ВЕСТНИК ТОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2012 Математика и механика № 2(18)

УДК 517.98:519.677

Н.В. Комиссарова, О.Н. Чащин

ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА

Приведены примеры неединственности решения для линейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода. Построенные примеры показывают, что необходимые условия единственности решения для уравнения 1-го рода не могут быть ослаблены.

Ключевые слова: *интегральное уравнение*, *уравнение Вольтерра 1-го рода*, *единственность решения*, *модуль непрерывности.*

Для линейного интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода

$$\int_0^x M(x,t)\cdot u(t)dt = f(x) \tag{1}$$

А.Л. Бухгеймом [1, 2] доказана единственность решения при следующих предположениях:

1) $M(x, t)$ непрерывно по совокупности переменных (x, t) при $0 \le t \le x \le 1$, и $M(x, x) = 1$; решение $u(t)$ непрерывно;

2) ядро $M(x, t)$ по переменной x имеет модуль непрерывности $\omega(h) = h\cdot|\ln h|$, т. е.

$$|M(x_1,t) - M(x_2,t)| \le |x_1 - x_2|\cdot|\ln|x_1 - x_2||; \tag{2}$$

3) решение $u(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α, $0 < \alpha < 1$.

Л.Б. Мацнев [3] привел пример неединственности решения для уравнения (1), при котором для ядра и решения выполнено условие 1). Исследования качества равномерной непрерывности при этом не проводилось. Ниже, модифицируя этот прием, приведем примеры, показывающие, что условия 2) и 3) теоремы единственности А.Л. Бухгейма [1, 2] существенны и не могут быть ослаблены.

Вопросы единственности для интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода изучались А. Асановым [4, 5], А. Сражидиновым [6] и другими авторами. В указанных работах единственность решения доказана для операторов с положительным ядром. Построенные в настоящей работе примеры имеют сильно осцилирующие ядра, меняющие знак бесконечное число раз. Впервые содержательный пример неединственности решения для интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода (для уравнения с осцилирующим ядром) был приведен Ю.Е. Аниконовым [7].

Метод построения примеров такого рода и связь единственности решения с качественными свойствами равномерной непрерывности ядра (и решения) анонсированы О.Н. Чащиным в работах [8, 9]. В этой работе анонсированные результаты усилены.

1. Пример неединственности решения для ядра, удовлетворяющего условию Гёльдера

Положим в уравнении (1)

$$u(t) = t \cdot B(t); \tag{3}$$

$$M(x,t) = 1 - t^{k-1} \cdot (x-t)^k \cdot B(t) \cdot A(x), \tag{4}$$

где $k > 1$;

$$A(x) = \frac{\int\limits_0^x t \cdot B(t)dt}{\int\limits_0^x t^k \cdot (x-t)^k \cdot B^2(t)dt}. \tag{5}$$

Тогда, формально интегрируя, имеем

$$\int\limits_0^x M(x,t) \cdot u(t)dt = 0,$$

при $M(x, t) \neq 0$, $u(t) \neq 0$. Ясно, что $M(x, x) \equiv 1$ и нам нужно подобрать функцию $B(t)$ так, чтобы $A(x)$, а, значит, и $M(x, t)$ были непрерывными. Затем исследуем характер равномерной непрерывности функций $u(t)$ и $M(x, t)$.

Зададим последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 0, 1,\ldots$, следующим образом:

$$a_0 = 1,\ a_{2n} - a_{2n+2} = a_{2n+2}^{\gamma}, \tag{6}$$

$$n = 1, 2, \ldots, \gamma > 1.$$

Будем выбирать $a_{2n+1} \in (a_{2n+2}, a_{2n})$ так, чтобы для решения $u(t)$, определяемого формулой (3), для каждого интервала (a_{2n+2}, a_{2n}) выполнялись равенства

$$\int\limits_{a_{2n+2}}^{a_{2n}} u(t)dt = 0,\ n = 0, 1, \ldots . \tag{7}$$

Для определения a_{2n+1} с учетом требования (7) нужно решить уравнение

$$I(y) = \int\limits_{a_{2n+2}}^{y} u(t)dt + \int\limits_{y}^{a_{2n}} u(t)dt = 0, \tag{8}$$

которое для конкретного примера является алгебраическим или трансцендентным относительно y и имеющее в каждом интервале (a_{2n+2}, a_{2n}) ровно одно решение. Ниже мы докажем это строго и укажем как надо выбирать a_{2n+1}.

