

УДК 517.982.272+515.122.55

А.В. Осипов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Изучаются свойства семейства λ , при которых множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из тихоновского пространства X в метризуемое ТВП Y , наделенное множественно-открытой (слабо множественно-открытой) топологией, будет топологической группой (ТВП).

Ключевые слова: *множественно-открытая топология; слабо множественно-открытая топология; топологическая группа; C -компактное подмножество; паратопологическая группа*

Пусть X и Y – тихоновские топологические пространства. На множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных функций рассмотрим множественно-открытую и слабо множественно-открытую топологию. Если на топологическом пространстве Y задана некоторая алгебраическая структура, например Y – топологическая группа или топологическое векторное пространство (ТВП), то на множестве $C(X, Y)$ можно определить (поточечные) операции, которые определены на Y .

Основной вопрос исследования: при каких условиях на семейство λ пространство $C_\lambda(X, Y)$ будет паратопологической группой (топологической группой, ТВП), если пространство Y метризуемое ТВП?

Напомним определение множественно-открытой и слабо множественно-открытой топологии на множестве $C(X, Y)$. Пусть λ – семейство непустых подмножеств пространства X . Множественно-открытая (слабо множественно-открытая) топология на множестве $C(X, Y)$ определяется предбазой, состоящей из всех множеств вида

$$[F, U] = \{f \in C(X, Y) : f(F) \subseteq U\}$$

$$([F, U])^* = \{f \in C(X, Y) : \overline{f(F)} \subseteq U\},$$

где $F \in \lambda$ и U – открытое множество пространства Y . Множество $C(X, Y)$, наделенное множественно-открытой топологией и слабо множественно-открытой топологией, будем обозначать через $C_\lambda(X, Y)$ и $C_\lambda^*(X, Y)$ соответственно.

На семейство λ будем накладывать ограничение быть π -сетью для пространства X . Заметим, что это ограничение естественное, так как пространство $C_\lambda(X, Y)$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда λ – π -сеть.

Подмножество A пространства X будем называть Y -компактным, если $f(A)$ компактно для всех $f \in C(X, Y)$. Отметим, что если Y – числовая прямая $\mathbb{R}$, то Y -компактное подмножество называют C -компактным (иногда $\mathbb{R}$ -компактным) подмножеством пространства X .

Будем называть семейство λ – Y -компактным (ограниченным), если всякое $F \in \lambda$ является Y -компактным (ограниченным). Через $S_\varepsilon(a)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке a и радиусом ε .

1. Множественно-открытая топология.

В [1] М.О. Асановым были доказаны два утверждения при условии, что λ – сеть пространства X .

Утверждение 1. Пусть Y – топологическая группа (ТВП) и λ – Y -компактно. Тогда $C_\lambda(X, Y)$ – топологическая группа (ТВП).

Утверждение 2. Пусть Y – ТВП над полем D и $C_\lambda(X, Y)$ – ТВП над тем же полем D относительно естественных операций. Тогда для любых $F \in \lambda$ и $f \in C_\lambda(X, Y)$ множество $f(F)$ замкнуто и ограничено в пространстве Y .

Далее в работе пространство Y полагаем метризуемым ТВП и семейство λ – π -сеть пространства X .

Пусть дано семейство λ непустых подмножеств пространства X , тогда $\lambda(C) = \{A \in \lambda : \text{для любого } C\text{-компактного подмножества } B \text{ пространства } X, \text{ такого, что } B \subseteq A, \text{ множество } [B, U] \text{ открыто в } C_\lambda(X, Y) \text{ для любого открытого множества } U \text{ пространства } Y\}$.

Теорема 1. Пусть семейство λ – C -компактно и $\lambda = \lambda(C)$. Тогда пространство $C_\lambda(X, Y)$ – ТВП.

Доказательство. Отметим, что по теореме 4.4 из [3] следует, что множественно-открытая топология на $C(X, Y)$ будет совпадать с топологией равномерной сходимости на семействе λ .

