УДК 512.541+512.552

А.Р. Чехлов

Е-ЭНГЕЛЕВЫ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ СТУПЕНИ ≤ 2

Доказано, что периодичность группы автоморфизмов или слабая транзитивность Е-энгелевой группы без кручения ступени ≤ 2 влечет коммутативность ее кольца эндоморфизмов. Установлены некоторые свойства энгелева кольца ступени 2. Показано также, что кольцо эндоморфизмов слабо транзитивной группы без кручения является полупервичным.

Ключевые слова: *коммутатор эндоморфизмов*, *первичный радикал*, *ниль-радикал*, *Е-разрешимая группа*, *слабо транзитивная группа без кручения*.

Все группы в статье – абелевы. Через $E(A)$ обозначается кольцо эндоморфизмов группы A, а через 1_A – ее тождественный автоморфизм, A_p – p-компонента, $T(A)$ – периодическая часть. Если A – группа без кручения, то $\chi_A(a)$ – характеристика ее элемента a, индекс A иногда убирается. Z_{p^∞} – квазициклическая p-группа, $\mathbf{Q}$ – аддитивная группа рациональных чисел. Напомним, что если R – кольцо и $a,b \in R$, то элемент $[a,b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b.

Если $a_1,\dots,a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1,\dots,a_n] = [[a_1,\dots,a_{n-1}],a_n]$. Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Через $Z(R)$ обозначается центр кольца R.

Подгруппу H группы A назовем *коммутаторно инвариантной* (обозначение $H \le \mathrm{ci}\, A$), если $[\varphi,\psi]H \subseteq H$ для всех $\varphi,\psi \in E(A)$. Через $H \le \mathrm{fi}\, A$ будем обозначать вполне инвариантную подгруппу H группы A, т.е. $\varphi H \subseteq H$ для всех $\varphi \in E(A)$.

Группу A назовем Е-*нильпотентной ступени* $\le n$, если $[\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}] = 0$ для любых $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1,\dots,n+1$; а если $[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\dots[\alpha_1,\alpha_2] = 0$ для любых $\alpha_i \in E(A)$, $i = 1,\dots,2n$, то – Е- *разрешимой ступени* $\le n$.

Группу A будем называть Е-*нильпотентной*, если для любой последовательности $\alpha_i \in \mathrm{E}(A)$, $i = 1,2,\dots$, найдется такое n, что $[\alpha_1,\dots,\alpha_n] = 0$.

Кольцо R называется *энгелевым ступени* $\le n$, если $[b,\underbrace{a\dots,a}_{n}] = 0$ для любых $b,a \in R$. Группу A с энгелевым кольцом $E(A)$ *ступени* $\le n$, назовем Е-*энгелевой ступени* $\le n$. Если равенство $[b,\underbrace{a,\dots,a}_{n}] = 0$ выполняется для любых $b,a \in R$, где n зависит от a и b, то кольцо R будем называть *энгелевым*, а группу с таким кольцом эндоморфизмов Е-*энгелевой*.

Е-нильпотентные и близкие к ним группы изучались в [1 – 4]. Так, в [2, предложение 1.2] показано, что Е-энгелевы группы имеют нормальное кольцо эндоморфизмов. В таких группах все прямые слагаемые вполне инвариантны. Поэтому несложно показать, что делимая группа $D = T(D)\oplus D_0$ имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда либо $T(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbf{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \ne 0$. Нередуцированная группа $A = D\oplus B$ с делимой частью D имеет нормальное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда B – периодическая группа, каждая p-компонента которой является циклической группой, а $D \cong \mathbf{Q}$, либо D – периодическая группа, каждая ненулевая p-компонента которой изоморфна квазициклической p-группе, причем $B_p = 0$ при $D_p \neq 0$ ([1, абзац после предложения 2]). Кольца эндоморфизмов таких групп D и A будут коммутативными. Поэтому в дальнейшем можно считать, что все группы редуцированные. В [4, 1-й и 2-й абзацы после примера 4] показано также, что всякая Е-энгелева группа ступени ≤ 2 является Е-нильпотентной класса ≤ 2. Однако существуют Е-энгелевы группы, не являющиеся Е-нильпотентными. Приведем соответствующий пример.