Зададим далее

$$\delta_n = a_{2(n+1)} - a_{2(n+2)},\ n = 1, 2, \ldots, \delta_{-1} = 0;$$

$$\begin{cases} b_{4n} = a_{2n} - \alpha\delta_{n-1}^{\beta}, \\ b_{4n+1} = a_{2n+1} + \alpha\delta_n^{\beta}, \\ b_{4n+2} = a_{2n+1} - \alpha\delta_n^{\beta}, \\ b_{4n+3} = a_{2n+2} + \alpha\delta_n^{\beta}, \end{cases} \tag{9}$$

$$n = 0, 1, \ldots;\ \beta > 1,\ \alpha < 1/8.$$

Определим функцию

$$B(t)=\begin{cases} 0, & t=0, \\ 1, & b_{4n+1}\le t\le b_{4n}, \\ -1, & b_{4n+3}\le t\le b_{4n+2}, \\ -1+2\dfrac{t-b_{4n+2}}{b_{4n+1}-b_{4n+2}}, & b_{4n+2}<t<b_{4n+1}, \\ 1-2\dfrac{t-b_{4n+4}}{b_{4n+3}-b_{4n+4}}, & b_{4n+4}<t<b_{4n+3}. \end{cases} \tag{10}$$

Теперь можно вычислить a_{2n+1} и определить точки b_{4n+1}, b_{4n+2} В соответствии с (3) уравнение (8) примет вид

$$I(y)=\int\limits_{a_{2n+2}}^{b_{4n+3}} u(t)dt+\int\limits_{b_{4n+3}}^{y-\alpha\delta_n^\beta} u(t)dt+\int\limits_{y-\alpha\delta_n^\beta}^{y+\alpha\delta_n^\beta} u(t)dt+\int\limits_{y+\alpha\delta_n^\beta}^{b_{4n}} u(t)dt+\int\limits_{b_{4n}}^{a_{2n}} u(t)dt=0\,.$$

Учитывая, что α, a_{2n}, a_{2n+2}, δ_n, b_{4n}, b_{4n+3} не зависят от y, а также то, что второе и четвертое слагаемые суть интегралы от линейной функции, а третье есть интеграл от квадратичной функции, заключаем, что относительно y имеем кубическое уравнение. Непосредственно видно: $I(y)$ монотонно убывает на интервале (a_{2n+2}, a_{2n}) и

$$\lim_{y\to a_{2n+2}} I(y)>0\,.$$

Следовательно, уравнение (8) имеет на этом интервале единственный корень, его и примем за a_{2n+1}. Тем самым последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, а также функции $u(t)$, $B(t)$, $A(x)$ определены полностью.

Докажем ряд вспомогательных предложений, из которых выведем свойства $u(t)$ и $A(x)$, то есть $M(x, t)$.

Условие $\gamma > 1$ обеспечивает сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}-a_n)\,,$$

который соответствует последовательности $\{a_n\}$, сумма его известна и равна 1.

Условие $\beta > 1$ дает возможность определить кусочно-линейную функцию $B(t)$ и произвести все необходимые построения.

Условие $k > 1$ гарантирует непрерывность ядра $M(x, t)$.

В более тонких примерах эти условия будут уточняться, так как соотношение величин указанных трех констант определяет характер равномерной непрерывности построенных функций.

Лемма 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}}=1.$

Доказательство. Согласно (6), a_{2n+2} есть корень уравнения $\varphi(t) = t^\gamma + t = a_{2n}$ и $\varphi(0) = 0$.

