \quad \varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2 \leq \varrho^*, \quad (24)$$

причем $a_{\max}$, ρ и ϱ^* – известны.

Пусть $\tilde{\gamma}_n$ – значение величины γ_n в (18) при $\lambda^* = 3\rho^*$, а

$$\tilde{c} := \kappa \tilde{\gamma}_n / n.$$

Теорема 2. Пусть шум $(\xi_t)_{t \geq 0}$ в уравнении (1) описывается негауссовским процессом Орнштейна – Уленбека (6) – (8), причем выполнены условия (24). Тогда найдутся числа d_0 и p_0 , такие, что для всех $d \geq d_0$ и $p \geq p_0$ оценка (16) при $c = \tilde{c}$ является улучшенной, т.е. разность рисков (17) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) < 0.$$

Доказательство. Чтобы воспользоваться теоремой 1, требуется проверить выполнение условий (C_1) и (C_2) для негауссовского процесса Орнштейна – Уленбека.

Лемма 3.1. В условиях теоремы 2 выполняется условие (C_1) с $\lambda^* = 3\rho^*$.

Доказательство. Из (14) и (15) имеем

$$\langle V_{p,n}(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = n^{-1} \mathbf{E}(I_n(\psi_{i,p}) I_n(\psi_{j,p}) | \mathcal{G}).$$

Отсюда находим

$$\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G})) = \sup_{\|z\|=1} z' \mathbf{E} V_{p,n}(\mathcal{G}) z = \sup_{\|z\|=1} n^{-1} \mathbf{E} I_n^2(g),$$

где $g(t) = \sum_{j=1}^d z_j \psi_{j,p}(t)$, а $I_n(f)$ и $\psi_{j,p}(t)$ определены в (3) и (11) соответственно. Учитывая, что для процесса (6) – (8) выполнено условие (4) с $\sigma_Q = 3\varrho^*$ и ортогональность функций $\psi_{j,p}(t)$ на решетке (5), получаем

$$n^{-1} \mathbf{E} I_n^2(g) \leq 3\varrho^* n^{-1} \int_0^n g^2(t) dt = 3\varrho^* \|z\|^2,$$

т.е. выполнено условие (C₁):

$$\lambda_{\max}(\mathbf{E} V_{p,n}(G)) \leq 3\varrho^*.$$

Лемма 3.1 доказана. ■

Лемма 3.2. В условиях теоремы 2 найдутся d_0 и p_0 , такие, что для всех $d \geq d_0$ и $p \geq p_0$ выполнено условие (C₂) при $\kappa = \rho^2(d/4 - 2)$.

Доказательство. Учитывая независимость процессов $(w_t)_{t \geq 0}$ и $(z_t)_{t \geq 0}$, имеем

$$V_{p,n}(\mathcal{G}) = \varrho_1^2 A_{p,n} + \varrho_2^2 B_{p,n}(\mathcal{G}),$$

где $A_{p,n}$ – матрица с элементами

$$\langle A_{p,n} \rangle_{ij} = n^{-1} \mathbf{E}(I_n^{(1)}(\psi_{i,p}) I_n^{(1)}(\psi_{j,p})); \quad (25)$$

$$I_n^{(1)}(f) = \int_0^n f(t) d\xi_t^{(1)}, \quad d\xi_t^{(1)} = a \xi_t^{(1)} dt + dw_t,$$

а $B_{p,n}(\mathcal{G})$ – матрица с элементами

$$\langle B_n(\mathcal{G}) \rangle_{ij} = \mathbf{E}(I_n^{(2)}(\varphi_i) I_n^{(2)}(\varphi_j) | \mathcal{G});$$

$$I_n^{(2)}(f) = \int_0^n f(t) d\xi_t^{(2)}, \quad d\xi_t^{(2)} = a \xi_t^{(2)} dt + dz_t.$$

Отсюда получаем оценку

$$\text{tr } V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \varrho_1^2 (\text{tr } A_{p,n} - \lambda_{\max}(A_{p,n})) \quad \text{п.н.}, \quad (26)$$

где

$$\lambda_{\max}(A_{p,n}) = \sup_{\|z\|=1} n^{-1} \mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2.$$