Покажем непрерывность сдвигов. Пусть $f \in C_\lambda(X, Y)$ и $[F, U]$ – произвольная предбазисная окрестность функции f . Отметим, что $f(F)$ – C -компактное подмножество метризуемого пространства Y , значит, является компактом. Компакт $f(F)$ содержится в открытом множестве U , следовательно, найдется конечный набор $V_1, \dots, V_n$ – окрестностей нуля пространства Y и точки $y_1, \dots, y_n \in f(F)$, такие, что $f(F) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (y_i + V_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (y_i + V_i + V_i) \subseteq U$. Пусть $V = \bigcap_{i=1}^n V_i$, тогда множество $[F, V]$ – окрестность нуля пространства $C_\lambda(X, Y)$. Эта окрестность искомая, то есть $f + [F, V] \subseteq [F, U]$. Действительно, пусть $g \in [F, V]$ и $x \in F$. Так как $f(x) \in \bigcup_{i=1}^n (y_i + V_i)$, то найдется $i \leq n$, такое, что $f(x) \in y_i + V_i$. Так как $g(x) \in V \subseteq V_i$, то получаем $f(x) + g(x) \in y_i + V_i + V_i \subseteq U$. Следовательно, $f + g \in [F, U]$.

Докажем непрерывность умножения на скаляр. Пусть $f, g \in C_\lambda(X, Y)$, α – скаляр и $\alpha f = g$. Пусть $[F, U]$ – произвольная предбазисная окрестность точки g в пространстве $C_\lambda(X, Y)$. Для каждой точки $x \in F$ зафиксируем окрестность $O_x(\alpha)$ точки α и V_x – окрестность нуля в пространстве Y с условием: для всякого $\beta \in O_x(\alpha)$ и любого $z \in V_x$ выполняется $\beta(f(x) + z) \in U$. Так подобрать окрестности $O_x(\alpha)$ и V_x можно, так как Y является ТВП и $g(x) \in U$. Семейство $\mu = \{f(x) + V_x : x \in F\}$ покрывает $f(F)$; найдем конечное подсемейство $\{f(x_i) + V_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$ семейства μ , покрывающее $f(F)$. Множества $O_\alpha = \bigcap_{i=1}^n O_{x_i}(\alpha)$ и $O(f) = [F, \bigcup_{i=1}^n (f(x_i) + V_{x_i})]$ будут искомыми окрестностями точек α и f соответственно. Действительно, пусть $\beta \in O_\alpha$, $h \in O(f)$ и $x \in F$. Найдем i , такое, что $h(x) \in f(x_i) + V_{x_i}$. Пусть $p = h(x) - f(x_i)$. Так как $p \in V_{x_i}$ и $\beta \in O_\alpha \subseteq O_{x_i}(\alpha)$, то по построению $\beta(p + f(x_i)) \in U$, то есть, $\beta h(x) \in U$ для всех $x \in F$. Отсюда следует, что $\beta h \in [F, U]$ и, таким образом, $C_\lambda(X, Y)$ является ТВП. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть λ – ограничено. Тогда $C_{\lambda^*}(X, Y)$ является ТВП.

Доказательство. Достаточно заметить, что множество $\overline{f(A)}$ является компактным для любого $A \in \lambda$ и $f \in C(X, Y)$. Действительно, образ любого ограниченного множества A будет являться ограниченным множеством $f(A)$. Замыкание любого ограниченного множества в метризуемом (субметризуемом) пространстве является метризуемым компактом (теорема 1 в [4]). Далее применяем схему доказательства теоремы 1.

Напомним, что топологическое пространство с непрерывной операцией сложения называется паратопологической группой. Ясно, что любая топологическая группа является паратопологической группой. Прямая Зоргенфрея – пример паратопологической группы, которая не является топологической.

Теорема 3. Пусть $C_{\lambda}(X, Y)$ – паратопологическая группа. Тогда семейство λ состоит из C -компактных подмножеств.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует $A \in \lambda$, которое не является C -компактным.

Тогда существует $f \in C(X)$, такое, что $f(A)$ – не компакт. Мы можем полагать, что $f(A)$ не замкнуто. Действительно, если $f(A)$ замкнуто и неограниченное в $\mathbb{R}$, то множество $h(f(A))$ не является замкнутым при $h(t) = \arctg(t)$.

Пусть φ – изоморфное вложение $\mathbb{R}$ в Y , определяемое как $\varphi(t) = t * y_0$, где y_0 – фиксированная точка из пространства Y . Заметим, что $\varphi(f(A))$ не замкнуто в Y .