Отсюда

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}=\frac{\varphi(a_{2n+2})}{a_{2n+2}}=\varphi'(\varsigma_n)\,,\ 0\le\varsigma_n\le a_{2n+2},$$

но $a_{2n+2}\to 0$ при $n\to\infty$. Но $\varphi'(0) = 1$, и утверждение леммы доказано.

Лемма 2. Для

$$F(x)=\int_0^x t\cdot B(t)dt$$

– числителя в выражении для $A(x)$ – имеет место оценка

$$F(a_{2n+1})=\mathrm{O}(a_{2n}^{\gamma+1}).$$

Доказательство. В самом деле: $F(x)$ – неположительная функция, имеющая нули в точках a_{2n} и максимумы в точках a_{2n+1}, $n = 1, 2, \ldots$. Справедлива оценка

$$s_n^+<|F(a_{2n+1})|<S_n^+,$$

где
$$s_n^+=(b_{4n+2}-b_{4n+3})\cdot(b_{4n+2}+b_{4n+3})/2,$$

$$S_n^+=(a_{2n+1}-a_{2n+2})\cdot(a_{2n+1}+a_{2n+2})/2.$$

s_n^+ и S_n^+ – площади трапеций, между которыми заключен график функции $t\cdot B(t)$.

В силу равенства (6) и результата леммы 1 $S_n^+=\mathrm{O}(a_{2n+1}^{\gamma+1})$. Из определения последовательности $\{b_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, следует $b_{4n+2} + b_{4n+3} = a_{2n+1} + a_{2n+2}$, $b_{4n+2}-b_{4n+3}=a_{2n+1}-a_{2n+2}-2\alpha\delta_n^{\beta}$, отсюда имеем $s_n^+=\mathrm{O}(a_{2n+1}^{\gamma+1})$. Лемма доказана.

Лемма 3. Для знаменателя $G(x)=\int_0^x t^k\cdot(x-t)^k\cdot B^2(t)dt$ имеет место оценка

$$\frac{C_k}{2}\cdot x^{2k+1}<G(x)<C_k\cdot x^{2k+1}$$

при $\alpha < 1/8$, $\beta > 1$. Здесь $C_k = \Gamma^2(k + 1) / \Gamma(2k + 2)$, Γ – гамма-функция Эйлера.

Доказательство. Верхняя оценка очевидна, достаточно положить $B^2(t)\equiv 1$ для верхней оценки, а для нижней оценки обязательным условием будет $\alpha < 1/8$. Выбирая $\alpha < 1/8$, достаточно малым, и $\beta > 1$, можно добиться, чтобы

$$\int_0^x t^k\cdot(x-t)^k\cdot B^2(t)dt\ge\frac{1}{2}\int_0^x t^k\cdot(x-t)^k\,dt,$$

что доказывает лемму.

Из предыдущих лемм очевидны неравенства

$$C_1\cdot a_{2n+1}^{\gamma-2k}\le A(a_{2n+1})\le C_2\cdot a_{2n+1}^{\gamma-2k},$$

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Отсюда видно, что для непрерывности $A(x)$ необходимо условие $\gamma > 2k$. При этом $\lim\limits_{x\to 0}A(x)=0$. Ниже будет доказано, что оно же и достаточно, более того, в этом случае $A(x)$ будет удовлетворять условию Гёльдера.

Лемма 4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}-a_{2n+1}}{b_{4n+1}-b_{4n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{b_{4n+3}-b_{4n+4}}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n+2}}{a_{2n}-a_{2n+1}}=1.$$

Доказательство. Первые равенства очевидны, так как $\alpha \cdot \delta_n^\beta$ есть малая более высокого порядка малости, чем $a_{2n} - a_{2n+2}$.

Пусть s_n^+ и S_n^+ определены как в лемме 2, а s_n^- и S_n^- аналогично им со следующими номерами. Обозначим

$$I_n^+ = \int\limits_{a_{2n+2}}^{a_{2n+1}} t \cdot B(t)dt \ ; \ I_n^- = \int\limits_{a_{2n+1}}^{a_{2n}} t \cdot B(t)dt \ .$$

В силу выбора a_{2n+1} $I_n^+ = -I_n^-$. Из этого непосредственно видно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n^+}{s_n^-} = -1 \ .$$

Отсюда следует второе равенство.