Пример. Пусть S – счетное коммутативное кольцо с 1, аддитивная группа которого является редуцированной группой без кручения, содержащее ниль-идеал I, не являющийся нильпотентным. В качестве S можно взять, например, фактор-кольцо $\mathbf{Z}[x_1,\dots,x_m,\dots]/J$ кольца многочленов над $\mathbf{Z}$ от переменных $x_1,\dots,x_m,\dots$ по идеалу J, порожденному элементами $x_1^n, x_2^{2n},\dots,x_m^{mn},\dots$, где n – фиксированное натуральное число. Поскольку $xx_1 - zz_1 \in I$ при $x - z, x_1 - z_1 \in I$, то множество матриц

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in S, x - z \in I \right\}$$

образует счетное кольцо с 1. Коммутатор любых двух элементов из K имеет вид $a = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ для некоторого $u \in S$. Если теперь $b = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in K$, то $[a,b] = \begin{pmatrix} 0 & u(z-x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому $[a,\underbrace{b,\dots,b}_{m}] \neq 0$, где m – индекс нильпотентности элемента $z - x$. Поскольку идеал I не является нильпотентным, то при $u \neq 0$ для каждого $t \in \mathbf{N}$ найдутся такие $b_1,\dots,b_t \in K$, что $[a,b_1,\dots,b_t] \neq 0$. Согласно теореме Корнера [5, теорема 110.1], существует группа A с кольцом эндоморфизмов, изоморфным K; A является Е-разрешимой (класса 2) и Е-энгелевой группой, но не является Е-нильпотентной.

Определим по индукции $A^{(0)} = A$ и $A^{(n+1)} = \langle [\varphi,\psi]A^{(n)} \mid \varphi,\psi \in E(A)\rangle$. Как отмечалось в [2], все $A^{(n)}$ вполне инвариантны в A. Ясно, что группа A Е-разрешима ступени $\leq n$ тогда и только тогда, когда $A^{(n)} = 0$. Если $A^{(n)} = 0$, но $A^{(n-1)} \neq 0$, то группу A будем называть Е-*разрешимой ступени n*.

Пусть A – Е-разрешимая группа без кручения ступени $n \geq 2$ и Δ – стабилизатор цепочки

$$A \supset A^{(1)} \supset \dots \supset A^{(n-1)} \supset 0,$$

т.е. $\Delta = \{\alpha \in \operatorname{Aut} A \mid \alpha a - a \in A^{(i)}$ для всех $a \in A^{(i-1)}$ и $i = 1,\dots,n\}$. Поскольку $A^{(i)} \leq \mathrm{fi}\, A$, то Δ – нормальная подгруппа в $\operatorname{Aut} A$ [5, § 114]. Об автоморфизмах абелевых групп см. [5, глава XVI; 6 – 8] и др.

1. *Δ является нильпотентной группой без кручения ступени $\leq n$. Причем если* $\alpha \in \Delta$, то $\alpha = 1 - \eta$, *где* $\eta^n = 0$.

Допустим, что $\beta \in \Delta$ – элемент конечного порядка $k > 1$ и пусть $r \leq n - 1$ – такое максимальное натуральное число, что α индуцирует на $A^{(n-i)}$ тождественный автоморфизм при $i = 1,\dots,r$. Тогда $\beta a = a + b$ для некоторых $a \in A^{(n-r-1)} \setminus A^{(n-r)}$ и $0 \neq b \in A^{(n-r)}$. Откуда $a = \beta^k a = a + kb$ и, значит, $kb = 0$, что противоречит бесконечному порядку элемента b.

Для каждого $m = 0,1,\dots,n$ пусть $\Delta_m = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha$ индуцирует тождественное отображение на $A/A^{(m)}\}$. Тогда $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_n = 1$ и Δ_m является собственной нормальной подгруппой в $\mathrm{Aut}\,A$ для остальных m. Пусть $\alpha,\beta \in \Delta_m$. Тогда для $a \in A$ имеем $\alpha a = a + u$ и $\beta a = a + v$ для некоторых $u,v \in A^{(m)}$. Если теперь $\beta u = u + u'$ и $\alpha v = v + v'$, где $u',v' \in A^{(m+1)}$, то $\alpha\beta a = a + u + v + v'$, $\beta\alpha a = a + v + u + u'$. Следовательно, $(\alpha\beta - \beta\alpha)a \in A^{(m+1)}$, т.е. Δ_m / Δ_{m+1} – коммутативная группа.