Пусть точка $a \in \overline{\varphi(f(A))} \setminus \varphi(f(A))$ и $[A, Y \setminus \{a\}]$ – открытое множество пространства $C_{\lambda}(X, Y)$, содержащее точку $\varphi \circ f \in C_{\lambda}(X, Y)$. Пусть 0_Y – функция, тождественно на X равная нулю пространства Y . Так как $C_{\lambda}(X, Y)$ топологическая группа, существует окрестность $[B, S_{\varepsilon}(0)]$ точки 0_Y , такая, что $\varphi \circ f + [B, S_{\varepsilon}(0)] \subseteq [A, Y \setminus \{a\}]$. Выберем точку $x_0 \in A$, так чтобы $\varphi \circ f(x_0) \in S_{\varepsilon}(a)$. Пусть $g = a - \varphi \circ f(x_0)$ – функция, тождественная на X . Очевидно, что $g \in C(X, Y)$ и $g \in [B, S_{\varepsilon}(0)]$. Однако $\varphi \circ f + g \notin [A, Y \setminus \{a\}]$. Действительно, $(\varphi \circ f + g)(x_0) = \varphi \circ f(x_0) + g(x_0) = a \notin Y \setminus \{a\}$. Это противоречит нашему предположению, что $\varphi \circ f + [B, S_{\varepsilon}(0)] \subseteq [A, Y \setminus \{a\}]$. Теорема доказана.

Пусть дано семейство λ непустых подмножеств пространства X , тогда $\lambda(C) = \{A \in \lambda : \text{для любого } C\text{-компактного подмножества } B \text{ пространства } X, \text{ такого, что } B \subseteq A, \text{ множество } [B, U] \text{ открыто в } C_{\lambda}(X, Y) \text{ для любого открытого множества } U \text{ пространства } Y\}$.

Теорема 4. Пусть $C_{\lambda}(X, Y)$ паратопологическая группа. Тогда $\lambda = \lambda(C)$.

Доказательство. Предположим, что $A \in \lambda$ и B – C -компактное подмножество пространства X , такое, что $B \subseteq A$. Докажем, что $[B, U]$ – открытое множество в $C_{\lambda}(X, Y)$ для любого открытого множества U пространства Y . Пусть $h \in [B, U]$. Множество $h(B)$ – компактное множество. Это следует из того, что непрерывный образ C -компактного множества является C -компактным множеством, и в метризуемом пространстве C -компактные множества являются компактными (теорема 1 в [4]). Так как $h(B) \subset U$, то существует $S_{\varepsilon}(h(B)) = \{y \in Y : \rho(y, h(B)) < \varepsilon\}$, такое, что $S_{\varepsilon}(h(B)) \subset U$. Множество $W = h + [A, S_{\varepsilon}(0)]$ – открытое множество в $C_{\lambda}(X, Y)$. Осталось доказать, что $W \subseteq [B, U]$. Действительно, пусть $g \in W$ и пусть $x \in B$, тогда $\rho(g(x), h(x)) = \rho(h(x) + f(x), h(x)) < \varepsilon$, где $f \in [A, S_{\varepsilon}(0)]$. Отсюда следует, что $g(x) \in U$ и $W \subseteq [B, U]$. Теорема доказана.

Так как пространство Y метризуемое, то на множестве $C(X, Y)$ можно рассмотреть топологию равномерной сходимости на семействе подмножеств λ .

Топология равномерной сходимости на пространстве X определяется базой в точке $f \in C(X, Y)$. Эта база состоит из множеств $\{g \in C(X, Y) : \rho(g(x), f(x)) < \varepsilon, x \in X\}$, где ρ – метрика на пространстве Y . Топология равномерной сходимости на семействе λ является естественным обобщением топологии равномерной сходимости на пространстве X . Все множества вида $\langle f, F, \varepsilon \rangle = \{g \in C(X, Y) : \rho(g(x), f(x)) < \varepsilon, x \in F\}$, где $F \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$, образуют базу в точке $f \in C(X, Y)$. Множество $C(X, Y)$ наделенное топологией равномерной сходимости на семействе λ , будем обозначать как $C_{\lambda, u}(X, Y)$.

Равенство $C_\lambda(X, Y) = C_{\lambda, u}(X, Y)$ подразумевает совпадение множественно-открытой топологии и топологии равномерной сходимости на семействе λ .

Теорема 5. Для тихоновского пространства X и метризуемого ТВП Y следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $C_\lambda(X, Y) = C_{\lambda, u}(X, Y)$;
- 2) $C_\lambda(X, Y)$ – паратопологическая группа;
- 3) $C_\lambda(X, Y)$ – топологическая группа;
- 4) $C_\lambda(X, Y)$ – ТВП;
- 5) семейство λ состоит из C -компактных подмножеств пространства X и $\lambda = \lambda(C)$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (4) следует из теорем 4.1 – 4.4 в [3]. Из (4) $\Rightarrow$ (3) по теореме 1.