В качестве следствия имеем равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1} - a_{2n+2}}{a_{2n} - a_{2n+2}} = \frac{1}{2} \ .$$

Исследование характера равномерной непрерывности ядра осложняется тем, что единственный минимум функции $A(x)$ на интервале (a_{2n+2}, a_{2n}) достигается не в точке a_{2n+1}, а при $x_n < a_{2n+1}$, так как $A'(a_{2n+1}) < 0$, что подсчитывается непосредственно.

В дальнейшем будет полезна

Лемма 5. При всех n

$$\frac{x_n - a_{2n+2}}{a_{2n+1} - a_{2n+2}} \ge d > 0 \ .$$

Доказательство. Предположим обратное, т. е. существует подпоследовательность $\{a_q\}_{q = 1,2,\ldots} \subset \{a_n\}_{n = 1,2,\ldots}$, такая, что

$$\lim_{q\to\infty} \frac{x_q - a_{2q+2}}{a_{2q+1} - a_{2q+2}} = 0 \ .$$

Так как при всяком q

$$A(x) = A(x_q) + O(x - x_q)^2.$$

Но
$$A(x_q) > A(a_{2q+1}) \ge C_1 \cdot a_{2q+1}^{\gamma-2k} \ ,$$

$$A(a_{2q+2}) = A(x_q) + O(x_q - a_{2q+2})^2 = A(x_q) + o(x_q - a_{2q+1}) =$$
$$= A(x_q) + o(a_{2q+1}^{2\gamma}) \ge C_1 \cdot a_{2q+1}^{\gamma-2k} + o(a_{2q+1}^{\gamma-2k}) \ .$$

Это противоречит тому, что $A(a_{2q+2}) = 0$ и доказывает лемму.

Сформулируем теперь основной результат параграфа.

Теорема 1. Пусть $u(t)$ и $M(x, t)$ определяются соответственно формулами (3) и (4), $A(x)$ задано отношением (5). Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 0, 1, \ldots,$ – соответственно формулами (6) и (9) с выполнением условия (7), функция $B(t)$ – условиями (10) при $k > 0$, $\gamma > 2k$, $\alpha < 1/8$, $\beta > 1$.

Тогда функция $u(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/\beta\gamma$, а $M(x, t)$ по переменной x удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1 - 2k/\gamma$.

Доказательство. Функция имеет наибольший рост на интервалах (b_{4n+1}, b_{4n+2}), (b_{4n+4}, b_{4n+3}), причем

$$|u(b_{4n+1})-u(b_{4n+2})| = b_{4n+1}+b_{4n+2} = 2a_{2n+1},$$

и, так как

$$|b_{4n+1}-b_{4n+2}| = 2\delta_n^{\beta\mu} = 2a_{2n+2}^{\gamma\beta\mu},$$

то

$$\frac{|u(b_{4n+1})-u(b_{4n+2})|}{|b_{4n+1}-b_{4n+2}|^{\mu}} = \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^{\mu} \cdot (a_{2n+2})^{1-\gamma\beta\mu}.$$

Значит, верхнее отношение ограничено при $\mu < 1/\beta\gamma$, а это и есть условие Гёльдера с показателем $1/\beta\gamma$.

Наибольший рост функции $A(x)$ достигается на интервалах (a_{2n+2}, x_n).

Здесь и далее используются обозначения лемм 2, 3.

Из монотонности функции $G(t)$, свойств функций $F(t)$ и $A(x)$ следует неравенство

$$|A(x_n)-A(a_{2n+2})| = A(x_n) \le \frac{F(a_{2n+1})}{G(a_{2n+2})}.$$

В силу оценок лемм 1 – 3

$$A(x_n) = O(a_{2n+1}^{\gamma-2k}).$$

Отсюда, по лемме 5

$$\frac{|A(x_n)-A(a_{2n+2})|}{|x_n-a_{2n+1}|^{\mu}} \le \frac{A(x_n)}{d^{\mu}\cdot|a_{2n+1}-a_{2n+2}|^{\mu}} = O\left(a_{2n+2}^{\gamma-2k-\mu\gamma}\right).$$

Левая дробь ограничена и стремится к нулю при $n \to \infty$ если $\mu < 1-2k/\gamma$. То есть $A(x)$, а, значит, и $M(x, t)$ по переменной x удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1-2k/\gamma$. Теорема доказана.