Пусть $\eta = 1 - \alpha$. Тогда $\eta(A^{(n-1)}) = \ldots = \eta(A^{(n-r)}) = 0$ для некоторого максимального r, где $1 \le r \le n - 1$. Имеем $\eta(A^{(n-r-1)}) \subseteq A^{(n-r)}$. Откуда $\eta^2(A^{(n-r-1)}) = 0$. По индукции $\eta^{n-r+1} = 0$.

2. *Если A – E-нильпотентная группа ступени* ≤ 2, то $\ker\alpha$ и $\mathrm{im}\,\alpha \le \mathrm{ci}\,A$ *для любого* $\alpha \in E(A)$.

Действительно, из $[\delta,\gamma,\alpha] = [\delta,\gamma]\alpha - \alpha[\delta,\gamma] = 0$ следует, что $\alpha[\delta,\gamma]\ker\alpha = 0$ и $[\delta,\gamma]\mathrm{im}\,\alpha \subseteq \mathrm{im}\,\alpha$.

Следующее свойство проверяется непосредственно.

3. *Если* $\alpha^2 = \pm 1_A$, то $[[\beta,\alpha],\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{n}] = \begin{cases} 2^n[\beta,\alpha] \text{ при } n = 2m, \\ 2^n[\beta,\alpha]\alpha \text{ при } n = 2m+1. \end{cases}$.

Следовательно, если A – такая E-*энгелева группа, что* $A_2 = 0$, *то* $\alpha \in Z(E(A))$ *для каждого* α *со свойством* $\alpha^2 = \pm 1_A$.

4. *Пусть A – такая* E-*энгелева группа ступени* ≤ 2, *что* $A_2 = 0$ *и* $\alpha^2 = 0$ *для некоторого* $\alpha \in E(A)$. *Тогда* $\alpha\beta\alpha = 0$ *для любого* $\beta \in E(A)$, *в частности*, $\ker\alpha \le \mathrm{fi}\,A$.

Вытекает из равенства $[\beta,\alpha,\alpha] = \beta\alpha^2 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta\alpha = 0$.

5. $[\beta,\underbrace{\alpha,\ldots,\alpha}_{n}] = \beta\alpha^n - \binom{n}{1}\alpha\beta\alpha^{n-1} + \ldots + (1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\alpha^{n-1}\beta\alpha + (-1)^n\alpha^n\beta$ *для любых* $\alpha,\beta\in E(A)$, где $\binom{n}{m} = C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Доказывается индукцией по n.

6. *Для элементов a,b кольца R равносильны условия*:

а) $[b,a,a] = 0$;

б) $[b,a^m,a^n] = 0$ *для любых* $m,n \in \mathbf{N}$;

в) $2a^nba^n = a^{2n}b + ba^{2n}$ *для любого* $n \in \mathbf{N}$.

а) $\Rightarrow$ б). Если $[b,a,a] = 0$, то $[b,a,a^m] = 0$ для любого $m \in \mathbf{N}$. Поэтому из $0 = [b,a,a^m] = [b,a^m,a]$ следует, что $[b,a^m,a^n] = 0$. в) получается из б) при $m = n$, а б) вытекает из в) при $n = 1$.

Отметим также следующие простые свойства. Если $[b,a,a] = 0$ для элементов a,b кольца R с 1, то равенство $ab = 1$ влечет $ba = 1$. Действительно, $[b,a,a] = ba^2 - 2aba + a^2b = 0$ влечет $a = ba^2$, откуда $(1 - ba)a = 0$ и, значит, $ba = 1$. Аналогично показывается, что равенства $[b,a,a] = 0$ и $ba = 1$ влекут $ab = 1$. Пусть a и b – такие элементы кольца, что $ab = 0$. Тогда равенство $[b,a,a] = 0$ эквивалентно равенству $ba^2 = 0$, а равенство $[a,b,b] = 0$ эквивалентно равенству $b^2a = 0$.