Применяя формулу Ито, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2 &= 2a \int_0^n g(t) \mathbf{E} I_t^{(1)}(g) \xi_t^{(1)} dt + \int_0^n g^2(t) dt \\ &= a \int_0^n e^{av} \int_v^n g(t) g(t-v) dt dv + \int_0^n g^2(t) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

Поскольку для всех $a \leq 0$

$$\mathbf{E}(I_n^{(1)}(g))^2 \leq \int_0^n g^2(t) dt \left(1 + |a| \int_0^\infty e^{av} dv \right) = 2 \int_0^n g^2(t) dt = 2n \|z\|^2,$$

то

$$\lambda_{\max}(A_{p,n}) \leq 2. \quad (28)$$

Далее оценим снизу $\text{tr } A_{p,n}$, предполагая, без ограничения общности, что d является нечетным, $d=2N+1$. Используя (25) и (27), получаем

$$\text{tr } A_{p,n} = \sum_{j=1}^d \langle A_{p,n} \rangle_{jj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^d E(I_n^{(1)}(\psi_{j,p}))^2 = d + \sum_{j=1}^d \tau_j(p, n), \quad (29)$$

где
$$\tau_j(p, n) = \frac{a}{n} \int_0^n \psi_{j,p}(s) \int_s^n e^{a(t-s)} \psi_{j,p}(t) dt ds = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^{np} \sum_{l=1}^k \varkappa_{k,l}(j),$$

$$\varkappa_{k,l}(j) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \varphi_j(t_l) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_j(t_k) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds = \varkappa_{k,l}^*(j) + r_{k,l}^{(1)} + r_{k,l}^{(2)} + r_{k,l}^{(3)};$$

$$\varkappa_{k,l}^*(j) = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \varphi_j(s) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_j(t) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds,$$

$$r_{k,l}^{(1)} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\varphi_j(t_l) - \varphi_j(s)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi_j(t) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds,$$

$$r_{k,l}^{(2)} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \varphi_j(s) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(t)) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds$$

и
$$r_{k,l}^{(3)} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} (\varphi_j(t_l) - \varphi_j(s)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\varphi_j(t_k) - \varphi_j(t)) e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds.$$

Поскольку $|r_{k,l}^{(1)}| \leq \frac{2\pi j}{p} \mu_{l,k}$, $|r_{k,l}^{(2)}| \leq \frac{2\pi j}{p} \mu_{l,k}$ и $|r_{k,l}^{(3)}| \leq \frac{2(\pi j)^2}{p^2} \mu_{l,k}$,

где
$$\mu_{l,k} = \int_{t_{l-1}}^{t_l} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{a(t-s)} \chi_{(s \leq t)} dt ds,$$

то
$$\tau_j(p, n) \geq \frac{a}{n} \int_0^n \varphi_j(s) \int_s^n e^{a(t-s)} \varphi_j(t) dt ds + \frac{a}{n} \left(\frac{4\pi j}{p} + \frac{2(\pi j)^2}{p^2} \right) \int_0^n \int_s^n e^{a(t-s)} dt ds.$$

Отсюда и из (29) следует, что

$$\begin{aligned} \text{tr } A_{p,n} &\geq d + \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds \\ &\quad - \left(\frac{1 - e^{an}}{an} + 1 \right) \left(\frac{2\pi d(d+1)}{p} + \frac{\pi^2 d(d+1)(2d+1)}{3p^2} \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где
$$\Phi(t, s) = \sum_{j=1}^d \varphi_j(t) \varphi_j(t-s) = 1 + 2 \sum_{j=1}^N \cos(2\pi js).$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds &= \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \Phi(s) (n-s) ds \\ &\geq a \int_0^n e^{as} |\Phi(s)| ds = a \sum_{j=1}^l \int_{l-1}^l e^{as} |\Phi(s)| ds. \end{aligned} \quad (31)$$