Из (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) по определению. (2) $\Rightarrow$ (5) следует из Теорем 3 и 4. Теорема доказана.

Если $Y = \mathbb{R}$, то справедливо

Следствие 6. Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны :

- 1) $C_\lambda(X) = C_{\lambda, u}(X)$;
- 2) $C_\lambda(X)$ – паратопологическая группа;
- 3) $C_\lambda(X)$ – топологическая группа;
- 4) $C_\lambda(X)$ – ТВП;
- 5) $C_\lambda(X)$ – локально выпуклое ТВП;
- 6) семейство λ состоит из C -компактных подмножеств пространства X и $\lambda = \lambda(C)$.

Доказательство. Достаточно проверить (6) $\Rightarrow$ (5). Для каждого $A \in \lambda$ определим полунорму p_A на пространстве $C(X)$: $p_A(f) = \sup\{|f(x)| : x \in A\}$. Тогда для любого $A \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$ пусть $V_{A, \varepsilon} = \{f \in C(X) : p_A(f) < \varepsilon\}$.

Пусть $\xi = \{V_{A, \varepsilon} : A \in \lambda, \varepsilon > 0\}$. Тогда для каждой точки $f \in C(X)$ семейство $f + \xi = \{f + V : V \in \xi\}$ является базой в точке f . Так как топология порождается семейством полунорм, то она является локально выпуклой. Следовательно, пространство $C_\lambda(X)$ – локально выпуклое ТВП.

2. Слабо множественно-открытая топология.

Подмножество A пространства X называют ограниченным, если $f(A)$ – ограниченное множество для всех $f \in C(X)$. Заметим, что любое C -компактное подмножество является ограниченным, но не наоборот. Простой пример ограниченного, но не C -компактного подмножества можно привести на числовой прямой $\mathbb{R}$, положив в качестве подмножества A произвольный ограниченный интервал (α, β) .

Заметим, что слабо множественно-открытая топология на семействе λ совпадает со слабо множественно-открытой топологией на семействе $\bar{\lambda} = \{\bar{A} : A \in \lambda\}$.

Действительно, для любых $f \in C(X, Y)$ и $A \in \lambda$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ и, следовательно, $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\bar{A})}$. Таким образом, далее семейство λ полагаем состоящим из замкнутых подмножеств пространства X .

Пусть дано семейство λ непустых подмножеств пространства X , тогда $\lambda(B) = \{A \in \lambda : \text{для любого ограниченного подмножества } B \text{ пространства } X, \text{ такого, что } B \subseteq A, \text{ множество } [B, U]^* \text{ открыто в } C_\lambda(X, Y) \text{ для любого открытого множества } U \text{ пространства } Y\}$.

Теорема 7. Пусть $C_\lambda(X, Y)$ – паратопологическая группа. Тогда семейство λ состоит из ограниченных подмножеств пространства X .

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует неограниченное множество $A \in \lambda$. Тогда существует $f \in C(X)$, такое, что $f(A)$ – неограниченное множество.

Пусть φ – изометрическое вложение $\mathbb{R}$ в пространство Y , определенное правилом $\varphi = t^*y_0$, где точка $y_0 \in Y$ так, что $0 < \rho(0, y_0) < 1$ (где ρ – инвариантная метрика на Y).

Предположим, что для каждого $a \in \mathbb{R}$ луч $[a, +\infty) \not\subseteq \overline{f(A)}$ (доказательство для луча $(-\infty, a]$ аналогично). Тогда существует система дизъюнктивных открытых интервалов $\{(c_i, b_i)\}$, такая, что $(c_i, b_i) \cap \overline{f(A)} = \emptyset$ для каждого $i \in \mathbb{N}$, и последовательности $\{c_i\}$ и $\{b_i\}$ стремятся к $+\infty$.

Получаем, что $\overline{f(A)} \subseteq \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n (c_i, b_i)$. Пусть $h \in C(\mathbb{R})$ такая, что $h(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n (c_i, b_i)) = \mathbb{N}$. Рассмотрим композицию $g = \varphi \circ h \circ f$ и окрестность $[A, W]^*$ функции g в слабо множественно-открытой топологии $C_\lambda(X, Y)$, где $W = \bigcup_i S_{1/i}(a_i)$.