7. *Пусть R – такое энгелево кольцо с* 1 *ступени* ≤ 2, *что его аддитивная группа не имеет элементов порядка* 2. *Тогда* $[a,b]^2 = 0$ *для любых* $a,b \in R$.

Имеем $[a,ab,ab] = a((ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2) = 0$. Далее

$$((a-1)b)^2 - 2b(a-1)^2b + (b(a-1))^2 = ((ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2) - (ab^2 - 2bab + b^2a).$$

Здесь $ab^2 - 2bab + b^2a = [a,b,b] = 0$. Поэтому из

$$\begin{aligned}[a-1,(a-1)b,(a-1)b] &= (a-1)(((a-1)b)^2 - 2b(a-1)^2b + (b(a-1))^2) = \\ &= a((ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2) - ((ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2) = \\ &= [a,ab,ab] - ((ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2) = 0\end{aligned}$$

следует, что $(ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2 = 0$. Аналогично $(ba)^2 - 2ab^2a + (ab)^2 = 0$. Из последних двух равенств получаем $ba^2b = ab^2a$ и, значит,

$$[a,b]^2 = (ab)^2 - 2ba^2b + (ba)^2 = 0.$$

8. *Если A – Е-энгелева группа без кручения ступени ≤ 2, то* $\beta\alpha^{2m+1} - \alpha^{2m+1}\beta = (2m+1)\alpha^m(\beta\alpha - \alpha\beta)\alpha^m$ *для каждого $m \in \mathbf{N}$ и любых* $\alpha,\beta \in E(A)$.

Индукцией по m. Если $m = 1$, то из свойства 5 при $n = 3$ получаем $\beta\alpha^3 - \alpha^3\beta = 3\alpha(\beta\alpha - \beta\alpha)\alpha$. Далее, учитывая равенство $2\alpha\beta\alpha = \beta\alpha^2 + \alpha^2\beta$ и перестановочность $[\beta,\alpha]$ с α, имеем

$$\beta\alpha^{2m+3} - \alpha^{2m+3}\beta = (2m+1)\alpha^m(\beta\alpha - \alpha\beta)\alpha^{m+2} + \alpha^{2m+1}\beta\alpha^2 - \alpha^{2m+3}\beta =$$
$$= (2m+1)\alpha^{m+1}(\beta\alpha - \alpha\beta)\alpha^{m+1} + \alpha^{2m+1}(\beta\alpha^2 - \alpha^2\beta) =$$
$$= (2m+1)\alpha^{m+1}(\beta\alpha - \alpha\beta)\alpha^{m+1} + \alpha^{2m+1}(2\alpha\beta\alpha - 2\alpha^2\beta) =$$
$$= (2m+3)\alpha^{m+1}(\beta\alpha - \alpha\beta)\alpha^{m+1}.$$

9. *Пусть A – Е-энгелева группа без кручения ступени ≤ 2 и $\alpha \in$ Aut A. Тогда если $\alpha^n \in Z(E(A))$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$, то $\alpha \in Z(E(A))$. В частности, периодическая часть группы* Aut A *не только является подгруппой в* Aut A, *но и содержится в $Z(E(A))$.*

Пусть $n = 2m$. Имеем $[\beta,\alpha^m,\alpha^m] = \beta\alpha^{2m} + \alpha^{2m}\beta - 2\alpha^m\beta\alpha^m = 0$. Следовательно, $2\alpha^m(\alpha^m\beta - \beta\alpha^m) = 0$. Откуда $\alpha^m\beta - \beta\alpha^m = 0$ и, значит, $\alpha^m \in Z(E(A))$. Для завершения доказательства можно воспользоваться свойством 8. Приведем также следующее доказательство. С учетом вышеприведенного замечания с четным показателем, доказываемое свойство достаточно проверить для всех простых чисел p, где $p > 2$. Из

$$[\beta,\alpha,\alpha^{p-1}] = \beta\alpha^p - \alpha\beta\alpha^{p-1} - \alpha^{p-1}\beta\alpha + \alpha^p\beta = 0 \text{ и } \alpha^p \in Z(E(A))$$