Заметим, что для $l-1 < s < l$

$$\Phi(s) = \frac{\sin(\pi ds)}{\sin(\pi s)}.$$

Пусть $0 < \delta < 1/4$. Тогда для всех интервалов $l-1+\delta \leq s \leq l-\delta$, $l = \overline{1, n}$, справедлива оценка

$$|\sin(\pi s)| = \sin(\pi(s-l+1)) \geq \sin(\delta\pi) \geq 2\sqrt{2}\delta.$$

Поэтому

$$\sup_{l-1+\delta \leq s \leq l-\delta} |\Phi(s)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}\delta}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{l-1}^l e^{as} |\Phi(s)| ds &= \int_{l-1+\delta}^{l-\delta} e^{as} |\Phi(s)| ds + \int_{l-\delta}^l e^{as} |\Phi(s)| ds \\ + \int_{l-1}^{l-1+\delta} e^{as} |\Phi(s)| ds &\leq \frac{1}{2\sqrt{2}\delta} \int_{l-1}^l e^{as} ds + 2d\delta a \frac{1}{1-e^a}, \quad l = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (31), имеем

$$\begin{aligned} \frac{a}{n} \int_0^n e^{as} \int_s^n \Phi(t, s) dt ds &\geq \frac{a}{2\sqrt{2}\delta} \int_0^n e^{as} ds + 2d\delta \frac{a}{1-e^a} \geq \\ &\geq -\frac{1}{2\sqrt{2}\delta} + 2d\delta c', \quad c' = \frac{a_{\max}}{1-e^{-a_{\max}}} \end{aligned}$$

Используя эту оценку в (30) при

$$\delta = \frac{1}{4(1+c')},$$

получаем

$$\text{tr} A_{p,n} \geq \frac{d}{2} - \sqrt{2}(1+c') - (1-c_n'')\pi \frac{d(d+1)(6p+(2d+1)\pi)}{3p^2}, \quad c_n'' = \frac{1-e^{-a_{\max}n}}{a_{\max}n}.$$

Далее, выбирая сначала d' , а затем p' , приходим к оценке

$$\text{tr} A_{p,n} \geq \frac{d}{4} \quad \text{для всех} \quad d \geq d' \quad \text{и} \quad p \geq p'.$$

Отсюда и из неравенств (26) и (28) следует, что при $d_0 = \max(d', 9)$ для процесса (6)–(8) выполнено условие (C₂), т.е.

$$\text{tr} V_{p,n}(\mathcal{G}) - \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \rho^2(d/4 - 2) \quad \text{п.н.}$$

Лемма 3.2 доказана. ■

В силу теоремы 1, для всех $d \geq d_0$ и $p \geq p'$ разность рисков (17) удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\theta \in \Theta} \Delta_p(\theta) \leq -\tilde{c}^2 + \frac{2L\beta d}{\sqrt{3}p} \tilde{c}.$$

Отсюда, полагая $p_0 = \max(p', [2L\beta d/(\sqrt{3}\tilde{c})] + 1)$, приходим к утверждению теоремы 2. ■

4. Минимаксная граница для рисков оценок

В данном разделе для модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна – Уленбека (6) устанавливается асимптотическая минимаксность оценки (16) в смысле робастного риска при неограниченном росте числа периодов наблюдений n и предположении, что частота p зависит от n , причем функция $p = p(n)$ возрастает достаточно быстро с ростом n .

В качестве оценки вектора θ в модели (1) может использоваться произвольная борелевская функция $T_{p,n}$ от наблюдений $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$. Робастный риск оценки $T_{p,n}$ для модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна – Уленбека (6) определим по формуле

$$R^*(T_{p,n}, \theta) := \sup_{Q_n \in Q_n^*} \delta_Q n \mathbf{E}_{\theta, Q_n} \|T_{p,n} - \theta\|^2, \quad (32)$$

где $Q_n^* = Q_n^*(a_{\max}, \rho, \varrho^*)$ – семейство всех распределений Q_n в пространстве Скорохода $D[0, n]$ процесса (6) с параметрами a , ϱ_1 , ϱ_2 и λ , удовлетворяющими неравенствам (24). Нормирующий множитель $\delta_Q n$ выберем из условия, чтобы асимптотический робастный риск оценки МНК (11) по дискретным наблюдениям при заданной функции $p(n)$ равнялся единице, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) = 1.$$

Как будет показано ниже, это требование выполняется, если

$$\delta_Q^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \mathbf{E}_{\theta, Q_n} V_{p,n}(\mathcal{G}).$$

Применяя формулу Ито и равенство (25), получаем

$$\text{tr} \mathbf{E}_{\theta, Q_n} V_{p,n}(\mathcal{G}) = (\varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2) d + \frac{(\varrho_1^2 + \lambda \varrho_2^2) a}{n} \sum_{j=1}^d C_{j,p}(n), \quad (33)$$