Так как $C_\lambda(X, Y)$ – паратопологическая группа, то существует окрестность $[B, S_\varepsilon(0)]^*$ нуля пространства $C_\lambda(X, Y)$, такая, что $g + [B, S_\varepsilon(0)]^* \subseteq [A, W]^*$.

Заметим, что $A \subseteq B$. Действительно, если существует точка $z \in A \setminus B$, тогда существует функция $p \in C(X, Y)$, такая, что $p|_B = g|_B$ и $p(z) \notin W$. Получаем, что $p \in g + [B, S]^*$, но $p \notin [A, W]^*$.

Рассмотрим функцию $q(x) = \varphi(h(f(x)) + d)$, где d такое, что $\rho(d^*y_0, 0) < \varepsilon$ и $0 < d < 1$.

Так как $\rho(q(x), g(x)) = \rho(h(f(x)) + d)^*y_0$, $h(f(x))^*y_0 = \rho(d^*y_0, 0) < \varepsilon$, функция $q \in g + [B, S]^*$. Заметим, что $g(A) \subseteq \bigcup_i \{a_i\}$ и $q(A) \subseteq \bigcup_i (a_i + d^*y_0)$, тогда существует j , такое, что $1/j < \min\{\rho(a_j, a_j + d^*y_0), \rho(a_{j+1}, a_{j+1} + d^*y_0)\}$. Следовательно, существует $x_0 \in A$, такое, что $q(x_0) = a_k + d^*y_0$ для некоторого $k > j$. Таким образом, $q(x_0) \notin W$ и $q \notin [A, W]^*$. Получили противоречие с предположением, что $[a, +\infty) \not\subseteq \overline{f(A)}$ для любого $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, существует $b \in \mathbb{R}$, такое, что $[b, +\infty) \subseteq \overline{f(A)}$.

Предположим, что $\varphi \circ f \in [A, U]^*$, где U – открытое множество, содержащее $\overline{\varphi(f(A))}$. Тогда $[b, +\infty)^*y_0 \subseteq U$. Так как $C_\lambda(X, Y)$ – топологическая группа, то су-

существует окрестность $[D, S_\varepsilon(0)]^*$ нуля пространства $C_{\lambda^*}(X, Y)$, такая, что $\varphi \circ f + [D, S_\varepsilon(0)]^* \subseteq [A, U]^*$. Функция $\varphi \circ f$ имеет базисную окрестность в слабо множественно-открытой топологии $\bigcap_{i=1}^n [A_i, W_i]^*$, такую, что

$$\bigcap_{i=1}^n [A_i, W_i]^* \subseteq \varphi \circ f + [D, S_\varepsilon(0)]^*.$$

Заметим, что $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i$ и $A \subseteq D$ (доказывается аналогично доказанному отношению $A \subseteq B$).

По доказанному выше, множество $\overline{f(A_i)}$ либо ограничено сверху числом l_i , либо содержит луч $[b_i, +\infty)$.

Пусть $m = \max_i \{l_i, b_i\}$ и пусть точка $y \in [m, +\infty)^* y_0$ такая, что $\rho(\varphi(m), y) > \varepsilon$. Множество $f^{-1} \circ \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y))$ является функционально открытым, следовательно, существует неотрицательная функция $v \in C(X)$, такая, что $v(x) = 0$ для всех точек $x \notin f^{-1} \circ \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y))$ и $v(a) > \sup \{\varphi^{-1}(S_\varepsilon(y))\}$ для некоторой точки $a \in f^{-1} \circ \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y)) \cap A$. Функция $\varphi(f+v) \in C(X, Y)$ не принадлежит $\varphi \circ f + [D, S]^*$.

Действительно, для точки $a \in A \subseteq D$ выполняется:

$$\rho(\varphi(f(a)), \varphi(f+v)(a)) = \rho(\varphi(f(a)), \varphi(f(a)) + \varphi(v(a))) = \rho(0, \varphi(v(a))) > \varepsilon.$$

Заметим, что $\varphi(f+v) \in \bigcap_{i=1}^n [A_i, W_i]^*$. Пусть $x \in A_i$, тогда если $x \notin f^{-1} \circ \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y))$, то

$$\varphi(f+v)(x) = \varphi(f(x)) \in W_i,$$

и, если $x \in f^{-1} \circ \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y))$, тогда

$$f(x) \in \varphi^{-1}(S_\varepsilon(y)) \subseteq [m, +\infty) \subseteq f(A_i), (f+v)(x) = f(x) + v(x) \in [m, +\infty)$$

и

$$\varphi(f+v)(x) \subseteq \varphi(f(A_i)) \subseteq W_i.$$

Так как $\bigcap_{i=1}^n [A_i, W_i]^* \subseteq \varphi \circ f + [D, S]^*$, то получаем противоречие. Таким образом, множество $f(A)$ является ограниченным для любого $A \in \lambda$ и $f \in C(X)$. Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть $C_{\lambda^*}(X, Y)$ – паратопологическая группа. Тогда $\lambda = \lambda(B)$.