получаем

$$2\beta\alpha^p = \alpha\beta\alpha^{p-1} + \alpha^{p-1}\beta\alpha \text{ или } 2\beta\alpha^{p-1} = \alpha\beta\alpha^{p-2} + \alpha^{p-1}\beta.$$

Покажем, что для каждого $k = 2,\dots,p$ справедлива формула

$$k\beta\alpha^{p-1} = \alpha^{k-1}\beta\alpha^{p-k} + (k-1)\alpha^{p-1}\beta \qquad (2)$$

индукцией по k. Пусть $2 < k < p$. Имеем

$$2k\beta\alpha^{p-1} = \alpha^{k-2}(2\alpha\beta\alpha)\alpha^{p-(k+1)} + 2(k-1)\alpha^{p-1}\beta =$$
$$= \alpha^{k-2}(\alpha^2\beta + \beta\alpha^2)\alpha^{p-(k+1)} + 2(k-1)\alpha^{p-1}\beta = \alpha^k\beta\alpha^{p-(k+1)} + \alpha^{k-2}\beta\alpha^{p-(k-1)} + 2(k-1)\alpha^{p-1}\beta =$$
$$= \alpha^k\beta\alpha^{p-(k+1)} + ((k-1)\beta\alpha^{p-1} - (k-2)\alpha^{p-1}\beta) + 2(k-1)\alpha^{p-1}\beta.$$

Сравнивая левую и правую части, получаем требуемое равенство $(k+1)\beta\alpha^{p-1} = \alpha^k\beta\alpha^{p-(k+1)} + k\alpha^{p-1}\beta$. При $k = p$ из (2) имеем $\beta\alpha^{p-1} = \alpha^{p-1}\beta$. Таким образом, $\alpha^p \in Z(E(A))$ и $\alpha^{p-1} \in Z(E(A))$. Из взаимной простоты чисел p и $p-1$ следует, что $\alpha \in Z(E(A))$.

10. *Пусть R – энгелево кольцо ступени ≤ 2, его аддитивная группа R^+ является группой без кручения и $a^n = 0$ для некоторых $a \in R$ и $n \ge 2$. Тогда $a^sba^{n-s} = 0$ для любого $b \in R$ и каждого $s = 1,\dots,n-1$.*

При $n = 2$ справедливость утверждения следует из равенства $2aba = ba^2 + a^2b$. Если $n = 3$, то из того же равенства получаем $2a^2ba = aba^2$ и $2aba^2 = a^2ba$. Значит, $aba^2 = a^2ba = 0$. Пусть $n > 3$. Имеем

$$[ba,a,a^{n-s}] = ba^{n-1} - aba^{n-2} - a^{n-3}ba^2 + a^{n-2}ba =$$
$$= ba^{n-1} - aba^{n-2} - a^{n-3}(2aba - a^2b) + a^{n-2}ba = 0.$$

Следовательно, $\quad ba^{n-1} - aba^{n-2} - a^{n-2}ba + a^{n-1}b = 0.$

Умножая справа обе части на a, получаем $-aba^{n-1}-a^{n-2}ba^2+a^{n-1}ba=0$. Отсюда

$$aba^{n-1}-a^{n-2}(2aba-a^2b)+a^{n-1}ba=-aba^{n-1}-a^{n-1}ba=0$$

или
$$aba^{n-1}=-a^{n-1}ba. \tag{3}$$

Из $2aba=ba^2+a^2b$ получаем $2a^{n-1}ba=a^{n-2}ba^2$. Покажем, что для любого $k=1,\ldots,n-1$ справедлива формула

$$ka^{n-1}ba=a^{n-k}ba^k. \tag{4}$$

При $k=2$ справедливость ее уже установлена. А далее имеем

$$2ka^{n-1}ba=a^{n-k-1}(2aba)ba^{k-1}=a^{n-k-1}(ba^2+a^2b)ba^{k-1}=$$
$$=a^{n-k-1}ba^{k+1}+a^{n-(k-1)}ba^{k-1}=a^{n-k-1}ba^{k+1}+(k-1)a^{n-1}ba.$$

Откуда следует справедливость искомой формулы $(k+1)a^{n-1}ba=a^{n-(k+1)}ba^{k+1}$. В частности, при $k=n-1$ имеем $(n-1)a^{n-1}ba=aba^{n-1}$. Теперь из (3) следует $(n-1)a^{n-1}ba=-a^{n-1}ba$, т.е. $na^{n-1}ba=0$. Истинность доказываемого утверждения вытекает из (4).