где

$$C_{j,p}(n) = \int_0^n e^{at} \psi_{j,p}(t) \left(\int_0^t ch(av) \psi_{j,p}(v) dv \right) dt.$$

Оценку $(\hat{T}_{p,n})_{n \geq 1}$ назовем асимптотически минимаксной в смысле робастного риска (32), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(T_{p,n}, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{T}_{p,n}, \theta). \quad (34)$$

Согласно теореме 2, риск улучшенной оценки (16) при выполнении условий (24) не превосходит риска оценки МНК (11). Поэтому достаточно доказать асимптотическую минимаксность соответствующей оценки МНК $\hat{\theta}_{p(n)}(n)$.

Теорема 3. Пусть распределение помех в модели (1) принадлежит классу $Q_n^* = Q_n^*(a_{\max}, \rho, \varrho^*)$, определенному в (32), и частота наблюдений $p = p(n)$ такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n)/\sqrt{n} = +\infty$. Тогда оценка МНК параметра θ по дискретным наблюдениям (11) является асимптотически минимаксной в смысле робастного риска.

Доказательство. Чтобы доказать асимптотическую минимаксность оценки МНК $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{p(n)}(n)$ в смысле робастного риска, требуется проверить равенство (34). При нахождении нижней границы для асимптотического риска воспользуемся теоремой Гаека для параметрического семейства, обладающего свойством ЛАН (см., например, [2, с. 223]). Рассмотрим частный случай модели (1) – (6) с $a=0$, $\varrho_1 = 1$ и $\varrho_2 = 0$, т.е.

$$dy_t = \sum_{j=1}^d \theta_j \varphi_j(t) dt + dw_t, \quad 0 \leq t \leq n. \quad (35)$$

Этой модели отвечает семейство распределений $(\mathbf{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta)$ процесса $(y_t)_{0 \leq t \leq n}$. Это семейство обладает свойством ЛАН. Действительно, согласно теореме 1, Прил. 2 в [2], плотность меры $\mathbf{P}_\theta^{(n)}$ относительно $\mathbf{P}_{\theta_0}^{(n)}$ имеет вид

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^{(n)}}{d\mathbf{P}_{\theta_0}^{(n)}}(y) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^d (\theta_j - \theta_{0,j}) \int_0^n \varphi_j(t) dw_t - \frac{\|\theta - \theta_0\|^2}{2} n \right\}.$$

Отсюда, полагая $\theta = \theta_0 + u / \sqrt{n}$ для любого $u \in \Theta$, получаем требуемое представление

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta^{(n)}}{d\mathbf{P}_{\theta_0}^{(n)}}(y) = \exp \left\{ u' \Delta_n - \frac{\|u\|^2}{2} \right\}.$$

где $\Delta_n = (\Delta_{1,n}, \dots, \Delta_{d,n})'$, $\Delta_{j,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^n \varphi_j(t) dw_t$ имеют стандартное гауссовское распределение. Из теоремы Гаека вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.1. Пусть $(\mathbf{P}_\theta^{(n)} : \theta \in \Theta)$ – семейство вероятностных мер процесса (35). Тогда для любой последовательности оценок $(T_{p,n})_{n \geq 1}$ минимаксный робастный риск удовлетворяет неравенству

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(T_{p,n}, \theta) \geq 1.$$

Доказательство. Так как распределение броуновского движения $Q_n^0 = Q_n^*(0, \varrho_1, 0, \lambda)$ принадлежит классу Q_n^* , то

$$\inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(T_{p,n}, \theta) = \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} \sup_{Q_n \in Q_n^*} \delta_Q n \mathbf{E}_{\theta, Q_n} \|T_{p,n} - \theta\|^2 \geq \inf_{T_{p,n}} \sup_{\theta \in \Theta} n d^{-1} \mathbf{E}_{\theta, Q_n^0} \|T_{p,n} - \theta\|^2.$$

В правой части неравенства учтено, что согласно (33) $\delta_Q = d^{-1}$. Применяя теорему Гаека с квадратичной функцией потерь $w(x) = \|x\|^2$ (см., например, [2, с. 223]), получаем требуемое неравенство. ■

Следующее утверждение дает верхнюю границу для риска оценки МНК.