2. Неединственность решения, не удовлетворяющего условию Гёльдера

Здесь будет приведен пример, показывающий, что требование принадлежности решения к классу гёльдеровых функций в теореме единственности А. П. Бухгейма [1, 2] существенно и не может быть отброшено. Построенное в этом примере ядро будет удовлетворять оценке (2), и однородное линейное интегральное уравнение (1) будет иметь ненулевое непрерывное, но не гёльдерово решение.

Теорема 2. Пусть теперь вместо условия (6) последовательность $\{a_n\}$, $n = 0, 1,\ldots$, определяется соотношением

$$a_0 = 1,\ a_{2n}-a_{2n+2} = \exp\left(-\frac{1}{a_{2n+2}^{\gamma}}\right), \gamma > 0. \qquad (6')$$

a_{2n+1}, b_n, $u(t)$, $B(t)$, $A(x)$, $M(x, t)$ определены как в 1. Тогда функция $u(t)$ непрерывна и не удовлетворяет условию Гёльдера ни для какого положительного показателя, а для $M(x, t)$ при $\gamma > 2k$ справедлива оценка (2).

Доказательство. В самом деле:

$$\frac{|u(b_{4n-1})-u(b_{4n})|}{|b_{4n-1}-b_{4n}|^{\mu}} = \frac{2a_{2n}}{(2\alpha)^{\mu}\cdot\delta_{n-1}^{\mu\beta}} \ge \frac{2^{1-\mu}}{\alpha^{\mu}} a_{2n} \exp\left(\frac{\mu\beta}{a_{2n}^{\gamma}}\right),$$

но последний член неравенства стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Для $A(x)$ проведем те же оценки, что и в примере теоремы 1. Очевидно, для числителя $F(x)$ в определении $A(x)$ имеем $s_n^+ < F(a_{2n+1}) < S_n^+$, или

$$C_1 a_{2n+1} \cdot \exp\left(-\frac{1}{a_{2n+1}}\right) < F(a_{2n+1}) < C_2 \exp\left(-\frac{1}{a_{2n+1}}\right),$$

а для оценки знаменателя заметим, что и в этом случае справедлива лемма 3. Отсюда получим

$$\frac{C_1}{C_k} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_{2n+1}^{\gamma}}\right)}{a_{2n+1}^{2k}} \le A(a_{2n+1}) \le \frac{C_2}{C_k} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{a_{2n+1}^{\gamma}}\right)}{a_{2n+1}^{2k}}.$$

Верна лемма 5 относительно x_n – максимума функции $A(x)$ на интервале (a_{2n+2}, a_{2n}). Следовательно, верна оценка

$$\frac{|A(x_n) - A(a_{2n+2})|}{|x_n - a_{2n+2}|^{\mu}} \le \frac{C_2}{C_k} \cdot \frac{\exp\left(\frac{\mu - 1}{a_{2n+2}^{\gamma}}\right)}{d^{\mu} \cdot a_{2n+2}^{2k}},$$

из которой следует, что оцениваемое отношение стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого $\mu \in (0, 1)$, т. е. $A(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с любым показателем $\mu < 1$, но не удовлетворяет условию Липшица, так как

$$\frac{|A(x_n) - A(a_{2n+2})|}{|x_n - a_{2n+2}|} \sim \frac{C_2}{C_k} \cdot \frac{1}{a_{2n+2}^{2k}}.$$

Более того, при $\gamma > 2k$ верна оценка (2). В самом деле, в силу леммы 5 имеем

$$|\ln|x_n - a_{2n+2}|| = O\left(\frac{|\ln d|}{a_{2n+2}}\right).$$

Отсюда, учитывая лемму 1, получим

$$\frac{|A(x_n) - A(a_{2n+2})|}{|x_n - a_{2n+2}| \cdot |\ln|x_n - a_{2n+2}||} \le \frac{C_2}{C_k} \cdot \frac{a_{2n+1}^{\gamma - 2k}}{d \cdot |\ln d|}.$$

Верхняя оценка последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, если $\gamma > 2k$. Теорема доказана.