Напомним, что группа без кручения A называется *слабо транзитивной*, если для любых ее элементов a,b со свойством $\chi(a)=\chi(b)$ существует такой $\alpha\in E(A)$, что $\alpha a=b$. Слабо транзитивные группы изучались в [9, 10].

11. а) [10, лемма 1]. *Пусть A – редуцированная группа без кручения, $\alpha\in E(A)$ и $0\neq b\in\ker\alpha$. Тогда, если $h_p(b)\geq h_p(\alpha a)$, то $h_p(b+a)=h_p(a)$.*

б) *Если A – редуцированная слабо транзитивная группа без кручения, то для каждого $0\neq\alpha\in E(A)$ найдется $\beta\in E(A)$ со свойством $\alpha\beta\alpha\neq 0$. В частности, кольцо $E(A)$ полупервично.*

в) *Пусть R – энгелево кольцо. Тогда периодическая часть $T(M)$ всякого левого модуля M над R является подмодулем в M, причем $M/T(M)$ – модуль без кручения, т.е. $T(M/T(M))=0$. Кроме того, $T(M)$ – сингулярный подмодуль в M.*

Доказательство. б) Допустим, что $\alpha E(A)\alpha=0$. В частности, $\alpha^2=0$. Если $\alpha a\neq 0$ для некоторого $a\in A$, то в силу редуцированности группы A найдется такое простое число p, что αa имеет конечную p-высоту $n=h_p(\alpha a)$; причем можно считать, что $h_p(a)=0$. Так как $\alpha a\in\ker\alpha$, то по свойству а) $\chi(p^{2n+1}a+\alpha a)=\chi(p^na)$. Если теперь $\beta(p^{2n+1}a+\alpha a)=p^na$ для $\beta\in E(A)$, то $p^{2n+1}\alpha\beta a=p^n\alpha a$, что противоречит равенству $h_p(p^n\alpha a)=2n$.

в) Из $[r,\underbrace{t,\ldots,t}_{n}]=0$ имеем

$$t^nr=(-1)^{n-1}(rt^n-C_n^1\,trt^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\,t^{n-1}rt), \tag{5}$$

где, как и ранее, $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Пусть $t\in R$ – неделитель нуля, $ty=0$ для $y\in M$ и $0\neq ry$ для некоторого $r\in R$. Тогда из (5) имеем $t^nry=0$, т.е. $ry\in T(M)$. Если же $r\in R$ – неделитель нуля и $rx=0$, то $t^nrx=0$, а из (5) $t^nry=0$, т.е. $x-y\in T(M)$. Если же r – произвольный ненулевой элемент из R, то (5) влечет, что $0\neq t^nr\in Rr\cap\operatorname{Ann}y$, этого достаточно для сингулярности $T(M)$.

12. *Пусть R – энгелево кольцо ступени ≤ 2 и группа R^+ не имеет элементов порядка 2. Тогда каждый нильпотентный элемент кольца R является строго нильпотентным. В частности, первичный радикал кольца R совпадает с ниль-радикалом.*

Пусть $a^n = 0$ и $\{a_k \mid k = 0,1,\ldots\}$ – такая последовательность элементов кольца R, что $a_0 = a$ и $a_{k+1} \in a_k R a_k$. Ввиду равенства $2xyx = yx^2 + x^2 y$ элемент $2^k a_k$ представим в виде конечной суммы, каждое слагаемое которой содержит множитель a^{2^k}. Поэтому $a_s = 0$ для всех s, где $2^s \geq n$. Это и означает строгую нильпотентность элемента a. Первичный радикал содержится в ниль-радикале, а поскольку каждый нильпотентный элемент является строго нильпотентным, то отсюда следует обратное включение (так как первичный радикал совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов).

Отметим также следующие простые свойства.