Лемма 4.2. В условиях теоремы 3 риск (32) оценки МНК (11) удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\theta \in \Theta} R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) \leq 1.$$

Доказательство. Из (14) с помощью элементарного неравенства (23) получаем

$$\mathbf{E} \|\hat{\theta}_{p(n)}(n) - \theta\|^2 \leq (1 + \varepsilon) \mathbf{E} \|\hat{\theta}_{p(n)}(n) - \theta - H_p(\theta)\|^2 + (1 + \varepsilon^{-1}) \|H_p(\theta)\|^2.$$

Отсюда и из (32) следует, что

$$R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{Q \in Q_n^*} \delta_Q n \mathbf{E}_{\theta, Q} \|\hat{\theta}_p(n) - \theta - H_p(\theta)\|^2 + (L\beta d)^2 (1 + \varepsilon^{-1}) \frac{n}{3p^2} \sup_{Q \in Q_n^*} \delta_Q.$$

Устремляя $n \rightarrow \infty$ и учитывая, что $n/p^2 \rightarrow 0$, приходим к неравенству

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R^*(\hat{\theta}_p(n), \theta) \leq 1 + \varepsilon,$$

из которого, в силу произвольности ε , следует утверждение леммы 4.2. ■

Из Лемм 4.1 – 4.2 приходим к утверждению теоремы 3. ■

Следствие. При выполнении условий теорем 2 и 3 предлагаемая оценка (16) параметра θ в модели (1) с негауссовским шумом Орнштейна – Уленбека, построенная по дискретным наблюдениям процесса $(y_{t_j})_{0 \leq j \leq np}$ является асимптотически минимаксной в смысле робастного риска.

5. Приложение

5.1. Проверка условия (21)

Из (20) имеем

$$\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_l}(X) = \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \frac{\partial f_j}{\partial u_k}(Y) = -c \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \left(\frac{\delta_{jk}}{\|Y\|} - \frac{Y_j Y_k}{\|Y\|^3} \right),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера. Отсюда

$$\left| \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_l}(X) \right| \leq \frac{|T(\mathcal{G})|}{\|Y\|}, \quad T(\mathcal{G}) = 2c \sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl}.$$

Заметим, что

$$T^2(\mathcal{G}) = 4c^2 \left(\sum_{k=1}^d \langle V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G}) \rangle_{kl} \right)^2 \leq 4c^2 d \operatorname{tr} V_{p,n}(\mathcal{G}) \leq 4c^2 d^2 \lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G})),$$

т.е. $|T(\mathcal{G})| \leq 2cd \sqrt{\lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G}))} < \infty$. Далее оценим

$$\mathbf{E}(\|Y\|^{-1} | \mathcal{G}) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\|Y\|^{-1} > u | \mathcal{G}) du = \int_0^\infty \mathbf{P}(\|b + V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G})X\| < u^{-1} | \mathcal{G}) du.$$

Применяя лемму Андерсона (см. [2, гл. II, § 10]), получаем оценку

$$\mathbf{E}(\|Y\|^{-1} | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E}(\|V_{p,n}^{1/2}(\mathcal{G})X\|^{-1} | \mathcal{G}) \leq \mathbf{E} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(V_{p,n}(\mathcal{G}))} \|X\|} | \mathcal{G} \right).$$

Поскольку матрица $V_{p,n}(\mathcal{G})$ является положительно определенной, существует $\lambda_* > 0$, такое, что $\lambda_{\min}(V_{p,n}(\mathcal{G})) \geq \lambda_*$ п.н. Поэтому

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\|Y\|}|\mathcal{G}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_*}} \mathbf{E}\left(\frac{1}{\|X\|}|\mathcal{G}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_*}(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-\|u\|^2/2}}{\|u\|} du = \frac{\Gamma((d-1)/2)}{\sqrt{2\lambda_*}\Gamma(d/2)}.$$

Таким образом, $\mathbf{E}(\|Y\|^{-1}|\mathcal{G}) < \infty$ п.н. и, следовательно, выполняется условие (21), а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|\nabla \tilde{f}_j(X)\||\mathcal{G}) &\leq \sum_{l=1}^d \mathbf{E}\left(\left|\frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial u_l}(X)\right||\mathcal{G}\right) \leq \\ &\leq 2cd^2 \sqrt{\lambda_{\max}(V_{p,n}(\mathcal{G}))} \frac{\Gamma((d-1)/2)}{\sqrt{2\lambda_*}\Gamma(d/2)} < \infty \quad \text{п.н.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.2. Доказательство леммы 2.2