3. Пример неединственности решения для ядра с модулем непрерывности по переменной *x* между *h* и *h*·|ln *h*|.

Пусть далее

$$a_0 = 1,\ a_{2n} - a_{2n+2} = \exp\left(-\frac{\gamma}{a_{2n+2}}\right),$$

$$u(t) = B(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{t}\right),$$

$\gamma > 1$, a_{2n+1}, b_n, $B(t)$ определяются как в п.1.

$$M(x,t) = 1 - |\ln t|^{-1} \cdot |\ln|x - t||^{-1} \cdot B(t) \cdot A(x); \qquad (11)$$

$$A(x)=\frac{\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{t}}\cdot B(t)dt}{\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{t}}\cdot\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}\cdot B^2(t)dt}. \tag{12}$$

Тогда справедлива

Теорема 3. Если ядро интегрального уравнения (1) определяется равенствами (11), (12), то его решение неединственно, удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/\beta\gamma$, а модуль непрерывности ядра по переменной x есть $\omega(h) = h\cdot|\ln h|^{\lambda}$ при $\lambda > 1$.

Доказательство. Заметим, что и в этом случае верны леммы 1 – 5.

Очевидно, верно (7) и $u(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/\beta\gamma$.

$A(x)$ имеет нули в точках a_{2n} и максимумы в точках x_n $a_{2n+2} < x_n < a_{2n+1}$.

Сохранив обозначения пункта 1, установим оценку:

$$C_1\exp\left(-\frac{\gamma+1}{a_{2n+2}}\right)\le s_n^+ < F(a_{2n+1}) < S_n^+ \le C_2\exp\left(-\frac{\gamma+1}{a_{2n+1}}\right).$$

Оценка знаменателя проводится сложнее. Так же как и в п.1, путем соответствующего подбора $\alpha < 1/8$ и $\beta > 1$ достигается выполнение неравенств

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^x\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}e^{-t}dt\le G(x)\le\int\limits_0^x\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}e^{-t}dt.$$

Функция $e^{-\frac{1}{t}}$ монотонно возрастает и по теореме о среднем, принимая во внимание очевидную симметрию, получим

$$\int\limits_0^x e^{-\frac{1}{t}}\cdot\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}dt = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\int\limits_0^{\xi}\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}dt, \tag{13}$$

где ξ: $0 < \xi < x$.

Для интеграла

$$\int\limits_0^x\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}dt,$$

в силу свойств логарифма, путем подбора $\alpha < 1/8$ и $\beta > 1$ достигается выполнение неравенств

$$\frac{x}{2}\cdot\left|\ln\frac{x}{2}\right|^{-2} < \int\limits_0^x\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}dt < x\cdot\left|\ln\frac{x}{2}\right|^{-2},$$

т.е. порядок оценок совпадает с порядком малости функции $x\cdot|\ln x|$ при $x \to 0$. Для произвольного ξ оценки правого интеграла в (13) будут иметь вид

$$\frac{\theta x}{2}\cdot\left|\ln\theta x\right|^{-1}\cdot\left|\ln(1-\theta)x\right|^{-1} < \int\limits_0^{\theta x}\left|\ln t\right|^{-1}\cdot\left|\ln\left|x-t\right|\right|^{-1}dt < \theta x\cdot\left|\ln\theta x\right|^{-1}\cdot\left|\ln(1-\theta)x\right|^{-1}$$

(здесь $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$).

Отсюда видно, что верхняя и нижняя оценки имеют один и тот же порядок малости при $x \to 0$, совпадающий с порядком малости функции $x \cdot |\ln x|^{-2}$.