Доказательство. По теореме 7 семейство λ состоит из ограниченных подмножеств.

Пусть $A \in \lambda$ и $B \subseteq A$. Докажем, что $[B, U]^*$ – открытое множество в пространстве $C_{\lambda^*}(X, Y)$ для каждого открытого множества U числовой прямой $\mathbb{R}$. Пусть $f \in [B, U]^*$.

Так как A – ограниченное множество, то множество $\overline{f(B)}$ – компакт. Существует $S_\varepsilon(\overline{f(B)}) = \{y \in \mathbb{R} : \rho(y, \overline{f(B)}) < \varepsilon\}$ такое, что $S_\varepsilon(\overline{f(B)}) \subseteq U$. Множество $W = f + [A, S_\varepsilon(0)]$ является открытым множеством в пространстве $C_{\lambda^*}(X, Y)$. Осталось показать, что $W \subseteq [B, U]^*$. Пусть $g \in W$ и $x \in B$, тогда $\rho(g(x), f(x)) = \rho(f(x) + h(x), f(x)) < \varepsilon$, где $h \in [A, S_\varepsilon(0)]$. Следовательно, $g(x) \in U$ и $W \subseteq [B, U]^*$. Теорема доказана.

Теорема 9. Для тихоновского пространства X и метризуемого ТВП Y следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $C_{\lambda^*}(X, Y) = C_{\lambda, u}(X, Y)$;
- 2) $C_{\lambda^*}(X, Y)$ – паратопологическая группа;
- 3) $C_{\lambda^*}(X, Y)$ – топологическая группа;
- 4) $C_{\lambda^*}(X, Y)$ – ТВП;

5) семейство λ состоит из ограниченных подмножеств пространства X и $\lambda = \lambda(B)$.

Доказательство. (1) $\Leftrightarrow$ (5) следует из теорем 4.5 – 4.7 в [3]. Из (5) $\Rightarrow$ (4) по теореме 2.

Из (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) по определению. (2) $\Rightarrow$ (5) следует из теорем 7 и 8. Теорема доказана.

Если $Y = \mathbb{R}$, то справедливо

Следствие 10. Для тихоновского пространства X следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $C_{\lambda^*}(X) = C_{\lambda,u}(X)$;
- 2) $C_{\lambda^*}(X)$ – паратопологическая группа;
- 3) $C_{\lambda^*}(X)$ – топологическая группа;
- 4) $C_{\lambda^*}(X)$ – ТВП;
- 5) $C_{\lambda^*}(X)$ – локально выпуклое ТВП;

6) семейство λ состоит из ограниченных подмножеств пространства X и $\lambda = \lambda(B)$.

Доказательство. (6) $\Rightarrow$ (5). По теореме 1.1 из [2] следует, что $C_{\lambda,u}(X)$ – локально выпуклое ТВП. Следовательно, по эквивалентности (1) $\Leftrightarrow$ (6), $C_{\lambda^*}(X)$ – локально выпуклое ТВП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асанов М.О. Пространства непрерывных отображений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1981.
2. Kundu S., McCoy R.A. Topologies between compact and uniform convergence on function spaces // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1993. V. 16. No. 1. P. 101–110.
3. Osipov A.V. The set-open topology // Topology Proc. 2011. No. 37. P. 205–217.
4. Осипов А.В., Косолобов Д.А. О секвенциально-компактно-открытой топологии // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2011. Вып. 3. P. 75–84.

Статья поступила 15.09.2011 г.

Osipov A.V. ALGEBRAIC STRUCTURES ON THE SPACE OF CONTINUOUS MAPS. We study properties of the family λ at which the set $C(X, Y)$ of all continuous mappings from a Tychonoff space X into a metrizable topological vector space Y equipped with the (weak) set-open topology is a topological group.

Keywords: set-open topology; weak set-open topology; topological group; C -compact subset; paratopological group.

OSIPOV Alexander Vladimirovich (Ural Federal University, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences) E-mail: OAB@list.ru