Рассмотрим

$$\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} = \mathbf{E}_\theta \|\theta + n^{-1/2}\zeta_p(n)\|^{-1} = \mathbf{E}_\theta (\|\theta + H_p(\theta) + n^{-1/2}\eta_p(n)\|)^{-1},$$

где $Y := \hat{\theta}_p(n)$, $\eta_p(n) := n^{-1/2}(I_n(\psi_{1,p}), \dots, I_n(\psi_{d,p}))'$. Применяя неравенство треугольника и оценку $\|H_p(\theta)\| < L\beta d/(\sqrt{3}p)$, имеем

$$\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} \geq \mathbf{E}_\theta (\alpha + n^{-1/2} \|I_n(\psi_p)\|)^{-1},$$

где $\alpha = (1 + Ld/(\sqrt{3}p))\beta$. Отсюда, используя неравенства Йенсена, Коши – Буняковского и условие (C_1) , следует, что

$$\mathbf{E}_\theta \|Y\|^{-1} \geq \gamma_n.$$

Лемма 2.2 доказана. $\blacksquare$

ЛИТЕРАТУРА

1. Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. Non-Gaussian Ornstein – Uhlenbeck – based models and some of their uses in financial mathematics // J. Royal Stat. Soc. 2001. No. 63. P. 167–241.
2. Ибрагимов И.А., Хасъминский Р.З. Асимптотическая теория оценивания. М.: Наука, 1979. 528 с.
3. Delong L., Klüppelberg C. Optimal investment and consumption in a Black – Scholes market with Lévy driven stochastic coefficients // Annals of Applied Probability. 2008. No. 18(3). P. 879–908.
4. James W., Stein Ch. Estimation with quadratic loss // Proc. of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematics Statistics and Probability. V. 1. Berkeley: University of California Press, 1961. P. 361–380.
5. Baranchik A. A family of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. 1970. No. 41. P. 642–645.
6. Efron B., Morris C. Families of minimax estimators of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. 1976. No. 4. P. 11–21.
7. Lehmann E.L., Casella G. Theory of Point Estimation. 2nd edition. New York: Springer-Verlag Inc., 1998. 617 p.
8. Закс Ш. (Zacks S.) Теория статистических выводов. М.: Мир, 1975. 776 с.
9. Berger J.O., Bock M.E., Brown L.D., et al. Minimax estimation of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Ann. Statist. 1977. No. 5. P. 763–771.

10. Berger J.O., Haff L.R. A class of minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Statist. Decisions. 1983. № 1. P. 105–129.
11. Gleser L.J. Minimax estimators of a normal mean vector for arbitrary quadratic loss and unknown covariance matrix // Ann. Statist. 1986. No. 14. P. 1625–1633.
12. Fourdrinier D. Statistique Inférentielle. Dunod, 2002. 336 p.
13. Пчелинцев Е.А. Процедура Джеймса – Стейна для условно-гауссовской регрессии // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 4(16). С. 6–17.
14. Stein Ch. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution // Ann. Statist. 1981. No. 9(6). P. 1135–1151.

Статья поступила 31.01.2012 г.

Konev V.V., Pchelintsev E.A. ESTIMATION OF THE PARAMETRIC REGRESSION WITH A PULSE NOISE BY DISCRETE TIME OBSERVATIONS. The paper considers the problem of parametric estimation in a continuous time linear parametric regression model with a non-Gaussian Ornstein – Uhlenbeck process by discrete time observations. Improved estimates with smaller mean square risk as compared with the ordinary least square estimates are proposed for the unknown regression parameters. The asymptotic minimaxity of these estimates in the sense of the robust risk has been proved.

Keywords: non-Gaussian parametric regression, improved estimation, least square estimates, pulse noise, Ornstein – Uhlenbeck process, quadratic risk, minimaxity.

KONEV Victor Vasil'evich (Tomsk State University)

E-mail: vvkonev@mail.tsu.ru

PCHELINTSEV Evgeny Anatol'evich (Tomsk State University, Université de Rouen (France))

E-mail: evgen-pch@yandex.ru