Стало быть,

$$C_3 \cdot a_{2n+2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{a_{2n+2}}\right) \cdot |\ln a_{2n+2}|^{-2} <$$

$$< C_4 \cdot \int_0^{a_{2n+2}} \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \cdot |\ln t|^{-1} \cdot |\ln|x-t||^{-1}\, dt <$$

$$< C_{2n+2} \cdot \exp\left(-\frac{1}{a_{2n+2}}\right) \cdot |\ln a_{2n+2}|^{-2}.$$

Аналогично п.1 можно доказать справедливость леммы 5 и для этого случая. Учитывая, что наибольший рост функция $A(x)$ имеет на интервалах (a_{2n+2}, x_n), вычислим ее модуль непрерывности:

$$\frac{|A(x_n) - A(a_{2n+2})|}{|x_n - a_{2n+2}|^{\mu}} < \overline{C} \cdot \frac{|\ln a_{2n+2}|^{-2}}{a_{2n+2}} \cdot \frac{\exp\left(-\dfrac{\gamma}{a_{2n+2}}\right)}{\exp\left(-\dfrac{\mu\gamma}{a_{2n+2}}\right)} =$$

$$= \overline{C} \cdot \frac{|\ln a_{2n+2}|}{a_{2n+2}} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma \cdot (1-\mu)}{a_{2n+2}}\right).$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при всяком $\mu < 1$. То есть $A(x)$ по переменной x удовлетворяет условию Гёльдера для любого показателя $\mu < 1$.

Непосредственно устанавливается асимптотическое соотношение:

$$\frac{|A(x_n) - A(a_{2n+2})|}{|x_n - a_{2n+2}| \cdot |\ln|x_n - a_{2n+2}||^{\lambda}} = O\left(a_{2n+2}^{\lambda-1} \cdot |\ln a_{2n+2}|^{-2}\right).$$

Правая часть последнего соотношения стремится к нулю при $n \to \infty$ для всякого $\lambda > 1$ и к бесконечности при $\lambda = 1$. Значит, модуль непрерывности для $A(x)$ по переменной x есть функция $\omega(h) = h \cdot |\ln h|^{\lambda}$ при $\lambda > 1$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бухгейм А.Л.* Операторные уравнения Вольтерра в шкалах банаховых пространств. // ДАН СССР. 1978. Т. 242. № 2. С. 272–275.
2. *Бухгейм А.Л.* Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. 208 с.
3. *Мацнев Л.Б.* Об одном вольтерровом операторе. // Дифференциальные уравнения и теория функций. Вып. 1. Саратов: Изд-во Саратовского университета, 1977. С. 65–69.
4. *Асанов А.* О единственности решения систем уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. // Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. Новосибирск, 1978. С. 26–34.
5. *Асанов А.* Регуляризация и единственность решения линейных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе, 1980. С. 207–214.
6. *Сражидинов А.* О единственности решения уравнения Вольтерра первого рода // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. Фрунзе, 1979. С. 177–189.

7. *Аниконов Ю.Е.* Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978. 238 с.
8. *Чащин О.Н.* Примеры неединственности для уравнения Вольтерра 1-го рода. – Новосибирск, 1981. С. 41–42. (Препринт № 47 / ИТПМ СОАН СССР).
9. *Чащин О.Н.* Регуляризация операторных уравнений Вольтерра 1-го рода в шкале банаховых пространств // Приближенные методы решения и вопросы корректности обратных задач. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1981. С. 132–144.

Статья поступила 30.09.2011 г.

Komissarova N.V., *Chashchin O.N.* EXAMPLES OF NON-UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND. Examples of non-uniqueness of solutions to Volterra linear integral equation of the first kind are presented. The constructed examples demonstrate that the necessary conditions for uniqueness of the solution to equation of the first kind can not be weakened.

Keywords: integral equation, Volterra equation of the first kind, uniqueness of solution, modulus of continuity.

KOMISSAROVA Natal'ja Vasil'evna (Siberian State Academy of Geodesy)
E-mail: n_kmssrv@ngs.ru

CHASHHIN Oleg Nikolaevich , Siberian (University of Consumer Co-operatives)
E-mail: oleg-chashhin@yandex.ru