13. *Энгелево кольцо удовлетворяет как правому, так и левому условию Оре.*

Действительно, если a – регулярный его элемент (т.е. неделитель нуля), $b \in R$ и $[b,\underbrace{a,\ldots,a}_{n}] = 0$, то $b(a^n) = a(C_n^1 ba^{n-1} - \ldots - (-1)^n a^{n-1} b)$. Аналогично

$$((-1)^{n-1} a^n)b = (ba^{n-1} - C_n^1 aba^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} a^{n-1} b)a .$$

14. *В энгелевом кольце R каждый регулярный справа его элемент a является регулярным. В частности, если $1 \in R$, то R – конечное по Дедекинду кольцо, т.е. равенство $xy = 1$ влечет $yx = 1$* (см. замечание после свойства 6). *Аналогично, каждый регулярный слева элемент кольца R является регулярным.*

Доказательство. Допустим, что $ca = 0$ для $c \in R$. Тогда для некоторого n имеем $[c,\underbrace{a,\ldots,a}_{n}] = (-1)^n a^n c = 0$. Откуда $c = 0$. Если $xy = 1$, то по доказанному правая регулярность элемента y влечет его регулярность. А так как $(1 - yx)y = 0$, то $1 - yx = 0$, т.е. $yx = 1$.

15. *Если a – нильпотентный элемент энгелева кольца R с* 1 *ступени* ≤ 2, *аддитивная группа R^+ не имеет элементов порядка* 2, *то Ra, aR и RaR – нильпотентные идеалы, причем при $n = 2^m$ или $n = 2^m + 1$ эти идеалы имеют индекс нильпотентности n.*

Теорема. *Пусть A – редуцированная* Е-*энгелева группа без кручения ступени* ≤ 2. *Тогда слабая транзитивность группы A или периодичность группы* $\operatorname{Aut} A$ *влечет коммутативность кольца $E(A)$.*

Доказательство. Группа без кручения с периодической группой автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ не имеет ненулевых нильпотентных эндоморфизмов [5, § 116, свойство a)], поэтому в этом случае теорема вытекает из свойства 7. Оставшееся утверждение следует из свойств 4, 7 и 11.

Некоторые полученные результаты можно перенести на модули, так в [11] изучались Е-разрешимые модули, а в [12] исследовались нильгруппы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чехлов А.Р.* Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. 2009. Т. 48. № 4. С. 520–539.
2. *Чехлов А.Р.* Е-нильпотентные и Е-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 1(9). С. 59–71.
3. *Чехлов А.Р.* О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. матем. журн. 2010. Т. 51. № 5. С. 1163–1174.
4. *Чехлов А.Р.* Некоторые примеры Е-разрешимых групп // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 69–76.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. Т. 1. М.: Мир, 1974; Т. 2. М.: Мир, 1977.

6. *Беккер И.Х.*, *Кожухов С.Ф.* Автоморфизмы абелевых групп без кручения. Томск, 1988.
7. *Хухро Е.И.* О p-группах автоморфизмов абелевых p-групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 3. С. 359–371.
8. *Журтов А.Х.* О квадратичных автоморфизмах абелевых групп // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 3. С. 320–328.
9. *Добрусин Ю.Б.* О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения. 2 // Абелевы группы и модули. 1985. № 5. С. 31–41.
10. *Чехлов А.Р.* Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 944–949.
11. *Чехлов А.Р.* E-разрешимые модули // Фундамент. и прикл. матем. 2010. Т. 16. № 7. С. 221–236.
12. *Чехлов А.Р.* О некоторых классах нильгрупп // Матем. заметки. 2012. Т. 91. № 2. С. 297–304.

Статья принята в печать 03.11.2011 г.

Chekhlov A.R. E-ENGELIAN ABELIAN GROUPS OF STEP ≤ 2. It is proved that periodicity of the automorphism group or weak transitivity of an E-engelian torsion free group of step ≤ 2 implies commutativity of its endomorphism ring. Some properties of the engelian ring of step 2 are established. It is also shown that the endomorphism ring of a weakly transitive torsion free group is semiprime.

Keywords: commutator of endomorphisms, prime radical, nil radical, E-solvable group, weakly transitive torsion free group.

CHEKHLOV Andrey Rostislavovich (Tomsk State University)
E-mail: cheklov@math.tsu.ru